ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 9 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 539.1(075.8)

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ И ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. Ш. Ходжаев, А. Г. Чирков, С. Д. Шаталов

Указан новый случай движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, который может быть изучен асимптотическим методом (электрическое поле не считается слабым, а магнитное — слабонеоднородным). В рассматриваемом случае найден адиабатический инвариант, зависящий от всех значений напряженности магнитного поля на витке траектории. Установлена гамильтонова структура эволюционных уравнений в первом приближении. Приведены примеры анализа движений с помощью полученных эволюционных уравнений и адиабатического инварианта.

1. Об одном случае движения частицы в сильно неоднородном поле. Уравнения движения и новые переменные. Рассмотрим движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях вида

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{i} + E_y \boldsymbol{j}, \quad E_x = E(x), \quad E_y = \text{const} > 0,$$

$$\boldsymbol{H} = H_x \boldsymbol{i} + H_z(x) \boldsymbol{k}, \quad H_x = \text{const}, \quad H_z(x) > 0,$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты декартовых осей. Такое магнитное поле получается наложением однородного поля на поле, созданное токами, направленными по оси y, причем плотность тока зависит только от оси x.

Частным случаем электромагнитного поля рассматриваемого вида является поле вблизи фронта МГД-ударной волны, записанное в системе координат, в которой фронт неподвижен [1–3].

Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор частицы, m — ее масса, $q > 0$ — заряд. Случаи $q < 0$, $H_z(x) < 0$ и т. п. исследуются аналогично. Уравнение движения в пренебрежении взаимодействием частицы с плазмой имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (q/m)\boldsymbol{E} + (q/mc)[\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{H}]. \tag{1.1}$$

Обозначим характерные значения напряженности магнитного поля, скорости, ларморовских частоты и радиуса через H_0, v_0, ν и R_L. Введем безразмерные время νt и координаты x/R_L, y/R_L, z/R_L. Сохраняя за безразмерными величинами их прежние обозначения и проектируя (1.1) на координатные оси, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= h(x)v + e(x), \\ \dot{v} &= -h(x)u + \varepsilon(1 + h_x w), \\ \dot{w} &= -\varepsilon h_x v. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $v = \dot{y}$, $w = \dot{z}$, $\varepsilon = cE_y/v_0H_0$, $\varepsilon h_x = H_x/H_0$, $h(x) = H_z(x)/H_0$, $e(x) = cE_x/v_0H_0$. При записи (1.2) принято наиболее общее предположение, что все компоненты u, v, w — скорости одного порядка.

Величина ε в (1.2) принимается за малый параметр, т. е. делаются два предположения. Во-первых, y-компонента кулоновской силы qE_y мала по сравнению с силой Лоренца $|q[\dot{r}\times H]/c|$. Во-вторых, малой считается x-компонента H_x напряженности магнитного поля по сравнению с H_z.

В существующей адиабатической теории (см., например, [4–7] малой по сравнению с силой Лоренца считается полная кулоновская сила, а напряженность магнитного поля предполагается мало меняющейся на расстояниях $O(R_L)$. Таким образом, эти основные предположения существующей теории далее не сохраняются: малой считается только одна из компонент E, а H_z считается функцией x, а не εx, т. е. существенно изменяется на расстояниях $x \sim R_L$.

Специальное предположение о геометрии поля, $H_x \ll H_z$, соответствует, например, ряду задач астрофизики о движении частицы вблизи фронта МГД-ударной волны [1].

Система (1.2) не сводится к уравнениям с одной быстрой фазой известной заменой переменных, применяемой в существующей теории движения частиц в слабо неоднородном поле. Поэтому необходимы новые способы преобразования уравнений.

Сама возможность асимптотического интегрирования уравнений (1.2) не вытекает из общей теории адиабатических инвариантов и возмущенных гамильтоновых систем. В рамках этой теории вместо (1.2) следует рассматривать соответствующие гамильтоновы уравнения, содержащие в данном случае несколько быстрых переменных. Такая система, вообще говоря, не сводится к системе с одной быстрой фазой. Последующее же асимптотическое интегрирование обусловлено той специфической особенностью задачи, что потенциал, зависящий от скорости, линеен по координатам y и z.

Введем вместо w и v новые переменные $\lambda = h_x w + 1$ и $\sigma = v + A(x)$, где

$$A(x) = \int_0^x h(s)\,ds.$$

При этом система (1.2) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{u} &= h(x)(\sigma - A(x)) + e(x); \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \varepsilon\lambda, \\ \dot{\lambda} &= -\varepsilon h_x^2(\sigma - A(x)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Содержащуюся здесь подсистему (1.3) можно рассматривать как уравнения одномерного движения некоторой условной материальной точки в меняющемся во времени (с изменением σ) потенциальном поле с потенциалом $\Pi = (1/2)(\sigma - A(x))^2 + V(x)$, где $dV/dx = -e(x)$.

Система (1.3), (1.4) имеет интеграл, который можно получить и непосредственно из (1.2):

$$(1/2)[u^2 + (\sigma - A(x))^2 + \lambda^2/h_x^2] + V(x) = U = \text{const}. \tag{1.5}$$

2. Адиабатический инвариант при возмущении системы второго порядка решением системы в стандартной форме. Пусть дана система

$$\dot{q} = \partial\tilde{H}/\partial p + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$\dot{p} = -\partial\tilde{H}/\partial q + \varepsilon^2 \ldots; \tag{2.1}$$

$$\dot{\sigma} = \varepsilon K(\sigma, \lambda) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$\dot{\lambda} = \varepsilon G(\sigma, \lambda, q, p) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{2.2}$$

состоящая из двух связанных подсистем: возмущенной гамильтоновой системы второго порядка (2.1) с гамильтонианом $\tilde{H} \stackrel{*}{=} \tilde{H}(q, p, \sigma)$ и системы (2.2) произвольного порядка (σ, λ могут быть векторами). Система (1.3), (1.4) является частным случаем системы (2.1), (2.2).

Как известно, если в системе (2.1) функция σ зависит только от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, то такая система имеет адиабатический инвариант. Им является постоянная действия в соответствующей задаче с $\sigma = \text{const}$. Покажем, что система (2.1), (2.2) имеет адиабатический инвариант того же вида.

Предполагается, что фазовые траектории подсистемы (2.1) при $\sigma = \text{const}$ замкнуты. Введем вместо q, p переменные действие — угол I, φ так же, как они вводятся в системе с гамильтонианом $\tilde{H}$ при $\sigma = \text{const}$ (см., например, [8]). Придем к системе относительно I, σ, λ, φ с одной быстрой фазой φ, что позволяет применить метод усреднения. Согласно этому методу вводятся новые медленные переменные $\varkappa(\tau)$, $\mu(\tau)$ соотношениями

$$\sigma = \varkappa + \varepsilon u_1 + \ldots, \quad \lambda = \mu + \varepsilon v_1 + \ldots \tag{2.3}$$

Поскольку функция K не зависит от q, p, то u_1 может быть функцией (вообще говоря, произвольной) только новых медленных переменных, т. е., в конечном счете, функцией τ, но не t. Поэтому зависимость σ от t не сказывается на членах первого порядка при усреднении (2.1). Следовательно, как и при $\sigma = \sigma(\tau)$, действие является адиабатическим инвариантом.

3. Адиабатический инвариант. Гамильтонова структура медленной подсистемы и ее потенциал. Применим результаты п. 2 к системе (1.3), (1.4). Действие I выразится в данном случае через x, u следующим образом. Введем переменную η соотношением

$$\eta = (1/2)[u^2 + (\sigma - A(x))^2] + V(x). \tag{3.1}$$

Имеем (см., например, [9])

$$I = F(\eta, \sigma) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2\eta - (\sigma - A(s))^2 - 2V(s)}\, ds. \tag{3.2}$$

Здесь $x_1(\eta, \sigma)$, $x_2(\eta, \sigma)$, $x_1 < x_2$ — корни уравнения $(\sigma - A(x))^2 + 2V(x) = 2\eta$. Интеграл в (3.2) и далее в аналогичных случаях вычисляется при σ, $\eta = \text{const}$.

Предполагается, что система (1.3) при $\sigma = \text{const}$ описывает колебания, т. е. ее фазовые траектории замкнуты; так будет, в частности, при $V(x) \equiv 0$. Положение центра, размах и период этих колебаний медленно изменяются. Размах равен $x_2 - x_1$, а центр колебаний x_c с точностью до малых величин является решением уравнения

$$h(x_c)(\sigma - A(x_c)) + e(x_c) = 0. \tag{3.3}$$

Величина I является адиабатическим инвариантом. Задача теперь сводится к решению медленной подсистемы относительно эволюционных составляющих переменных σ и λ. Выясним ее структуру. В силу уравнений (1.3), (1.4) и интеграла (1.5)

$$\dot{\eta} = \varepsilon\lambda(\sigma - A(x)). \tag{3.4}$$

Соотношение (3.2) определяет функцию $F(\eta)$, содержащую σ как параметр. Эту функцию можно обратить, в результате чего определится функция $\eta = G(I, \sigma)$.

Введем переменные $\varkappa$, μ, J, приняв $u_1 \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \sigma &= \varkappa + \varepsilon^2 u_2(\varkappa, \mu, J, t) + \varepsilon^3 \ldots, \\ \lambda &= \mu + \varepsilon v_1(\varkappa, \mu, J, t) + \varepsilon^2 \ldots, \\ I &= J + \varepsilon w_1(\varkappa, \mu, J, t) + \varepsilon^2 \ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

По свойству адиабатического инварианта $\dot{J} = O(\varepsilon^2)$. Имеем

$$\eta = \gamma + \varepsilon g_1(\varkappa, \mu, J, t) + \varepsilon^2 \ldots = G(\varkappa, J) + \varepsilon(\partial G/\partial J) w_1 + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\dot{\eta} = (\partial G/\partial \varkappa)\dot{\varkappa} + \varepsilon(\partial G/\partial J)\dot{w}_1 + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.6}$$

Здесь γ — эволюционная составляющая переменной η, аргументами функции G являются $\varkappa$, J. Из (3.4) получим

$$\varepsilon\mu(\varkappa - A_\varphi(\varkappa, J, \varphi)) + \varepsilon^2 \ldots = (\partial G/\partial \varkappa)\varepsilon\mu + \varepsilon(\partial G/\partial J)\dot{w}_1 + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.7}$$

Вместо $\dot{\varkappa}$ в правой части (3.7) подставлено $\varepsilon\mu$ из усредненного первого уравнения (1.4), а через $A_\varphi(\sigma, I, \varphi)$ обозначена функция, получающаяся после подстановки в $A(x)$ выражения x через σ, I, φ.

Усредняя (3.7), придем к соотношению

$$\langle \sigma - A(x) \rangle = \partial G(\varkappa, J)/\partial \varkappa + \varepsilon \ldots \tag{3.8}$$

Это соотношение позволяет усреднить (1.4) и записать медленную подсистему в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa} &= \varepsilon\mu, \\ \dot{\mu} &= -\varepsilon h_x^2 [\partial G(\varkappa, J)/\partial \varkappa]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Уравнения (3.9) должны интегрироваться при $J = \mathrm{const}$.

Существенно, что уравнения медленных движений описывают консервативную систему, т. е. являются уравнениями одномерного движения новой условной материальной точки в поле с потенциалом $\varepsilon h_x^2 G(\varkappa, J)$.

Система (3.9) имеет интеграл $\gamma + (1/2)(\mu^2/h_x^2) = \mathrm{const}$, который однако, не является новым и получается из (1.5) с точностью $O(\varepsilon)$ заменой переменных η, γ их эволюционными составляющими γ, μ.

Полезно, в частности, для сравнения с движением в медленно меняющемся поле (см. далее) составить уравнения относительно эволюционной составляющей ξ абсциссы ведущего центра x_c, определяемой соотношением $x_c = \xi + \varepsilon u_{c1} + \ldots$ Из (3.3) следует

$$\dot{\varkappa} = [h(\xi) - (h(\xi)\, de/d\xi - e(\xi)\, dh/d\xi) h^{-2}(\xi)^{-1}]\, \dot{\xi} = \Psi(\xi)\dot{\xi}. \tag{3.10}$$

Теперь из (3.9) получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \varepsilon\mu/\Psi(\xi), \\ \dot{\mu} &= -\varepsilon(h_x^2/\Psi(\xi))(\partial G_*(\xi, J)/\partial \xi). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь функция $G_*(\xi, J)$ получается заменой I на J из функции $\eta = G_*(\xi, I)$ после обращения функции $F_*(\eta, \xi)$, определяемой соотношением $F_*(\eta, \xi) = F(\eta, \sigma)$ или

$$F_*(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2\eta - [A(\xi) - A(s) - e(\xi)/h(\xi)]^2 - 2V(s)}\,ds, \tag{3.12}$$

аналогично тому, как $G(\varkappa, J)$ определяется обращением (3.2).

Уравнения (3.11) можно упростить, введя «местное» время θ, соотношением $d\theta = dt/\Psi(\xi)$. Придем к системе

$$\begin{gathered} d\xi/d\theta = \varepsilon\mu, \\ d\mu/d\theta = -\varepsilon h_x^2[\partial G_*(\xi, J)/\partial\xi]. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Далее ограничимся случаем $E_x = 0$, охватывающим, в частности, указанные выше задачи астрофизики. При этом величина $\eta = (1/2)\times\times[u^2 + (\sigma - A(x))^2]$ с точностью $O(\varepsilon)$ равна кинетической энергии частицы в движении перпендикулярно магнитному полю $(\eta \cong v_\perp^2)$. Функции F и F_* соответственно примут вид

$$\begin{gathered} F(\eta, \sigma) = \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2\eta - (\sigma - A(s))^2}\,ds, \\ F_*(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2\eta - (A(\xi) - A(s))^2}\,ds, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $x_1(\eta, \sigma)$, $x_2(\eta, \sigma)$ — корни уравнения $(\sigma - A(x))^2 = 2\eta$. Центр колебаний x_c определяется как корень уравнения $A(x_c) = \sigma$.

Уравнения (3.11) в данном случае будут

$$\begin{gathered} \dot\xi = \varepsilon\mu/h(\xi), \\ \dot\mu = -\varepsilon(h_x^2/h(\xi))\,\partial G_*(\xi, J)/\partial\xi. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Введением местного времени $d\theta = dt/h(\xi)$ система (3.15) приводится к форме (3.13).

4. О движении в слабо неоднородном поле. Рассмотрим для сравнения движение частицы в электрическом и магнитном полях того же вида, что и ранее, но в случае, когда $E_x = 0$, а z-компонента $h(x)$ магнитного поля мало меняется на расстояниях порядка R_L.

Пусть r_0 — характерный масштаб изменения напряженности магнитного поля. В пп. 1, 3 предполагалось $R_L \sim r_0$ или для полей с напряженностью, меняющейся скачком, $R_L \gg r_0$. Задача же о движении при медленно меняющейся функции h относится к случаю $R_L \sim \varepsilon r_0$, изучаемому существующей теорией (см., например, [4–7]). Но, хотя эта задача принадлежит тому же классу, что и ранее изученные, она является вырожденной в этом классе и потому требует особого рассмотрения.

Считая v_0 и R_L теми же, что и в п. 1, будем предполагать r_0 на порядок бо́льшим, чем R_L. В безразмерных переменных п. 1 получим уравнения, отличающиеся от (1.2) тем, что $e(x) = 0$ и вместо $h(x)$ в них войдет функция $h(\varepsilon x)$. Переходя к переменным $\rho = \varepsilon x$, $p^2 = u^2 + v^2$, $\lambda = h_x w + 1$ и углу ψ, такому, что $\cos\psi = u/p$, $\sin\psi = -v/p$, придем к уравнениям с одной быстрой фазой:

$$\dot\rho = \varepsilon p \cos\psi, \quad \dot p = -\varepsilon\lambda \sin\psi,$$
$$\dot\lambda = \varepsilon h_x^2 p \sin\psi, \quad \dot\psi = h(\rho) - \varepsilon(\lambda/p)\cos\psi. \tag{4.1}$$

Усреднение (4.1) по ψ приводит к тривиальному результату: в первом приближении ρ и p сохраняются на временах $t \sim 1/\varepsilon$. Поэтому здесь тривиален и основной в данном классе задач вывод о сохранении известного адиабатического инварианта $p^2/h \cong v_\perp^2/h$ на временах $t \sim 1/\varepsilon$. Этот вывод также и недостаточен, поскольку нужно проследить за движением частицы, пока существенно не изменится h, т. е. на расстояниях $O(r_0)$ и временах $O(1/\varepsilon^2)$.

Необходимо, таким образом, найти решение уравнений (4.1) во втором приближении. Введением дрейфовых составляющих ξ, ζ, μ функций ρ, p, λ получим уравнения

$$\dot\xi = \varepsilon^2\mu/h(\xi),$$
$$\dot\zeta = \varepsilon^2(dh/d\xi)\,(2h^2(\xi))^{-1}\zeta\mu, \tag{4.2}$$
$$\dot\mu = -\varepsilon^2(dh/d\xi)(2h^2(\xi))^{-1}\zeta^2.$$

Определяемые из этих уравнений функции ξ, ζ, μ близки к исходным переменным с точностью до членов порядка ε на промежутках $t \sim 1/\varepsilon^2$, а не $t \sim 1/\varepsilon$, как в общем случае. Это следует из равенства нулю членов порядка ε в уравнениях (4.2).

Уравнения (4.2) имеют интегралы

$$(1/2)\left(\zeta^2 + \mu^2/h_x^2\right) = U = \text{const}, \quad (1/2)\zeta^2/h(\xi) = J = \text{const}. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что величина p^2/h (и вместе с ней $v_\perp^2/h$) является адиабатическим инвариантом на временах $O(1/\varepsilon^2)$.

Хотя в данном случае получился адиабатический инвариант известного вида, заранее это было не очевидно, поскольку в невырожденных задачах адиабатический инвариант получается из членов первого порядка по ε и иным путем. Существенно также, что инвариант сохраняется на временах $t \sim 1/\varepsilon^2$. Аналогичная ситуация возникает в задачах, где $v_\parallel = 0$ при всех t (см. [7]).

Перепишем уравнения (4.2) в виде, аналогичном (3.15). Введем переменную $\varkappa$ соотношением $A(\xi) = \varkappa$. В силу (4.3)

$$\dot\varkappa = \varepsilon^2\mu,$$
$$\dot\mu = -\varepsilon^2 h_x^2\,[\partial G(\varkappa, J)/\partial\varkappa]. \tag{4.4}$$

Здесь $G(\varkappa, J) = Jh(A^{-1}(\varkappa))$, A^{-1} — функция, обратная функции A, существующая и однозначная ввиду положительности h.

Вводя местное время θ, $d\theta = dt/h(\xi)$, придем к уравнениям

$$d\xi/d\theta = \varepsilon^2\mu, \quad d\mu/d\theta = -\varepsilon^2 h_x^2 J\,(dh(\xi)/d\xi). \tag{4.5}$$

Как и (3.13), система (4 5) описывает движение условной материальной точки в потенциальном силовом поле. Отличия между этими двумя системами состоят, во-первых, в том, что правые части уравнений (4.5) имеют множителем ε^2, а не ε, как в (3.13), и, во-вторых, разный вид имеют потенциалы $G_*(\xi, J)$ и $Jh(\xi)$.

Однако различие в множителях ε и ε^2 в обеих системах (3.13) и (4.5) обеспечивает сходство этих систем в том смысле, что обе они позволяют проследить за движением частицы на расстояниях, на которых существенно меняется h. Это позволяет сравнивать движения в слабо и сильно неоднородных полях. Но, конечно, времена прохождения расстояний r_0 в этих двух случаях различаются на порядок.

Принципиально отличие в виде потенциалов в (3.13) и (4.5). Если в (4.5) потенциал $Jh(\xi)$ пропорционален напряженности, то в (3.13) потенциал $G_*(\xi, J)$ определяется всеми значениями $h(\xi)$ на промежутке $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$. Положим в (3.13) $G_* = Jh_M$. Тогда, если отвлечься от времени движения и скорости дрейфа, можно сказать, что частица в быстро меняющемся поле движется так же, как и в медленно меняющемся, но с модифицированной напряженностью поля h_M. При этом h_M зависит от J и от всех значений напряженности поля на расстояниях $\sim R_L$.

Отметим, что в слабо неоднородном поле [9]

$$I = F_*(\eta, \xi) \equiv \eta/h(\xi) = (1/2)\zeta^2/h(\xi),$$

т. е. с точностью до малых величин инвариант (3.14) переходит в (4.3).

5. Изменение кинетической энергии и условие отражения. О влиянии характерного масштаба изменения напряженности поля. Чтобы получить выражения для $G(\varkappa, J)$ в (3.9), необходимо обратить соотношение (3.14), что возможно в общем виде лишь для немногих функций h. Однако некоторые выводы о движении частицы (изменение кинетической энергии, отражение от сильного поля и т. д.) можно сделать и не зная явного вида функции G. Далее проводится такой анализ для некоторых функций $h(x)$. Это рассмотрение представляет самостоятельный интерес для астрофизики [1]. Кроме того, оно полезно и как пример использования адиабатического инварианта вида (3.14).

Рассмотрим вначале случай, когда функция $h(x)$ возрастающая. Выясним, как при этом изменяется кинетическая энергия. Покажем, что $G(\varkappa, J)$ — возрастающая функция $\varkappa$. Из [9] имеем

$$\partial F(\gamma, \varkappa)/\partial\gamma > 0, \quad \partial F(\gamma, \varkappa)/\partial\varkappa < 0.$$

Дифференцируя соотношение $F(\gamma, \varkappa) = J = \mathrm{const}$ по времени, получим

$$\frac{\partial F}{\partial\gamma}\dot{\gamma} + \frac{\partial F}{\partial\varkappa}\dot{\varkappa} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial\varkappa} = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\varkappa}} = -\frac{\partial F/\partial\varkappa}{\partial F/\partial\gamma} > 0. \tag{5.1}$$

Привлекая соотношение $A(\xi) = \varkappa$, придем к выводу, что эволюционная составляющая $\gamma = G(\varkappa, J) = G_*(\xi, J)$ «поперечной» кинетической энергии η возрастает или убывает одновременно с эволюционной составляющей ξ абсциссы x_c ведущего центра.

Для полной кинетической энергии T из (1.2) при $e = 0$ имеем

$$\dot{T} = \varepsilon v = \varepsilon(\sigma - A(x)). \tag{5.2}$$

После усреднения (5.2) с учетом (3.8) получим

$$d\Theta/dt = \varepsilon\partial G(\varkappa, J)/\partial\varkappa. \tag{5.3}$$

Здесь Θ — медленная (эволюционная) составляющая T.

Таким образом, при движении в области возрастания функции h в силу (5.1) полная кинетическая энергия в среднем возрастает со временем независимо от направления движения ведущего центра.

Рассмотрим отражение частицы. Пусть первоначально $\mu > 0$, а по истечении некоторого времени оказывается $\mu = 0$ и затем $\mu < 0$. Переменные $\varkappa$, ξ, до этого возраставшие, в соответствии с (3.9) станут убывать (частица отражается от сильного магнитного поля). Из интеграла типа (1.5) видно, что при $\mu = 0$ величина γ достигает максимально возможного для данной частицы значения $\gamma = U$. Поэтому определение условия отражения сводится к отысканию максимума функции $G(\varkappa, J)$ по $\varkappa$ при $J = \mathrm{const}$ и сравнению его с U.

Простое условие отражения получается для полей следующего вида. Пусть функция h возрастает до значения h_*, после чего магнитное поле становится слабо неоднородным. В таком поле функция $G(\varkappa, J)$ как функция $\varkappa$ имеет вид, аналогичный виду h, т. е. вначале возрастает до значения $G = Jh_*$, а потом делается почти постоянной. Поэтому для любой частицы, у которой $U > Jh_*$, равенства $U = \gamma$ и $\mu = 0$ невозможны, т. е. такие частицы не отражаются. Частицы же, у которых $U < Jh_*$, отразятся. Следовательно, условие отражения имеет вид

$$U/J < h_*. \tag{5.4}$$

В качестве примера зависимости условия отражения от характерного масштаба r_0 рассмотрим движение частицы в П-образном поле вида $h(x) = h_2$ при $x \in [-\Delta, \Delta]$ и $h(x) = h_1 < h_2$ при всех других x.

Пусть во все время движения $x_2 - x_1 > 2\Delta$. Можно показать, что величина γ достигает максимума при $\varkappa = 0$. Функция F в данном случае может быть выписана в явном виде. Вычисляя ее при $\varkappa = 0$, придем к уравнению относительно максимального значения γ_*:

$$\frac{\gamma_*}{h_1} - \frac{h_2 - h_1}{\pi h_1 h_2}\left[2\gamma_* \arcsin\frac{h_2\Delta}{\sqrt{2\gamma_*}} + h_2\Delta\sqrt{2\gamma_* - (h_2\Delta)^2}\right] = J. \tag{5.5}$$

Условие отражения имеет вид $\gamma_* > U$. При достаточно больших значениях параметра Δ из (5.5) имеем $\gamma_* \cong Jh_2$, при малых Δ будет $\gamma_* \cong Jh_1$. Но вследствие (4.3), $U > Jh_1$, поэтому при малых Δ частицы с почти всеми возможными значениями U, J не отразятся. При больших Δ приходим к условию отражения вида $U/J > h_2$, как в предыдущем случае. Таким образом, при увеличении Δ значения отношения U/J, при которых частица не отражается, меняются в пределах $h_1 < U/J < h_2$. Подобные результаты, в принципе, не могут быть получены из существующей адиабатической теории.

6. Об ускорении и сверхдиабатическом ускорении. Для астрофизики интересен случай, когда частица начинает и заканчивает движение в одном и том же поле, проходя без отражения область, где функция h сначала возрастает, а потом убывает. Если бы кинетическая энергия возрастала, этим можно было объяснить ускорение космических частиц в некоторых случаях. Покажем, однако, что это не так, т. е. кинетическая энергия не изменится. С помощью соотношений (5.3) и (3.9) запишем

$$\Delta\Theta = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial G}{\partial \varkappa}\,dt = -\frac{1}{h_x^2}\int_{t_0}^{t_1} \dot{\mu}\,dt = \frac{\mu_0 - \mu_1}{h_x^2}. \tag{6.1}$$

Из интеграла энергии получим $\mu_0^2 - \mu_1^2 = (\gamma_0 - \gamma_1)h_x^2$. В силу сохранения адиабатического инварианта значения γ в начале и конце движения будут одинаковыми. Тогда $\mu_0 = \mu_1$ и $\Delta\Theta = 0$.

Отметим, что при отражении частицы $\mu_1 = -\mu_0$ и энергия увеличивается. Высказывалось мнение [1], что при прохождении частицей области сильного изменения поля рассмотренной конфигурации происходит бóльшее изменение кинетической энергии, чем при движении в медленно меняющемся поле с той же «начальной и конечной величиной» (так называемое «сверхадиабатическое ускорение»). Покажем, что это не так.

Сравним движение двух частиц, из которых одна движется в слабо неоднородном поле, а другая начинает и заканчивает движение в том же поле, что и первая, но проходит по пути участки сильной неоднородности. Частицы начинают движение с одинаковыми начальными условиями и не отражаются. В начале движения обе частицы имеют инвариант $\zeta^2/2h$. Для первой частицы этот инвариант сохранится во все время движения. Для второй в области сильной неоднородности он не сохраняется, но сохраняется инвариант (3.14), значение которого совпадает со значением $\zeta^2/2h$ в предыдущем движении в слабо неоднородном поле. Выйдя затем в новую область слабой неоднородности, вторая частица будет иметь то же самое (первоначальное) значение инварианта $\zeta^2/2h$, что и первая. Одинаковыми будут и кинетические энергии частиц.

Однако условия отражения рассматриваемых частиц будут, вообще говоря, разными, что можно отнести к числу эффектов, обусловленных сильной неоднородностью поля. Вообще, с помощью полученных выше результатов в адиабатическую теорию движения заряженных частиц вводится новый параметр — характерный масштаб изменения напряженности магнитного поля, что позволяет более детально исследовать изменение энергетического спектра частиц при прохождении фронта МГД-ударной волны, их отражение, рассеяние на флуктуациях магнитного поля и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев А. А. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1977, 41, № 9, с. 1790.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959
3. Васильев В. Н., Топтыгин И. Н., Чирков А. Г.— Космические исследования, 1980, 18, вып. 4, с. 556.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.
5. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Гос. ун-т, 1971.
6. Брагинский С. И.— Укр. матем. журн., 1956, 8, № 2, с. 119.
7. Нортроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц.— М.: Атомиздат, 1967.
8. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
9. Ходжаев К. Ш., Чирков А. Г., Шаталов С. Д. — ПМТФ, 1981, № 4, с. 3.

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию 20 октября 1981 г.

ADIABATIC INVARIANT AND EVOLUTION EQUATIONS WHEN A PARTICLE MOVES IN STRONGLY INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

K. Sh. Khodzhaev, A. G. Chirkov, S. D. Shatalov

A new motion of a charged particle in electric and magnetic fields is specified which may be studied by asymptotic method (the electric field is not considered to be weak and the magnetic one is weakly inhomogeneous). In the case considered the adiabatic invariant has been found being dependent on all values of the magnetic field strength along the trajectory loop. The Hamiltonian structure of evolution equations in the first approximation has been estimated. Examples of the motion analysis are given by the evolution equations and the adiabatic invariant obtained.