

**Армянская Советская
Социалистическая Республика**

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ
ВОЛНЫ НА АНИЗОТРОПНОМ СФЕРОИДЕ**

С. С. Оганесян

Рассмотрена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны анизотропным вытянутым сфероидом. Задача решена методом построения векторных гармоник. Получено поперечное сечение рассеяния как функция от коэффициента анизотропии.

С пятидесятых годов были начаты интенсивные работы по изучению рассеяния электромагнитных волн телами канонической формы. Особый интерес уделялся проводящим телам. Широко известны задачи о рассеянии на сфере и цилиндрах с разными поперечными сечениями [1, 2], а также на сфероиде и диске [2, 3, 5]. Эти задачи представляют большой интерес, особенно в теории и технике радиолокации, а также в теории дифракции.

Задачам дифракции и рассеяния электромагнитных волн на анизотропных и, тем более, гиротропных телах было уделено очень мало внимания. Известна ранняя работа [6], в которой задача решена методом интегральных уравнений, но в ней рассмотрено только длинноволновое приближение. В работе [8] рассмотрена дифракция на анизотропной сфере. К сожалению, последняя не доведена до численных расчетов из-за громоздкости полученных выражений. Дальнейшим исследованиям в этом направлении препятствуют, по-видимому, те большие математические трудности, которые возникают, когда имеем дело с анизотропными и гиротропными средами. Здесь в общем случае не удается применять классический метод Фурье. К числу упомянутых математических трудностей относится и малоизученность сфероидальных функций, особенно при комплексных параметрах (см. [9], с. 11).

В предлагаемой работе поставлена задача о дифракции плоской электромагнитной волны на анизотропном вытянутом сфероиде. Рассмотрено «носое», в отличие от «бокового», падение плоской, линейно-поляризованной электромагнитной волны. Для изучения влияния анизотропии на рассеянную волну ограничение на направление падения в данной работе не играет существенной роли. Общий случай падения на проводящий сфероид рассматривается в работе [7]. При решении использован метод, предложенный в [1, 4, 5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в безграничной однородной и изотропной среде с комплексными параметрами ϵ_1 , μ_1 в отсутствие сторонних токов и зарядов находится диэлектрическое тело в форме вытянутого сфероида. В качестве диэлектрического тела взят одноосный кристалл, оптическая ось которого направлена вдоль большой оси (геометрической) вытянутого сфероида.

Поместим правую декартову систему координат в центре вытянутого сфероида и совместим ось z с осью анизотропии, т. е. с большой осью сфероида. При таком выборе декартовых координат тензор комп-



лексной диэлектрической проницаемости в вытянутой сфероидальной системе координат ξ, η, Φ представляется следующим образом:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} A^2 \varepsilon_0 + B^2 \varepsilon_z & AB(\varepsilon_z - \varepsilon_0) & 0 \\ AB(\varepsilon_z - \varepsilon_0) & A^2 \varepsilon_z + B^2 \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вдоль осей x и y , ε_z — вдоль оси z ,

$$A = \eta(\xi^2 - \eta^2)^{-1/2}(\xi^2 - 1)^{1/2}, \quad B = \xi(\xi^2 - \eta^2)^{-1/2}(1 - \eta^2)^{1/2}.$$

Запишем уравнение вытянутого сфероида в следующем виде:

$$(x^2 + y^2)/(\xi^2 - 1) + z^2/\xi^2 = F^2,$$

где $F^2 = b^2 - a^2$ — полуфокусное расстояние сфероида, b — большая полуось сфероида, a — малая полуось сфероида.

Пусть линейно-поляризованная плоская волна с коэффициентом распространения $k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1$ распространяется в отрицательном направлении оси z :

$${}^1\mathbf{E} = \hat{l}_x E_0 \exp(ik_1 z + i\omega t), \quad {}^1\mathbf{H} = -\hat{l}_y H_0 \exp(ik_1 z + i\omega t), \quad (2)$$

где E_0, H_0 — амплитуды волн, \hat{l}_x, \hat{l}_y — орты осей x, y в декартовой системе. Из постановки задачи ясно, что при этом будет иметь место сложное преломление, отражение и дифракция волны. Однако относительной сложностью картины поведения отличается внутрисфероидальное поле, которое связано со своеобразным поведением электромагнитных волн в анизотропных средах. Как известно из теории [10], волна в них распадается на две волны с разными коэффициентами распространения. Они названы обыкновенной и необыкновенной волнами.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Исследование распространения электромагнитных волн в анизотропных средах связано с большими математическими трудностями. Значительное усложнение дифференциальных уравнений Максвелла отражается на применении классических методов. В работе [11] удается в частных случаях с помощью потенциалов Абрагама применять метод Фурье, но в общем случае получается система очень сложных связанных дифференциальных уравнений. В целях преодоления указанных математических трудностей удобно использовать метод разложения поля по сфероидальным функциям, предложенный Стреттоном [1] и развитый в дальнейшем [4], с. 36. Он успешно применяется в работе [5] для случая вытянутого сфероида бесконечной проводимости. Метод разложения поля по сфероидальным функциям применяется также в работе [3], с. 460. Согласно указанному методу, решения векторного волнового уравнения строятся на основе заранее известного решения скалярного волнового уравнения Гельмгольца. В данной работе применен вышеупомянутый метод, который несколько усовершенствован в [5].

Волны в анизотропных средах в декартовой системе координат описываются следующими уравнениями [12]:

$$(\nabla^2 + k_0^2) \psi_0 = 0; \quad (3)$$

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_z \mu_2 \right) \psi_2 = 0, \quad (3a)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_2$. Здесь (3) описывает обыкновенную, (3a) — необыкновенную волну.

Поле во внешней среде определяется уравнением

$$(\nabla^2 + k_1^2)\psi_1 = 0. \quad (4)$$

Решение (3а) будет

$$\psi_2 = \exp(i\mathbf{k}_2\mathbf{r}), \quad (5)$$

где $|\mathbf{k}_2| = |\mathbf{k}_0| p(\sin^2\theta_2 + p^2\cos^2\theta_2)^{-1/2}$, $\operatorname{tg}^2\theta_2 = p^2\operatorname{tg}^2\theta_0$, k_2 , θ_2 , φ_2 характеризуют распространение необыкновенной волны в сферических координатах [10], $p^2 = \varepsilon_z/\varepsilon_0$ — коэффициент анизотропии.

Разложим (5) в ряд по волновым вытянутым сфероидальным функциям ([9], с. 134) и запишем общий член ряда в следующем виде:

$$\psi_{2mn}^{(h)} = A_{2mn}(c_2, \theta_2) S_{mn}^{(1)}(c_2, \eta) R_{mn}^{(h)}(c_2, \xi) \cos m\Phi. \quad (5a)$$

Здесь $S_{mn}^{(1)}(c_2, \eta)$ — угловая сфероидальная функция первого рода, $R_{mn}^{(h)}(c_2, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция произвольного рода, т. е. $h = 1, 2, 3, 4$, $c_2 = k_2 F$ — параметр сфероидальных функций,

$$A_{2mn}(c_2, \theta_2) = \frac{2c_2^m i^{m+n}}{N_{2mn}} S_{mn}^{(1)}(c_2, \theta_2),$$

$N_{2mn} = \int_0^\pi [S_{mn}^{(1)}(c_2, \theta_2)]^2 \sin\theta_2 d\theta_2$ — нормировочный коэффициент [9], $\varphi_2 = 0$ — в силу азимутальной симметрии задачи.

В качестве постоянного вектора в отличие от [1] выбираем декартовые орты $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$. Вектор ${}^j M_{mn}^{(h)}$ строится следующим образом [4]:

$${}^j M_{mn}^{(h)} = \operatorname{rot}(\hat{l}_j \psi_{mn}^{(h)}), \quad j = x, y, z. \quad (6)$$

После выполнения операций, указанных в (6), получим явные выражения сфероидальных гармоник, которые приведены в [4].

Применяя еще раз оператор rot к этим функциям, получаем функции ${}^x N_{mn}^{(h)}$, ${}^y N_{mn}^{(h)}$, ${}^z N_{mn}^{(h)}$ ([4], с. 41). Полученная система из шести векторных сфероидальных гармоник является полной и ортогональной. Легко заметить, что из сфероидальных гармоник (6) при переходе к сферическим координатам получаются соответствующие сферические гармоники, приведенные в [1]. Функции ${}^x N_{mn}^{(h)}$, ${}^y N_{mn}^{(h)}$, ${}^z N_{mn}^{(h)}$ здесь не приводятся, поскольку в дальнейшем используются только функции ${}^x M_{mn}^{(h)}$, ${}^y M_{mn}^{(h)}$, ${}^z M_{mn}^{(h)}$ из-за их простоты.

Векторные гармоники ${}^j M_{mn}^{(h)}$, ${}^j N_{mn}^{(h)}$, соответствующие скалярным функциям ψ_0 и ψ_1 , можно получить из формул (6), используя следующие формальные переходы параметров: для случая внешнего поля c_2 переходит в c_1 , а для обыкновенной волны c_2 в c_0 . Разлагая падающую плоскую волну по сфероидальным гармоникам (6), получим

$${}^1 E = \frac{1}{c_1 \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{0n} {}^y M_{0n}^{(1)}, \quad {}^1 H = \frac{1}{c_1 \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{0n} {}^x M_{0n}^{(1)}, \quad (7)$$

где

$$\bar{A}_{0n} = -i(E_0 b) A_{0n}, \quad \bar{B}_{0n} = i(H_0 b) A_{0n},$$

$$A_{0n} = \frac{2i^n}{N_{0n}} \sum_{l=0,1}^{\infty} d_l^{0n}(c_1), \quad c_1 = k_1 F.$$

Поле внутри вытянутого сфероида будем искать в виде

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{D} &= D_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n {}^y M_{0n}^{(1)}(c_2, \xi, \eta, \Phi) + \gamma_n {}^y M_{0n}^{(1)}(c_0, \xi, \eta, \Phi) \}, \\ {}^t\mathbf{H} &= H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ \alpha_n {}^x M_{0n}^{(1)}(c_2, \xi, \eta, \Phi) + \gamma_n {}^x M_{0n}^{(1)}(c_0, \xi, \eta, \Phi) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_0 = k_0 F$ и ${}^t\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции, а внешнее поле — в виде

$$\begin{aligned} {}^r\mathbf{E} &= E_0 \sum_{n=0}^{\infty} f_n {}^y M_{0n}^{(4)}(c_1, \xi, \eta, \Phi), \\ {}^r\mathbf{H} &= H_0 \sum_{n=0}^{\infty} \{ f_n {}^x M_{0n}^{(4)}(c_1, \xi, \eta, \Phi) + \beta_n {}^z M_{1n}^{(4)}(c_1, \xi, \eta, \Phi) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, f_n$ — неизвестные коэффициенты, которые подлежат определению.

Формула (9), при предельном переходе к задаче о дифракции электромагнитных волн на вытянутом сфероиде с бесконечной проводимостью, переходит в известное выражение для поля, полученное в [3] (с. 463) и [5].

Граничные условия на поверхности вытянутого сфероида

$$[({}^t\mathbf{E} + {}^r\mathbf{E}), \hat{l}_\xi] = [({}^t\mathbf{E}, \hat{l}_\xi)], \quad [({}^t\mathbf{H} + {}^r\mathbf{H}), \hat{l}_\xi] = [({}^t\mathbf{H}, \hat{l}_\xi)], \quad (10)$$

где \hat{l}_ξ — сфероидальный орт в направлении координат ξ .

Умножим уравнения (10) на $S_{0\nu}^{(1)}(c_1, \eta)$ и проинтегрируем их по η в пределах $-1 \leq \eta \leq 1$. Получим

$$\begin{aligned} A_{0n2} P_{3n\nu} \alpha_n + A_{0n0} P_{4n\nu} \gamma_n - A_{0n1} P_{2n\nu} f_n &= P_{1n\nu} \bar{A}_{0n\nu}, \\ A_{0n2} P_{7n\nu} \alpha_n + A_{0n0} P_{8n\nu} \gamma_n - A_{0n1} P_{6n\nu} f_n &= P_{5n\nu} \bar{A}_{0n\nu}, \\ A_{0n2} P_{11n\nu} \alpha_n + A_{0n0} P_{13n\nu} \gamma_n - A_{0n1} P_{10n\nu} f_n + A_{1n1} P_{12n\nu} \beta_n &= P_{9n\nu} \bar{B}_{0n\nu}, \\ A_{0n2} P_{16n\nu} \alpha_n + A_{0n0} P_{18n\nu} \gamma_n - A_{0n1} P_{15n\nu} f_n + A_{1n1} P_{17n\nu} \beta_n &= P_{14n\nu} \bar{B}_{0n\nu}, \end{aligned} \quad (11)$$

где n и ν пробегает все значения от нуля до бесконечности. Таким образом, получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

В (12) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_{1n\nu} &= \frac{1}{c_1 \xi_0} \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_1, \xi_0) (\xi_0^2 Q_{1,1}^{0,0} - Q_{1,1}^{2,0}), \\ P_{2n\nu} &= P_{0n}^{(4)}(c_1, \xi_0) (\xi_0^2 Q_{1,1}^{0,0} - Q_{1,1}^{2,0}), \quad P_{13n\nu} = \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_0, \xi_0) Q_{1,1}^{0,1/2}, \\ P_{3n\nu} &= \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_z} \left\{ [\epsilon_0 \xi_0^2 Q_{1,2}^{0,1} + \epsilon_z (\xi_0^2 - 1) Q_{1,2}^{2,0}] \frac{d}{d\xi} \times \right. \\ &\quad \left. \times R_{0n}^{(1)}(c_2, \xi_0) + \xi_0 (\epsilon_z - \epsilon_0) R_{0n}^{(1)}(c_2, \xi_0) \dot{Q}_{1,2}^{1,1} \right\}, \\ P_{5n\nu} &= \frac{1}{c_1 \xi_0} \left\{ (\xi_0^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_1, \xi_0) Q_{1,1}^{1,0} + \xi_0 R_{0n}^{(1)}(c_1, \xi_0) \dot{Q}_{1,1}^{0,1} \right\}, \end{aligned}$$

$$P_{6nv} = (\xi_0^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(4)}(c_1, \xi_0) Q_{1,1}^{1,0} + \xi_0 R_{0n}^{(4)}(c_1, \xi_0) \dot{Q}_{1,1}^{0,1}, \quad (12)$$

$$P_{7nv} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ (\xi_0^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_2, \xi_0) Q_{1,2}^{1,0} + \xi_0 R_{0n}^{(1)}(c_2, \xi_0) \dot{Q}_{1,2}^{0,1} \right\},$$

$$P_{9nv} = \frac{1}{c_1 \xi_0} \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_1, \xi_0) Q_{1,1}^{0,1/2}, \quad P_{10nv} = \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(4)}(c_1, \xi_0) Q_{1,1}^{0,1/2},$$

$$P_{11nv} = \frac{d}{d\xi} R_{0n}^{(1)}(c_2, \xi_0) Q_{1,2}^{0,1/2}, \quad P_{12nv} = (\xi_0^2 - 1)^{-1/2} R_{1n}^{(4)}(c_1, \xi_0) L_{1,1}^{1,0},$$

$$P_{17nv} = (\xi_0^2 - 1)^{1/2} R_{1n}^{(4)}(c_1, \xi_0) \dot{L}_{1,1}^{1,1/2} + \xi_0 (\xi_0^2 - 1)^{1/2} \frac{d}{d\xi} R_{1n}^{(4)}(c_1, \xi_0) L_{1,1}^{0,1/2},$$

$$P_{14nv} = P_{5nv}, \quad P_{15nv} = P_{6nv}, \quad P_{16nv} = \varepsilon_0 P_{7nv},$$

$$P_{18nv} = \varepsilon_0 P_{8nv},$$

P_{4nv} — получается из P_{3nv} при формальной замене c_2 на c_0 , а P_{8nv} — из P_{7nv} при такой же замене. Здесь через $Q_{1,q}^{u,g}$, $L_{1,q}^{u,g}$ обозначены следующие интегралы:

$$Q_{1,q}^{u,g} = \int_{-1}^1 \eta^u (1 - \eta^2)^g S_{0v}^{(1)}(c_1, \eta) S_{0n}^{(1)}(c_q, \eta) d\eta, \quad (12a)$$

$$L_{1,q}^{u,g} = \int_{-1}^1 \eta^u (1 - \eta^2)^g S_{0v}^{(1)}(c_1, \eta) S_{1n}^{(1)}(c_q, \eta) d\eta,$$

где $u, q = 0, 1, 2, g = 0, 1/2, 1$.

Интегралы $Q_{1,q}^{u,g}$ и $L_{1,q}^{u,g}$ получаются из (12a) при формальной замене входящих под интегралы (12a) функций $S_{0v}^{(1)}(c_q, \eta)$ и $S_{1n}^{(1)}(c_q, \eta)$ своими производными по η .

Полученные в нашей задаче интегралы в виде (12a) встречались и в ранних работах [3, 5]. Все они определяются в конечной аналитической форме, однако мы их не привели из-за громоздкости. Их можно найти в упомянутых работах.

Из физики задачи ясно, что неизвестные коэффициенты в (11), начиная с некоторых значений n_0 и v_0 , с изменением $c_0 = k_0 F$ быстро стремятся к нулю. Это дает возможность оборвать ряды на этих значениях для численных расчетов. Известно, что примерно при $n \simeq n_0 = c_0$ ряды достаточно быстро сходятся [2].

В задачах рассматриваемого типа большой интерес представляет нахождение дифференциального поперечного сечения, в нашем случае существенно, в частности, как зависит последнее от анизотропии кристалла. С этой целью рассмотрим внешнее поле (9) в дальней зоне, когда $c_1 \xi \rightarrow \infty$. Известно, что при этом ([9], с. 36)

$$\frac{d}{d\xi} R_{mn}^{(4)}(c_1, \xi) \simeq \frac{1}{\xi} \exp \left[-i \left(c_1 \xi - \frac{m+n}{2} \pi \right) \right],$$

а

$$\lim_{c_1 \xi \rightarrow \infty} F \xi = r.$$

Тогда функции (6) в пределе имеют следующий вид:

$$x M_{0n}^{(4)} \simeq \left[-\hat{l}_\eta \sin \Phi + \hat{l}_\Phi \eta \cos \Phi \right] S_{0n}^{(1)}(\eta) \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(k_1 r - \frac{n\pi}{2} \right) \right],$$

$${}^z M_{1n}^{(4)} \simeq -\hat{l}_\Phi (1 - \eta^2)^{1/2} S_{1n}^{(1)}(\eta) \cos \Phi \frac{1}{r} \exp \left[-i \left(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \frac{n+1}{2} \pi \right) \right].$$

Поле (9) в рассматриваемом предельном случае представится в виде

$$\begin{aligned} {}^r H \simeq & \left\{ \hat{l}_\eta \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+2} f_n A_{0n}(c_1, \theta_1) S_{0n}^{(1)}(c_1, \eta) \sin \Phi \right] + \right. \\ & + \hat{l}_\Phi \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^n f_n A_{0n}(c_1, \theta_1) \eta S_{0n}^{(1)}(c_1, \eta) \cos \Phi + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+3} \beta_n (1 - \eta^2)^{1/2} S_{1n}^{(1)}(c_1, \eta) \cos \Phi \right] \right\} \frac{1}{r} \exp(-i \mathbf{k}_1 \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (13)$$

При соответствующем переходе (13) совпадает с аналогичными выражениями для поля, полученными в работах [3] и [5]. Отметим, что в работе [3], с. 473, получено дифференциальное сечение рассеяния в фиксированном направлении. В работе [5] рассматривается дифференциальное сечение рассеяния лишь для направления, обратного направлению падающей волны. В данной задаче не накладываются никакие ограничения на направление отраженной волны. Дифференциальное поперечное сечение получилось в следующем виде:

$$\sigma = 4\pi b^2 ({}^s T)^2, \quad (14)$$

где ${}^s T$ — амплитуда поля (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма.— М.— Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Хенл А., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.— М.: Мир, 1964.
3. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитной волны на двух телах.— Минск: Наука и техника, 1968.
4. Фламмер К. Таблицы волновых сфероидальных функций.— М.: ВЦ АН СССР, 1962.
5. Siegel K. M., Schultz F. M., Gere V. H., Sleator E. V.—Trans. IRE, 1956, AP-4, p. 266.
6. Хижняк А. Труды ХГУ, 1957, 2, с. 93.
7. Senior T. V. A.—Canadian J. Phys., 1966, b, 44, p. 1353.
8. Оганесян С. С., Барегамян В. А.—Изв. АН АрмССР. Сер. физика, 1981, 16, вып. 1, с. 37.
9. Комаров Н. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.— М.: Наука, 1976.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред — М.: Гостехиздат, 1957.
11. Бененсон Л. С., Зайцев Ю. А.—Радиотехника и электроника, 1971, 1, с. 259.
12. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах.— М.: Физматгиз, 1960.

Ереванский институт народного хозяйства

Поступила в редакцию
20 июля 1981 г.,
после доработки
22 февраля 1982 г.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE BY ANISOTROPIC SPHEROID

S. S. Oganessian

A problem is considered on scattering of a plane electromagnetic wave by anisotropic elongated spheroid. The problem is solved by the method of vector harmonic plotting. The transverse section of scattering is obtained as a function of the anisotropy coefficient.