В области кинетических ветвей колебаний с $\omega \ll \Omega_e$ необходимо рассмотреть возможность неустойчивости ионно-циклотронных волн, частоты которых определяются дисперсионным уравнением [2]

$$\operatorname{Re} \varepsilon = 1 + \sum_{\alpha} \frac{1}{k^2 r_\alpha^2} \left[1 - \sum_{n} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha} e^{-z_\alpha} I_n(z_\alpha) J_+(\beta_{n\alpha}) \right], \tag{3}$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $J_+(\beta_{n\alpha}) = J_+[(\omega - n\Omega_\alpha)/k_\parallel v_\alpha]$ — функция Крампа, v_α — тепловая скорость частиц. При $\omega \ll \Omega_e$, $z_i \gg 1$, $\beta_{ne} \gg 1$ из (3) получим

$$\operatorname{Re} \varepsilon = 1 + \frac{1 - e^{-z_e} I_0(z_e)}{k^2 r_e^2} + \frac{1}{k^2 r_i^2} \left[1 - \frac{\omega}{k_\parallel v_i \sqrt{2\pi z_i}} \sum_n \frac{J_+(\beta_{ni})}{\beta_{ni}} \right] = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим фиксированную циклотронную гармонику $\omega = n\Omega_i + \delta_n$, $\delta_n \ll n\Omega_i$, и предположим, что $\beta_{ni} = (\omega - n\Omega_i)/k_\parallel v_i \gg 1$. При этом вклад в (4) дает только фиксированный номер n и

$$1 + \frac{1 - e^{-z_e} I_0(z_e)}{k^2 r_e^2} + \frac{1}{k^2 r_i^2} \left[1 - \frac{n\Omega_i}{\sqrt{2\pi z_i}\, \delta_n} \right] = 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что с точностью до множителя порядка единицы $\delta_n = n\Omega_i/\sqrt{2\pi z_i} \ll n\Omega_i$. Условие $\beta_{ni} \gg 1$ представляется в виде $n\Omega_i/k_\parallel v_i \sqrt{2\pi z_i} \gg 1$ или $(\sqrt{2\pi})^{-1} n\Omega_i/k_\parallel \times v_i k_\perp \rho_i \gg 1$. Поскольку $n\Omega_i/k_\parallel = \omega/k_\parallel = v_i$ — величина порядка 10^8 *см/с*, а $k_\perp$ — величина порядка 1 $см^{-1}$, то исходное предположение ($\beta_{ni} \gg 1$) выполняется. Таким образом, $\partial \operatorname{Re} \varepsilon/\partial \omega \big|_{\omega = n\Omega_i} = \sqrt{2\pi}\, k_\perp \rho_i / n\Omega_i k^2 r_i^2$ и

$$\frac{\gamma_n}{\omega} = -\frac{8\pi^3 e^2 n\Omega_i r_i^2}{\sqrt{2\pi} m_e k_\parallel k_\perp \rho_i} \int_0^\infty dE \frac{\partial f_e}{\partial E'} \bigg|_{E' = E + E_0^*} J_0^2 \left[(k_\perp/\Omega_e) \sqrt{2E/m_e} \right]. \tag{6}$$

Величину γ/ω можно оценить, используя теоретические расчеты [3] или экспериментальные измерения [4] функции распределения фотоэлектронов. Оценивая интеграл в (6) по максимуму, нетрудно обнаружить, что даже в самых оптимальных условиях величина γ/ω не превышает 10^{-9} (независимо от знака γ). Таким образом, даже, если и имеет место неустойчивость ионно-циклотронных колебаний на фотоэлектронах, инкремент ее ничтожно мал (меньше 10^{-6} c^{-1}). Более того, столкновительный декремент затухания (оценки которого весьма затруднительны [5]) наверняка подавляет столь слабую неустойчивость.

В результате в совокупности с результатами работы [1] можно сделать вывод о том, что немонотонность функции распределения фотоэлектронов не приводит к неустойчивости каких-либо типов собственных колебаний ионосферной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. Б., Трухан А. А., Хазанов Г. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 2, с. 143.
2. Александров А. Ф., Богданкевич А. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. — М.: Высшая школа, 1978.
3. Хазанов Г. В. Кинетика электронной компоненты плазмы верхней атмосферы — М.: Наука, 1979.
4. J. S. Lee et al. — Geophys. Res. Let., 1980, 5, № 7, p. 531.
5. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. — М.: Наука, 1975.

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию 11 января 1982 г.

УДК 538.574.4+538.56 : 519.25

О ПОРОГЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЗЕРКАЛА

В. Г. Лапин

Известно, что наличие флуктуаций показателя преломления среды сильно влияет на процессы параметрического взаимодействия волн [1] и, в частности, повышает их порог [2]. Наличие зеркала в стохастической среде меняет характеристики взаимодействия [3]. Ниже показано, что установка зеркала снижает порог распадного взаимодействия волн в диссипирующей среде с флуктуациями.

Пусть волна накачки с частотой $\omega_н$ (и с заданной большой амплитудой) распадается на две волны с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_н=\omega_1+\omega_2$) в слое $x \in [0, L]$ нелинейной среды с крупномасштабными неоднородностями. Предположим, что волны падают на слой справа, а слева, при $x=0$, имеется зеркало. Тогда, действуя аналогично работе [3], для чисел квантов прямых $N_j(x)$ и отраженных $n_j(x)$ ($j=1,2$) волн получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&N_1' - 2\alpha_1 N_1 = \gamma P, \qquad N_1|_{x=L} = N_0,\\
&N_2' - 2\alpha_2 N_2 = \gamma P, \qquad N_2|_{x=L} = 0,\\
&P' - (\alpha_1+\alpha_2) P + \Delta k(x) Q = 2\gamma (N_1+N_2), \quad P|_{x=L} = 0,\\
&Q' - (\alpha_1+\alpha_2) Q - \Delta k(x) P = 0, \qquad Q|_{x=L} = 0,\\
&n_1' + 2\alpha_1 n_1 = -\gamma p, \qquad n_1(0) = N_1(0),\\
&n_2' + 2\alpha_2 n_2 = -\gamma p, \qquad n_2(0) = N_2(0),\\
&p' + (\alpha_1+\alpha_2) p - \Delta k(x) q = -2\gamma (n_1+n_2), \quad p(0) = P(0),\\
&q' + (\alpha_1+\alpha_2) q + \Delta k(x) p = 0, \quad q(0) = Q(0),\\
&N_н = n_н = \mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\Delta k(x)=k_1(x)+k_2(x)-k_н(x)$ — флуктуирующее фазовое рассогласование (k_j — волновое число), α_1, α_2 — коэффициенты затухания по амплитуде, $\gamma = \sqrt{\beta_1\beta_2\beta_3 N_н} \equiv \sqrt{\beta_1\beta_2 I_н}$ (β_j — коэффициенты нелинейного взаимодействия, интенсивность накачки $I_н = \mathrm{const}$).

Первые четыре уравнения системы (1) описывают волны, бегущие к зеркалу Для них получается задача Коши, решение которой исследовано в [2] Для отраженных волн имеем систему со стохастическими краевыми условиями при $x=0$. В этих условиях содержится информация о прохождении волной слоя в направлении к зеркалу, поэтому задача (1) в целом не является причинной. Для того чтобы можно было применить аппарат диффузионного случайного процесса [4], систему (1) при помощи общего метода инвариантного погружения [4, 5] (или действуя согласно [6]) можно переформулировать как задачу Коши. Усредняя полученные уравнения по ансамблю реализаций нормального случайного процесса $\Delta k(x)$:

$$
\langle \Delta k(x) \rangle = 0, \quad \langle \Delta k(x)\, \Delta k(x') \rangle = 2D\delta(x-x'), \tag{2}
$$

$D = \langle (\Delta k)^2 \rangle l$, l — масштаб неоднородностей, получим для определения величины $a(x)$ ($\langle n_1(L) \rangle \equiv e^{-2\alpha_+ L} N_0 a(L)/2$) следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&a' = -2\alpha_- a + 2\gamma f_1, \qquad a(0) = 2,\\
&f_1' = -(\alpha_- + D) f_1 + 2\gamma f_2 + 4\gamma f_3, \quad f_1(0) = 0,\\
&f_2' = 2\alpha_- f_2 - 2\alpha_- a + 2\gamma f_1 - 2\gamma f_5, \quad f_2(0) = 0,\\
&f_3' = -\alpha_- f_2 - 2D f_4 + 4\gamma f_5, \quad f_3(0) = 0,\\
&f_4' = -4D f_4 + 2\gamma f_5, \quad f_4(0) = 2,\\
&f_5' = -(D-\alpha_-) f_5 - \alpha_1 f_1 + 4\gamma f_3, \quad f_5(0) = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь $\alpha_\pm = \alpha_1 \pm \alpha_2$, а $f_i(x)$ — некоторые вспомогательные величины.

Задача сильно упрощается в случае $\alpha_1=\alpha_2$ ($\alpha_- = 0$). При этом для определения $a(L)$ имеем такую же систему, как и без поглощения. Заметим, что в результате применения метода инвариантного погружения мы получили линейные уравнения (3) для моментов. Это обусловлено видом системы (1), которую в понятных обозначениях можно переписать так:

$$
(d/dx)\, Y_i(x; L, v) = B_{ij}(x)\, Y_j, \quad Y_i(x; L, v)_{x=L} = v_i,
$$

$$
(d/dx)\, y_i(x; L, v) = -B_{ij}(x)\, y_j, \quad y_i(0, L, v) = Y_i(0, L, v),
$$

где индексы меняются от 1 до 4. Поэтому, переходя к независимой переменной L, будем иметь [4, 5]

$$\frac{d}{dL}\begin{Bmatrix} Y_i(x;\ L,\ v) \\ y_i(x;\ L,\ v) \end{Bmatrix} = -B_{kj}(L)\, v_j \frac{\partial}{\partial v_k}\begin{Bmatrix} Y_i \\ y_j \end{Bmatrix},$$

т. е. линейность уравнений сохраняется.

Отметим также, что замена x на $-x$ в исходных уравнениях для y_i приводит к их совпадению с уравнениями для Y_i. Этот факт и краевое условие $y_i\,(0,\ L,\ v) = Y_i\ (0;\ L,\ v)$ означают, что рассматриваемая задача эквивалентна рассмотрению только волн Y_i в слое $x \in (-L,\ L)$ статистически неоднородной среды с корреляционной функцией

$$\langle \Delta k\,(x)\,\Delta k\,(x')\,\rangle = 2D\delta\,(\,|\,x\,| - |\,x'\,|\,).$$

При этом для положительных x $y_i(x) = Y_i\ (-x)$.

Пороговое условие для параметрического процесса получится, если максимальный корень характеристического уравнения системы (3) приравнять к $2\alpha_+$:

$$\beta_1\beta_2 I^{\text{п}}_{\text{зерк}} = [8\,(3\mu+2)]^{-1}\left\{\alpha_+^2\,(\mu+2)\,[8\mu+5-\sqrt{1-F}\,(4\mu+3)] - \alpha_-^2(4+7\mu+4\mu^2)\right\}, \tag{4}$$

$$F = \mu\,\frac{\alpha_-^2}{\alpha_+^2}\,\frac{2\,(8\mu^3+16\mu^2-5\mu+46)+\mu\,(4\mu+3)\,(4\mu+11)}{(\mu+2)^2\,(4\mu+3)^2},$$

где $\mu = D/\alpha_+$. При $I_{\text{н}} > I^{\text{п}}_{\text{зерк}}$ на выходе из достаточно толстого слоя будем наблюдать сигналы на частотах ω_1 и ω_2.

Для однородной среды ($\mu = 0$) из (4) получим

$$I^{\text{п}}_{\text{одн}} = \alpha_1\alpha_2/\beta_1\beta_2$$

Если $\alpha_1 = \alpha_2$ ($\alpha_- = 0$), то для пороговой интенсивности накачки будем иметь

$$I^{\text{п}}_{\text{зерк}} = I^{\text{п}}_{\text{одн}}\ \ [1+2\mu\,(1+\mu)\,(2+3\mu)^{-1}] = I^{\text{п}}_{\text{неодн}} - I^{\text{п}}_{\text{одн}}\,\mu^2(2+3\mu)^{-1} \tag{5}$$

$\left(I^{\text{п}}_{\text{неодн}}\right.$ определена в [2]: $\left.I^{\text{п}}_{\text{неодн}} = I^{\text{п}}_{\text{одн}}\,(1+\mu)\right)$. Из (5) видно, что наличие зеркала в среде с флуктуациями уменьшает порог параметрического процесса, но этот порог остается больше, чем в однородной среде. Значит, установка зеркала в стохастической среде может сделать параметрический процесс надпороговым.

Пусть интенсивность накачки $I_{\text{н}}$ удовлетворяет условию

$$I^{\text{п}}_{\text{зерк}} < I_{\text{н}} < I^{\text{п}}_{\text{неодн}}\,. \tag{6}$$

Такое условие в силу (5) может выполняться. В этом случае при отсутствии зеркала процесс является подпороговым и сигналы на частотах ω_1, ω_2 экспоненциально малы. Если же поставить зеркало, то порог понижается и на выходе из среды появятся сигналы ω_1 и ω_2. Причем, если среда достаточно протяженная, то сигналы на выходе будут большими.

Автор благодарен В В. Тамойкину за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — Физика плазмы, 1980, 6, № 3, с. 531.
2. Лапин В. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 9, с. 1054.
3. Лапин В. Г., Тамойкин В В. Тезисы докладов XIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. — М: Наука, 1981, 2, с. 126
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980
5. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. — М: Мир, 1976.
6. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 10, с. 1163.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 января 1982 г.