

УДК 538 574 33

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЭФФИЦИЕНТЕ
ОТРАЖЕНИЯ ОТ СЛОЯ ОДНОМЕРНОЙ
СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ**

В. Л. Бреховских

Рассмотрена задача об отражении плоской волны от поглощающей одномерной случайной среды, флуктуации диэлектрической проницаемости которой представлены в виде телеграфного случайного процесса. Предложена простая формула для плотности распределения вероятностей коэффициента отражения как функций толщины слоя, справедливая в широком диапазоне значений параметров.

Рассматривается задача об отражении плоской волны, падающей нормально из области $x > L$ на слой случайно-неоднородной среды, расположенный в области $0 \leq x \leq L$. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon(x)$ имеет вид

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon_0 & \text{при } x < 0 \\ \bar{\epsilon} + \tilde{\epsilon}(x) & \text{при } 0 \leq x \leq L \\ \epsilon_L & \text{при } x > L \end{cases} .$$

Здесь ϵ_0 , ϵ_L и $\bar{\epsilon} = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ ($\epsilon_2 \ll \epsilon_1$) — постоянные величины, а $\tilde{\epsilon}(x)$ — случайная функция телеграфного типа, так что

$$\langle \tilde{\epsilon}(x) \rangle = 0, \quad \frac{\langle \tilde{\epsilon}(x) \tilde{\epsilon}(x') \rangle}{|\bar{\epsilon}|^2} = \sigma_\epsilon^2 \exp\left(-\frac{|x-x'|}{l}\right), \quad (1)$$

где угловые скобки означают усреднение.

Один из методов решения этой и подобных ей задач основывается на выводе уравнений для плотности распределения вероятностей коэффициента отражения R_L (см. [1]). При этом используется вспомогательная функция $R(L)$, связанная с R_L выражением

$$R_L = \frac{r_L + R(L)}{1 + r_L R(L)}, \quad r_L = \frac{\sqrt{\epsilon_L} - \sqrt{\bar{\epsilon}}}{\sqrt{\bar{\epsilon}} + \sqrt{\epsilon_L}}. \quad (2)$$

Положим $\epsilon_L = \bar{\epsilon}$, т. е. $R_L = R(L)$ (переход к общему случаю произвести несложно; как при этом изменится результат, будет указано ниже). Функция $R(L)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка с начальным условием в точке $L = 0$. Это делает возможным вывод уравнения для плотности распределения вероятностей

$$P_L(Q, \varphi) = \langle \delta(Q - Q(L)) \delta(\varphi - \varphi(L)) \rangle,$$

где $Q(L)$ и $\varphi(L)$ — модуль и фаза величины $R(L)$:

$$R(L) = Q(L) \exp(i\varphi(L)).$$

В частности, можно записать уравнение Эйнштейна—Фоккера для функции $P_L(Q, \varphi)$. Хотя в данном случае $\tilde{\varepsilon}(x)$ — не δ -коррелированная функция и уравнение Эйнштейна—Фоккера (УЭФ) не является точным уравнением для плотности распределения вероятностей, использование этого уравнения дает возможность получить полезные результаты. (О выводе УЭФ из динамических уравнений для случайных величин см. [1], гл. 3.)

Пусть волновое число в среде $k = (\omega/c) \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \kappa + i\gamma$, причем $\gamma \ll \kappa$. Будем рассматривать проинтегрированную по фазе плотность распределения вероятностей $P_L(Q) = \langle \delta(Q - Q(L)) \rangle$. Введем новую переменную $u = (1 + Q^2)/(1 - Q^2)$, так что $Q = \sqrt{(u - 1)/(u + 1)}$, $1 \leq u < \infty$. Уравнение Эйнштейна—Фоккера, усредненное по периоду быстрых осцилляций (порядка κ^{-1}), имеет вид

$$\frac{\partial P_L(u)}{\partial L} = 2\gamma \frac{\partial}{\partial u} [(u^2 - 1) P_L(u)] + D \frac{\partial}{\partial u} \left[(u^2 - 1) \frac{\partial P_L(u)}{\partial u} \right], \quad (3)$$

где коэффициент диффузии $D = 0,5\sigma_\varepsilon^2 \kappa^2 l / (1 + 4\kappa^2 l^2)$. При этом плотность распределения вероятностей удовлетворяет условию нормировки

$$\int_1^\infty P_L(u) du = 1.$$

Уравнение вида (3) было получено, например, в работе [2]. В общем случае уравнение (3) решить не удастся. В [3] рассматривалось стационарное решение уравнения Эйнштейна—Фоккера при $L \rightarrow \infty$. Как видно из (3), для переменной u это решение имеет вид

$$P_\infty(u) = \beta \exp[-\beta(u - 1)], \quad \beta = 2\gamma/D. \quad (4)$$

В работе [4] было получено точное уравнение, описывающее распределение вероятностей коэффициента отражения для рассматриваемой задачи; оно является уравнением интегродифференциального типа. В этой же работе показано, что при выполнении условий $\gamma \ll \kappa$, $\gamma l \ll 1$, $\sigma_\varepsilon^2 \ll \sqrt{1 + (4\kappa^2 l^2)^{-1}}$ распределение вероятностей при $L \rightarrow \infty$ совпадает с решением УЭФ. При выполнении указанных условий стационарная плотность вероятностей равномерно распределена по фазе. Таким образом, уравнение Эйнштейна—Фоккера можно использовать для решения данной задачи, по крайней мере при большой толщине слоя. Целью данной работы является исследование зависимости плотности вероятностей и $\langle |R_L|^2 \rangle$ от толщины слоя L .

Производя в (3) замену переменной $x = Q^2 = (u - 1)/(u + 1)$, перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = -2\beta x \frac{\partial V}{\partial x} + (1 - x)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (5)$$

где $\tau = DL$, $V(x, \tau) = P_L(x)/P_\infty(x)$, так что при $L \rightarrow \infty$ $V(x, \tau) \equiv 1$. Считая, что значение функции $V(x, \tau)$ близко к стационарному, представим ее в виде разложения в ряд Тейлора:

$$V(x, \tau) = V_0(\tau) + V_1(\tau)x + V_2(\tau)x^2 + \dots$$

Полагая $V_k(\tau) = V_k \exp(\lambda\tau)$, получим систему уравнений

$$\lambda V_k = -k(2\beta + 2k)V_k + (k - 1)^2 V_{k-1} + (k + 1)^2 V_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Ограничивая число уравнений ($k_{\max} = n$), из условия равенства нулю определителя системы находим n собственных значений λ_k (не считая $\lambda_0 = 0$) и затем коэффициенты V_k . В частности, при $n = 1$ будем иметь

$$\lambda = -(2\beta + 2), \quad V_1(\tau) = C_1 \exp(\lambda\tau), \quad V_0(\tau) = C_0 + (C_1/\lambda) \exp(\lambda\tau). \quad (7)$$

Функция $V(u, \tau)$ будет иметь следующий вид:

$$V(u, \tau) = C_0 + C_1 \exp[-(2\beta + 2)\tau] [(u - 1)(u + 1)^{-1} - (2\beta + 2)^{-1}]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в условие нормировки и учитывая, что

$$\int_{-1}^1 (u - 1)(u + 1)^{-1} P_{\infty}(u) du = \langle |R_{\infty}^2| \rangle = 1 + 2\beta \exp(2\beta) \text{Ei}(-2\beta), \quad (9)$$

получим

$$C_0 = 1 + C_1 \exp[-(2\beta + 2)\tau] [\langle |R_{\infty}^2| \rangle - (2\beta + 2)^{-1}]. \quad (10)$$

Это соотношение может выполняться при

$$\langle |R_{\infty}^2| \rangle \approx (2\beta + 2)^{-1} \quad \text{или} \quad (2\beta + 2)\tau \gg 1. \quad (11)$$

С учетом (10) плотность распределения вероятностей имеет вид

$$P(u, \tau) = \beta \exp[-\beta(u - 1)] [1 + C_1((u - 1)(u + 1)^{-1} - \langle |R_{\infty}^2| \rangle) \times \exp(-(2\beta + 2)\tau)]. \quad (12)$$

Если потребовать выполнения начального условия

$$\langle |R_{\tau=0}^2| \rangle = |R_0^2|,$$

то для постоянной C_1 получим выражение

$$C_1 = (|R_0^2| - \langle |R_{\infty}^2| \rangle) [2\beta \langle |R_{\infty}^2| \rangle - (1 - \langle |R_{\infty}^2| \rangle)^2]^{-1}. \quad (13)$$

Такой выбор постоянной C_1 можно осуществлять, если выполняется первое из условий (11), т. е. можно считать формулу (10) верной при любых τ . Тогда для коэффициента отражения имеет место формула

$$\langle |R_L^2| \rangle = \exp[-(2\beta + 2)DL] [|R_0^2| - \langle |R_{\infty}^2| \rangle] + \langle |R_{\infty}^2| \rangle. \quad (14)$$

Идентичное соотношение получено в [5] при помощи другого метода, не включающего вычисление плотности распределения вероятностей.

В общем случае $\varepsilon_L \neq \bar{\varepsilon}$ при вычислении коэффициента отражения следует вместо функции $|R^2| = (u - 1)(u + 1)^{-1}$ использовать величину (см. (2))

$$\begin{aligned} |R^2| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{r_L + V\sqrt{(u-1)(u+1)^{-1}} \exp(i\varphi)}{1 + r_L \sqrt{(u-1)(u+1)^{-1}} \exp(i\varphi)} \right|^2 d\varphi = \\ &= |r_L^2| + (1 - |r_L^2|) \frac{u - 1}{u + (1 + |r_L^2|)(1 - |r_L^2|)^{-1}}. \end{aligned}$$

Общий вид формулы (14) не изменится, но вместо выражения (9) для $\langle |R_{\infty}^2| \rangle$ будем иметь

$$\langle |R_{\infty}^2| \rangle = 1 + 2\beta \exp\left(\frac{2\beta}{1 - |r_L^2|}\right) \text{Ei}\left(-\frac{2\beta}{1 - |r_L^2|}\right).$$

Соответственные изменения надо будет произвести и в соотношениях (12), (13).

Для оценки пределов применимости полученного результата можно вычислить решение системы уравнений (6) в следующем приближении, т. е. положив $k_{\max} = 2$. Тогда будем иметь два собственных значения $\lambda_{1,2} = -(3\beta + 5) \pm \sqrt{(\beta + 3)^2 + 4}$. При выполнении условия

$$\sqrt{(\beta + 3)^2 + 4} - (\beta + 3) \ll 2\beta + 2 \quad (15)$$

значение λ_1 близко к $\lambda = -(2\beta + 2)$, а λ_2 описывает быстро затухающие слагаемые. При этом окончательное решение для $\langle |R_L^2| \rangle$ мало изменится по сравнению с (14). Условие (15) хорошо выполняется при любых β . В качестве ограничения на значения β следует рассматривать первое из условий (11), которое можно считать верным при $\beta \geq 1$.

В работе [6] путем численного решения уравнений переноса рассчитывалась яркостная температура теплового излучения одномерной случайно-неоднородной среды с функцией корреляции неоднородностей вида (1). Яркостная температура связана с коэффициентом отражения следующим образом:

$$T_{\text{я}} = T(1 - \langle |R_L^2| \rangle),$$

где T — термодинамическая температура среды. На рис. 1 сплошной линией показана рассчитанная в работе [6] зависимость $T_{\text{я}}$ от толщины слоя L при $T = 240^\circ$, $\epsilon_1 = 1,8$, $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\sigma_2^2 = 4 \cdot 10^{-3}$, $l = 0,2$ см, частота $f = 10$ ГГц. Это соответствует значению $\beta = 1$. При $\beta = 1$ уравнения переноса, по-видимому, дают значения коэффициента отражения, близкие к истинным. По крайней мере, это верно при $L \rightarrow \infty$ (этот вопрос рассматривался в работе [7]). Пунктирной линией обозначена кривая, рассчитанная для тех же параметров по формуле (14). Хорошее совпадение обеих кривых подтверждает вывод о применимости предлагаемого метода в данном случае. На рис. 2 показаны результаты аналогичного сравнения для зависимости $T_{\text{я}}$ от частоты f при толщине слоя 510 см.

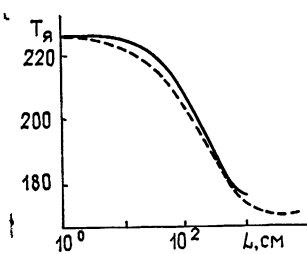


Рис. 1.

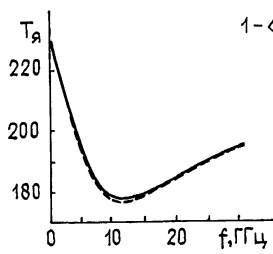


Рис. 2.

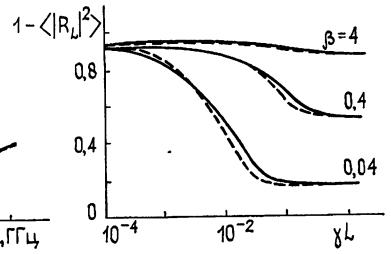


Рис. 3.

В работе [8] рассматриваемая задача также решалась численными методами, причем, в качестве исходных были взяты точные уравнения для плотности распределения вероятностей, выведенные в [4]. На рис. 3 приведены рассчитанные в [8] графики зависимости величины $1 - \langle |R_L^2| \rangle$ от γL при трех значениях β , $\epsilon_1 = 1,8$ (сплошные линии), и соответствующие кривые, рассчитанные по формуле (14) (пунктирные линии). Из

этого сравнения можно сделать вывод о том, что, по-видимому, выражение (14) можно использовать и в случае $\beta < 1$.

Применительно к задаче о тепловом излучении формула (14) позволяет оценить величину $L_{\text{эфф}} \sim \lambda^{-1}$, т. е. толщину излучающего слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М: Наука, 1980
2. Абрамович Б. С., Рыжов Ю. А. Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ростов-на-Дону, 1977, т. 1, с. 311.
3. Абрамович Б. С., Дятлов А. И.—Изв. вузов—Радиофизика, 1975, 18, № 8, с. 1222
4. Кляцкин В. И., Татарский В. И.—Изв. вузов—Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040
5. Рыжов Ю. А. Диссертация, г. Горький, 1980.
6. Tsang L., Kong J. A.—Radio Sci., 1977, 12, № 2, p. 185
7. Бреховских В. Л.—Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1978, 14, № 9, с. 997.
8. Бреховских В. Л.—Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1982, 18, № 2, с. 153

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
2 декабря 1981 г.

APPROXIMATE SOLUTION OF A PROBLEM ON THE COEFFICIENT OF REFLECTION FROM THE LAYER OF AN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

V. L. Brekhovskikh

A problem is considered on a plane wave reflection from absorbing one-dimensional random medium with of the dielectric permittivity fluctuations being presented in the form of a telegraph random process. A simple formula is suggested for the density of the probability distribution of the reflection coefficient as a function of the layer depth which is valid in the wide range of the parameter values.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXII, № 2, 1982 г.

(Продолжение)

Г. Ф. Ременец, М. И. Белоглазов. О динамике нижней ионосферы во время авроральных возмущений по СДВ-данным.

По трехчастотным относительным вариациям СДВ-сигналов (10—16 кГц), зарегистрированным в средней зоне источника, определены коэффициенты отражения первых двух ионосферных лучей от «спокойной» авроральной ионосферы и во время нескольких авроральных возмущений.

Г. Ф. Деминова, М. Г. Деминов, Л. М. Ерухимов, О. Н. Савина, Л. А. Юдович. Об уединенной внутренней гравитационной волне в области F ионосферы.

Показана возможность описания распространения в верхней атмосфере уединенной ВГВ-волны в приближении слабой нелинейности. Это позволяет, определяя на опыте одну из характеристик возмущения, получить сведения о всей совокупности параметров уединенной ВГВ и ее плазменного следа. Подобного типа солитоны могут наблюдаться в суббурях с энерговыведением в авроральной зоне $P \geq 10^{18}$ эрг/с.

(Продолжение см. с. 1059)