ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 9 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538.56 : 519.25

# ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В СЛОИСТЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*Б. М. Шевцов*

На основе нелинейного уравнения для коэффициента отражения рассмотрено обратное рассеяние при падении волнового пакета на полупространство слоистой случайно-неоднородной среды. В общем виде получены выражения для средней интенсивности рассеянного назад поля, которые на примере падающего гауссова волнового пакета сравниваются с результатами теории переноса излучения, а также с различными видами теории возмущений. Изучается поведение высших моментов интенсивности обратно рассеянного поля.

В связи с возросшим интересом к зондированию неоднородных сред в последнее время большое внимание уделяется обратному рассеянию (ОР). В ряде работ сделано предположение (см., например, [1]), что в ОР существенным образом может проявиться несоответствие между точной теорией и различными приближенными методами (уравнение переноса излучения (УПИ), разные виды теории возмущений (ТВ)). Для нахождения существующих несовпадений необходимо располагать точными решениями, которые можно получить в случае слоистых случайно-неоднородных сред.

Для плоской волны, падающей на слоистое случайно-неоднородное полупространство, сравнивались среднее значение модуля коэффициента отражения и коэффициент отражения, полученный на основе УПИ [2]. Различие оказалось незначительное, а в отсутствие поглощения в обеих теориях получалась единица.

Более общий случай падения плоского (одномерного) импульса на слоистое полупространство без поглощения рассматривался в работе [3], где, однако, сравнение с приближенными методами не проводилось, хотя уже в этой задаче можно обнаружить существенно различный характер затухания средней интенсивности в точных и приближенных решениях. Этот пример будет подробно рассмотрен ниже.

Еще более общий случай, а именно падение нестационарного волнового пучка (волнового пакета) на слоистое случайно-неоднородное полупространство, рассмотрен в работах [4, 5]. Анализ результатов в этих работах дан в рамках теории возмущений (роль которой рассматривается ниже), поскольку использовались различные приближения для цепной дроби, через которую выражается корреляционная функция коэффициента отражения. Ниже будет получено интегральное представление для корреляционной функции коэффициента отражения, с помощью которого удается асимптотически исследовать все возможные случаи данной задачи и провести сравнение с приближенными методами. Кроме того, удается построить решение для высших моментов коэффициента отражения.

## 1. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ (ТОЧНЫЙ МЕТОД)

Рассмотрим задачу о падении волнового пакета на слой стационарной слоистой случайно-неоднородной среды. Поле ОР в плоскости раздела сред представимо в виде

$$U_L(\rho, t) = \int d^2p\,d\varkappa R_L(p, \varkappa) U^0(p, \varkappa) e^{ip\rho - i\varkappa ct}, \tag{1}$$

где $U^0(p, \varkappa)$ — спектр падающего волнового пакета (рассматривается нормальное падение относительно слоя среды вдоль оси $z$), $c$ — скорость распространения волны, $\rho$ и $t$ — координаты наблюдения ($t$ — время, а вектор $\rho$ находится в плоскости раздела сред со стороны падения волнового пакета при $z = 0$), $L$ — толщина слоя, а $R_L(p, \varkappa)$ — коэффициент отражения отдельной составляющей волнового пакета (плоской волны), для которого имеется замкнутое нелинейное уравнение [2, 6].

Используя это уравнение, можно написать уравнение для величины $\langle R_L^n R_L^{*m} \rangle$, где операция «$*$» — комплексное сопряжение и замена переменных $p, \varkappa \leftrightarrow p', \varkappa'$. Уравнение выглядит следующим образом:

$$(\partial/\partial L) \langle R_L^n R_L^{*m} \rangle = 2i(n\sigma - m\sigma^*) \langle R_L^n R_L^{*m} \rangle + \\ + n \langle I_L R_L^{n-1} R_L^{*m} \rangle + m \langle I_L^* R_L^{*m-1} R_L^n \rangle \quad (m, n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

где

$$I_L = (ik^2/2\sigma)\,\varepsilon(L)(1 + R_L)^2, \quad \sigma = \sqrt{k^2 - p^2},$$

$k = \varkappa + i\gamma$, $\gamma$ — коэффициент поглощения, $\varepsilon(L)$ — характеристика среды (например, отклонение диэлектрической проницаемости от единицы). В качестве модели среды зададим функцию $\varepsilon(L)$ гауссовым процессом с параметрами $\langle \varepsilon \rangle = 0$, $\langle \varepsilon^2 \rangle \ll 1$,

$$\langle \varepsilon(L) \varepsilon(L') \rangle = B(|L - L'|).$$

Для волновых пакетов выполняются условия

$$|p| \ll \varkappa_0, \quad |\varkappa - \varkappa_0| \ll \varkappa_0, \tag{3}$$

где $\varkappa_0$ — модуль несущего волнового вектора. Используя их, можно заметить, что в уравнении (2) коэффициент при первом члене справа мал, если $m = n$, т. е. моменты $\langle R_L^n R_L^{*n} \rangle$ являются медленно меняющимися функциями от $L$ по сравнению с моментами $\langle R_L^n R_L^{*m} \rangle$ $(n \neq m)$. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем введем операцию усреднения по периоду быстрых осцилляций, чтобы исключить из рассмотрения быстроменяющиеся моменты.

Средняя интенсивность (или функция когерентности первого порядка) выражается через величину $\langle R_L^n R_L^{*n} \rangle$ при $n = 1$. Уравнением для $\langle R_L^n R_L^{*n} \rangle$ будет уравнение (2) при $n = m$, два последних члена которого (при $n = m$) можно представить в виде

$$\langle I_L R_L^{n-1} R_L^{*n} \rangle = \frac{ik^2}{2\sigma} \int_0^L d\zeta B(L - \zeta) \left\langle \frac{\delta}{\delta\varepsilon(\zeta)} (1 + R_L)^2 R_L^{n-1} R_L^{*n} \right\rangle. \tag{4}$$

Второй член получается из выражения (4) при помощи операции эрмитова сопряжения. Вариационные производные, возникающие в (4), найдем из решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial L} \frac{\delta R_L}{\delta\varepsilon(\zeta)} = 2i\sigma \frac{\delta R_L}{\delta\varepsilon(\zeta)} + \frac{ik^2}{\sigma} \varepsilon(L)(1 + R_L) \frac{\delta R_L}{\delta\varepsilon(\zeta)} \text{ при } L > \zeta \tag{5}$$

с начальным условием при $L=\zeta$

$$\delta R_\zeta/\delta\varepsilon(\zeta)=ik^2/2\sigma(1+R_\zeta)^2. \tag{5a}$$

Уравнение (5) получается варьированием исходного нелинейного уравнения для коэффициента отражения (см. [2]).

В самом простом случае, когда $\varepsilon(L)$ есть $\delta$-коррелированный процесс (диффузионное приближение), уравнение (5) не требуется, достаточно только начального условия (5а). Подставляя (5а) в выражение (4) и усредняя его по периоду быстрых осцилляций, исключаем из рассмотрения моменты $\langle R_L^n R_L^{*m}\rangle$ $(n\neq m)$, что приводит к незамкнутому дифференциальному уравнению для величины $\langle R_L^n R_L^{*n}\rangle$. В это уравнение войдут моменты $\langle R_L^{n-1} R_L^{*n-1}\rangle$ и $\langle R_L^{n+1} R_L^{*n+1}\rangle$. Согласно условиям (3), можно положить $k\simeq\varkappa_0$, $\sigma\simeq\varkappa_0$, $\sigma-\sigma^*\simeq 2i\gamma+\varkappa-\varkappa'+p'^2/2\varkappa_0-p^2/2\varkappa_0$, при этом коэффициенты полученного уравнения существенно упростятся. Тогда для стационарного значения момента $\langle R^nR^{*n}\rangle$ $(L\to\infty)$ получаем рекуррентное соотношение

$$(1+\beta/n)\langle R^nR^{*n}\rangle-0{,}5\,\langle R^{n-1}R^{*n-1}\rangle-0{,}5\,\langle R^{n+1}R^{*n+1}\rangle=0 \tag{6}$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$\beta=2\gamma/D_0-(i/D_0)(\varkappa-\varkappa'+p'^2/2\varkappa_0-p^2/2\varkappa_0), \tag{6a}$$

а величина $D_0$ определяется равенством

$$D_0=(\varkappa_0^2/2)\int\limits_0^\infty d\zeta\,B(\zeta). \tag{6б}$$

Ниже мы вернемся к решению рекуррентного соотношения (6), а сейчас выясним, к чему приводит учет конечности радиуса корреляции.

В случае процесса $\varepsilon(L)$ с конечным радиусом корреляции для вычисления выражения (4) необходимо решить уравнение (5). Воспользуемся приближенным решением уравнения (5) следующего вида:

$$\delta R_L/\delta\varepsilon(\zeta)\simeq(ik^2/2\sigma)(1+R_\zeta)^2\,e^{2i\sigma(L-\zeta)}. \tag{7}$$

В рамках приближения (7) величину $R_\zeta$ можно связать с $R_L$ с помощью решения исходного нелинейного уравнения для коэффициента отражения в нулевом приближении, которое имеет вид

$$R_\zeta\simeq R_L\,e^{-2i\sigma(L-\zeta)}. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (4) и действуя, как в случае $\delta$-коррелированного процесса, можно получить рекуррентное соотношение (6) с параметром $\beta$, в котором вместо величины $D_0$ будет фигурировать величина

$$D=(\varkappa_0^2/2)\int\limits_0^\infty d\zeta\,B(\zeta)\cos 2\varkappa_0\zeta. \tag{9}$$

Таким образом, учет конечности радиуса корреляции в предложенном приближении сводится к изменению только коэффициента диффузии. При стремлении радиуса корреляции к нулю $D\to D_0$. Это подтверждает выбранное приближение.

Рекуррентное соотношение (6) можно решить методом производящей функции. Решение представимо в виде (см. [2])

$$\langle R^nR^{*n}\rangle=\beta\int\limits_1^\infty du\,[(u-1)/(u+1)]^n\,e^{-\beta(u-1)}. \tag{10}$$

Интерес для дальнейших вычислений представляет величина (10) при $n = 1$:

$$\langle RR^* \rangle = 1 + 2\beta e^{2\beta} \operatorname{Ei}(-2\beta). \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что выражения (10) и (11) являются аналитическим продолжением в комплексную плоскость по параметру $\beta$ решения задачи с плоской падающей волной (см. [2]). Выражение (10) согласуется и с результатами работ [3–5], как частным случаем, при $\gamma = 0$.

Полученные результаты с небольшими изменениями можно применить и в области переменных $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\varkappa}'$, где не выполняются условия (3). Нетрудно, например, рассмотреть рассеяние от волновых пакетов, падающих под углом, или от точечных источников. В этих случаях и коэффициент диффузии станет функцией от указанных переменных.

## 2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим два вида ТВ в $\delta$-коррелированном приближении, а учет конечности радиуса корреляции, как и в точном методе, сведется к замене $D_0 \to D$. Обычная ТВ (борновское приближение) получается, если нелинейное уравнение для коэффициента отражения решить в первом приближении по $\varepsilon$ с последующим усреднением. Это равносильно тому, что в уравнении (2) при $n=m=1$ воспользоваться приближенным значением величины $I_L \simeq (ik^2/2\sigma)\varepsilon(L)$, а при вычислении выражения (4) взять приближенное значение вариационной производной (5а), считая, что

$$\delta R_\zeta / \delta\varepsilon(\zeta) \simeq ik^2/2\sigma. \tag{12}$$

Тогда уравнение (2) при $n = m = 1$ после усреднения по быстрым осцилляциям замкнется и его стационарное решение будет иметь вид

$$\langle RR^* \rangle_{\text{ТВ}} = (1/2)\beta. \tag{13}$$

Более последовательную модифицированную ТВ (МТВ) [7] можно построить, если пренебречь возмущениями на более высоком уровне, т. е. для величины $I_L$ взять точное значение, а для вариационной производной по-прежнему использовать выражение (12). Тогда уравнение (2) при $n = m = 1$ после усреднения по быстрым осцилляциям опять замкнется, но его стационарное решение уже примет форму

$$\langle RR^* \rangle_{\text{МТВ}} = (2 + 2\beta)^{-1}. \tag{14}$$

Выражение (14), как легко видеть, следует из (6) при ($n = 1$) в пренебрежении величиной $\langle R^2 R^{*2} \rangle$. Условия применимости ТВ и МТВ рассмотрены в работе [7], там же обсуждались и некоторые преимущества МТВ по сравнению с ТВ. Ниже будет приведено еще одно сравнение этих двух теорий.

В заключение заметим, что если для вариационной производной взять точное значение (5), то придем к точному методу, рассмотренному выше.

## 3. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Введем функцию распределения излучения $I(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{z}\}$ — пространственная координата, $t$ — время, $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{n}_\rho, \boldsymbol{n}_z\}$ — вектор направления ($\boldsymbol{n}^2 = 1$). Слои неоднородной среды перпендикулярны оси $z$, а волновой пакет падает вдоль нее.

Функция распределения вперед $I_+(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho)=I(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})|_{n_z>0}$ и функция распределения назад $I_-(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho) = I(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n})|_{n_z<0}$ в линейной теории переноса излучения для слоистых сред описываются системой уравнений

$$c^{-1}(\partial/\partial t) I_\pm + \boldsymbol{n}_\rho(\partial/\partial \boldsymbol{\rho}) I_\pm \pm \sqrt{1-\boldsymbol{n}_\rho^2}(\partial/\partial z) I_\pm = \\ = -(D_0 + 2\gamma) I_\pm + D_0 I_\mp. \tag{15}$$

Обозначения коэффициентов $D_0$, $c$, $\gamma$ в этих уравнениях сохранены с учетом того, что ниже станет очевидным их соответствие коэффициентам статистической теории. В общем случае $D_0 = D_0(|\boldsymbol{n}_\rho|)$, но здесь, согласно условиям (3), ограничимся случаем $|\boldsymbol{n}_\rho| \ll 1$, поэтому $D_0$ — константа. Задача для уравнений (15) ставится следующим образом. На неоднородное полупространство падает волна, функция распределения которой задается на границе раздела сред $I_+(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho)|_{z=0}$. В качестве второго граничного условия задается отсутствие отраженной волны на бесконечности $I_-(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho)|_{z\to\infty} \to 0$. Решение уравнений (15) при $z = 0$, $I_-(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho)|_{z=0}$ определяет интенсивность ОР в рамках линейной теории переноса излучения, и его можно найти, используя преобразование Фурье:

$$I_\pm = \int d^2\Delta p\, d\Omega\, \tilde{I}_\pm(\Delta p, z, \Omega, \boldsymbol{n}_\rho)\, e^{i\Delta p \rho - i\Omega t}.$$

Тогда, переходя к уравнениям для фурье-компонент и решая их, получим

$$\tilde{I}_-\big|_{z=0} = \left[1 + \beta' - \sqrt{\frac{(1+\beta')^2 - 1}{1 - \boldsymbol{n}_\rho^2}}\right] \tilde{I}_+\big|_{z=0},$$

где $\beta' = 2\gamma/D_0 - i\Omega/cD_0 + (i/D_0)(\boldsymbol{n}_\rho, \Delta \boldsymbol{p})$,

Используя замену переменных $\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$, $\Omega = c(\varkappa - \varkappa')$, $\boldsymbol{n}_\rho = (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}')/2\varkappa_0$, можно показать, что $\beta' = \beta$. С учетом условия $|\boldsymbol{n}_\rho| \ll 1$ интенсивность ОР, определяемая интегралом

$$I_{\text{упи}}(\boldsymbol{\rho}, t) = \int d^2 \boldsymbol{n}_\rho I_-(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{n}_\rho)|_{z=0},$$

представима в виде

$$I_{\text{упи}}(\boldsymbol{\rho}, t) = \int dx \,\langle RR^* \rangle_{\text{упи}} U^0 U^{0*} \exp\, [i\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') - i(\varkappa - \varkappa')ct, \tag{16}$$

где $x = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}', \varkappa, \varkappa'\}$, а величина

$$\langle RR^* \rangle_{\text{упи}} = 1 + \beta - \sqrt{(1+\beta)^2 - 1}. \tag{17}$$

Таким образом, интенсивность ОР $I_{\text{упи}}(\boldsymbol{\rho}, t)$ представлена в такой же форме, как и в статистической теории, что облегчает в дальнейшем сравнение результатов. А величина $\langle RR^* \rangle_{\text{упи}}$ — характеристика ОР, аналогичная выражениям (11), (13), (14). При вычислении интеграла (16) выбирается та ветвь корня, у которой действительная часть положительна, что согласуется со вторым граничным условием.

## 4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Можно заметить, что формулы (11), (13), (14) и (17) в области $|\beta| \gg 1$ асимптотически совпадают и имеют существенно разное поведение при $|\beta| \lesssim 1$. Это обстоятельство и приводит к тому, что средняя интенсивность при малых координатах наблюдения $|\rho|$ и $t$ совпадает во всех теориях. ТВ и МТВ применимы лишь в случае малого ОР, критерии которого даны в [7]. При больших $|\rho|$ и $t$ все приближенные методы дают ошибку из-за накапливающихся эффектов.

Получим ограничения на координаты наблюдения при использовании приближенных методов на конкретном примере гауссова волнового пакета

$$U^0(p, \varkappa) = \frac{\alpha a^2}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2 p^2}{2} - \frac{\alpha^2(\varkappa - \varkappa_0)^2}{2}\right]. \tag{18}$$

Кроме того, для простоты рассмотрим два частных случая: плоский (одномерный) импульс и пучок. В первом случае можно получить ограничение на временную координату $t$, а во втором — на пространственную $\rho$.

Точное выражение для средней интенсивности ОР в этом случае имеет вид

$$\langle I(\rho, t)\rangle = \frac{\partial}{\partial\eta} \int_0^\infty dx \frac{x}{x+2} J(\eta, x, \rho, t)|_{\eta=0}, \tag{19}$$

где величина $J$ определяется выражением

$$J = \frac{1}{1+(\eta - x)^2/\varphi_2^2} \exp\left[\frac{2\gamma}{D_0}(\eta - x) - \frac{\rho^2}{a^2}\frac{1}{1+(\eta-x)^2/\varphi_2^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\eta - x + D_0 ct)^2}{\varphi_1^2}\right],$$

а комбинации параметров $\varphi_1$ и $\varphi_2$ задаются равенствами

$$\varphi_1 = \alpha D_0, \quad \varphi_2 = a^2 \varkappa_0 D_0.$$

Несложно вычислить интенсивности ОР и с помощью приближенных методов. Сравним асимптотики интенсивности ОР в отсутствие поглощения ($\gamma = 0$).

В случае плоского падающего импульса надо в выражении (19) и ему аналогичных, полученных с помощью приближенных методов, устремить $\varphi_2 \to \infty$ ($a \to \infty$). Удобно ввести обозначение $T = D_0 ct$. Тогда, если $\varphi_1 \gg 1$, то $T \gg \varphi_1$, если же $\varphi_1 \leqslant 1$, то $T \gg 1$. При этом в точной статистической теории получаем, что средняя интенсивность ОР затухает с ростом $T$ в указанных областях, как

$$\langle I(t)\rangle \simeq 2\pi\varphi_1 T^{-2},$$

а решение УПИ дает затухание ОР вида

$$I_{\text{УПИ}}(t) \simeq \left(\varphi_1/\sqrt{2}\right) T^{-3/2}.$$

ТВ и МТВ применимы только при $\varphi_1 \ll 1$ [7], при этом $T \gg 1$, в ТВ затухание ОР отсутствует ($\gamma = 0$), что, вообще говоря, бессмысленно, а в МТВ затухание ОР выглядит так:

$$\langle I(t)\rangle_{\text{МТВ}} \simeq (\sqrt{\pi}/2)\varphi_1 e^{-T}.$$

При учете поглощения во всех результатах возникает дополнительный множитель $e^{-2\gamma ct}$, т. е. появляется затухание за счет поглощения.

В области малых времен $T \ll \varphi_1$ или $T \ll 1$ в зависимости от значения $\varphi_1$ ($\varphi_1 \gg 1$ или $\varphi_1 \leqslant 1$ соответственно) результаты точной теории и УПИ совпадают, а при $\varphi_1 \ll 1$ (малое ОР) правильно описывают ОР и оба вида ТВ.

В случае падающего пучка надо устремить $\varphi_1 \to \infty$ ($\alpha \to \infty$) в выражении (19) и ему аналогичных, полученных с помощью приближенных методов. Анализ асимптотик интенсивности ОР показывает, что пространство переменной $\rho$ распадается на две области с границей между ними: $\rho = a$ при $\varphi_2 \gg 1$ и $\rho = \sqrt{l/\varkappa_0 D_0}$ при $\varphi_2 \leqslant 1$. В области малых $\rho$ приближенные методы совпадают с точным (оба вида ТВ только при $\varphi_2 \ll 1$), а в области больших $\rho$ приближенные методы дают ошибку.

Интересно заметить, что области больших $T$ или $\rho$ соответствуют процессам многократного рассеяния, здесь и обнаруживается неприменимость приближенных методов в отношении ОР.

## 5. ВЫСШИЕ МОМЕНТЫ ОР

Для изучения высших моментов надо найти $2n$-точечный стационарный ($L \to \infty$) момент коэффициента отражения $\left\langle \prod_{j=1}^{n} R(p_j, \varkappa_j) \times R^*(p'_j, \varkappa'_j) \right\rangle$. Сворачивая его $2n$ раз со спектром $U^0(p, \varkappa)$, можно получить, например, функцию когерентности $n$-го порядка.

Рассмотрим нестационарный $2n$-точечный момент коэффициента отражения $\left\langle \prod_{j=1}^{n} R_L(p_j, \varkappa_j) R^*_L(p'_j, \varkappa'_j) \right\rangle$. Для него можно написать дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению (2), из которого видно, что этот момент есть медленно меняющаяся функция от $L$. Подставляя далее в это уравнение значение вариационной производной, найденное из решения уравнения (5), выполняя усреднение по быстрым осцилляциям, упрощая коэффициенты и переходя к пределу $L \to \infty$, можно получить соотношение

$$n\beta_n \langle \prod_j R_j R_j^* \rangle = \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \left\langle \frac{1}{R_l R_k^*} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \left\langle \frac{R_k}{R_l} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle - \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \left\langle \frac{R_k^*}{R_l^*} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \langle R_l R_k^* \prod_j R_j R_j^* \rangle \quad (i,\ j,\ k = 1, \ldots, n),$$

где

$$\beta_n = \frac{2\gamma}{D_0} - i \frac{1}{D_0 n} \sum_{j=1}^{n} \left( \varkappa_j - \varkappa'_j + \frac{p'^2_j}{2\varkappa_0} - \frac{p_j^2}{2\varkappa_0} \right). \tag{20}$$

Далее воспользуемся приближенными равенствами

$$\sum_k \sum_l \left\langle \frac{1}{R_l R_k^*} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle \simeq n^2 \left\langle \frac{1}{R_0 R_0^*} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle,$$
$$\sum_k \sum_l \left\langle \frac{R_k}{R_l} \prod_j R_j R_j^* \right\rangle \simeq n^2 \langle \prod_j R_j R_j^* \rangle, \tag{21}$$

$$\sum_k \sum_l \langle R_l R_k^* \prod_j R_j R_l^* \rangle \simeq n^2 \langle R_0 R_0^* \prod_j R_j R_l^* \rangle ,$$

где $R_0 = R(\hat{p}, \hat{x})$,

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p_j, \qquad \hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Если ввести величину $M_n^l = \left\langle (R_0 R_0^*)^l \prod_{j=1}^{n} R_j R_l^* \right\rangle$ $(l = -n, \ldots, \infty)$, то выражения (20) и (21) дают для нее рекуррентное соотношение по индексу $l$, аналогичное (6), решение которого выглядит:

$$M_n^l = \beta_n \int_1^\infty du \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^{l+n} \exp\left[ -\beta_n (u-1) \right]. \tag{22}$$

Формула (22) при $l = 0$ определяет искомую величину $\left\langle \prod_{j=1}^{n} R_j R_l^* \right\rangle$. Если совместить точки $j$, то получим двухточечный момент $\langle R^n R^{*n} \rangle$, а выражение (22) при $l = 0$ перейдет в (10), так как при этом $\beta_n = \beta$.

Рассмотрим поведение высших моментов интенсивности ОР на примере падающего волнового пакета со спектром (18). Используя (22), получаем

$$\langle I^n(\rho, t) \rangle \simeq \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^\infty dx \left( \frac{x}{x+2} \right)^n J_n(\eta, x, \rho, t)|_{\eta=0}, \tag{23}$$

где величина $J_n$ определяется соотношением

$$J_n = \frac{1}{[1 + (\eta - x)^2/\varphi_2^2 n^2]^n} \exp\left[ \frac{2\gamma}{D_0} (\eta - x) - \right.$$
$$\left. - \frac{\rho^2}{a^2} \frac{n}{1 + (\eta - x)^2/\varphi_2^2 n^2} - \frac{(\eta - x + D_0 nct)^2}{\varphi_1^2 n} \right],$$

а комбинации параметров $\varphi_1$ и $\varphi_2$ определяются (19). При $n=1$ выражение (23) переходит в (19). Для простоты ограничимся случаем плоского падающего импульса ($\varphi_2 \to \infty$) в отсутствие поглощения ($\gamma = 0$) и малости ОР ($\varphi_1 \ll 1$). Тогда выражение (23) дает следующие асимптотики моментов интенсивности в трех временных областях:

а) при $0 \leqslant T \ll \varphi_1$

$$\langle I^n(t) \rangle \simeq \begin{cases} \sqrt{\pi}\, n^{n/2} n!!\, 2^{-(3/2)n-(1/2)} \varphi_1^n, & n \text{ — нечетное} \\ n^{n/2} (n/2)!\, 2^{-n} \varphi_1^n, & n \text{ — четное} \end{cases};$$

б) при $\varphi_1 \ll T \ll 1$

$$\langle I^n(t) \rangle \simeq \varphi_1 n^n \sqrt{\pi n}\, 2^{-n} T^{n-1};$$

в) при $T \gg 1$

$$\langle I^n(t) \rangle \simeq \varphi_1 2 \sqrt{\pi/n}\, T^{-2}.$$

В области в) моменты затухают за счет рассеяния, а если учесть поглощение, то появится дополнительный множитель $e^{-2\gamma nct}$. Можно показать, что при $T \gg 1$ $\sigma_I^2(t) \simeq \langle I^2(t) \rangle$ (где $\sigma_I(t)$ — дисперсия интенсивности ОР), а, значит, при $T \gg 1$

$$\sigma_I / \langle I \rangle \simeq 2^{-3/4} \pi^{-1/4} T / \sqrt{\varphi_1} .$$

Таким образом, область в) характеризуется ростом флуктуаций интенсивности ОР. Если еще учесть, что при заданных условиях в этой области ОР не описывается с помощью УПИ (см. разд. 4), то можно сделать вывод, что в этом временном интервале существенным образом проявляются статистические волновые эффекты.

Высшие моменты поля ОР могут быть использованы для разделения затухания от рассеяния и от поглощения, что необходимо при зондировании неоднородных сред.

---

Задача со слоистой средой представляет непосредственный интерес как в акустике (в частности морской), так и в радиофизике [8], но прежде всего ее важность заключается в том, что она позволяет вплотную подойти к решению задачи с трехмерными неоднородностями.

Можно выделить характерные обстоятельства, связанные с ОР в слоистых средах. Во-первых, возникают пространственно-временные масштабы, ограничивающие область применимости приближенных методов. Вне этой области приближенные методы не работают из-за накапливающихся эффектов, и, во-вторых, флуктуации интенсивности ОР там растут. Весьма актуально было бы исследовать в этом отношении среды с трехмерными неоднородностями, что необходимо для задач зондирования случайно-неоднородных сред методом ОР.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Кляцкину и Г. И. Бабкину за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М, Кравцов Ю. А, Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
2. Кляцкин В. И Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1980.
3. Абрамович Б. С., Гурбатов С Н.— Изв вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 4, с. 442.
4. Гурбатов С. Н. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн — Львов, 1981, т. 3.
5. Аристов С. Н., Гурбатов С. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 8, с. 960.
6. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И, Любавин Л. Я.— ДАН СССР, 1980, **250**, № 5, с. 1112.
7. Шевцов Б. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 11, с. 1351.
8. Бреховских В. Л., Татарский В. И.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1977, **13**, № 2, с. 144.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
24 сентября 1981 г.

## THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF BACK SCATTERING IN STRATIFIED RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIA

*B. M. Shevtsov*

Based on the nonlinear equation for the reflection coefficient the back scattering is considered at the incedence of the wave packet on a half-space of stratified randomly-inhomogeneous medium. Expressions have been derived in the general form for the mean intensity of a backward scattered field which by an example of an incident Gaussian wave packet are compared with the results of the theory of the radiation transfer as well as with the different forms of the 'disturbance theory. The behaviour of the highest intensity moments of the backward scattered field is studied