

УДК 522.2;538.56;535

КВАНТОВЫЙ ШУМ В АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. II*

B. I. Татарский

На основе развитой в первой части работы общей теории рассмотрен пример случайного электромагнитного поля с постоянной амплитудой и гауссовыми флюктуациями фазы, для которого разность фаз в двух точках может быть измерена при помощи двух счетчиков фотонов. Для такого поля вычислены условные функции когерентности, соответствующие регистрации того или иного числа фотонов этими счетчиками. Показано, что от адаптивной оптической системы можно получить выигрыш при сколь угодно слабых световых потоках.

В Приложении 1 анализируются статистические моменты синуса разности фаз, измеряемого при помощи двух счетчиков фотонов.

6. СЛУЧАЙНОЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ С ГАУССОВЫМИ ФЛЮКТУАЦИЯМИ ФАЗЫ

В [1] был проанализирован пример, когда волновое поле имеет вид

$$u(\rho, t) = \exp[iS(\rho, t)], \quad (27)$$

а случайная функция S является гауссовой, $\langle S \rangle = 0$, и описывается структурной функцией:

$$\langle [S(\rho_1, t) - S(\rho_2, t)]^2 \rangle = D(\rho_1, \rho_2). \quad (28)$$

В [1] рассматривался случай, когда измерялись разности фаз в некотором числе точек на входной апертуре. Здесь мы рассмотрим этот же пример. Прежде всего, обратимся к процессу измерения разности фаз при помощи фотодетекторов. Допустим, что необходимо измерить разность фаз в двух точках R_1, R_2 входной апертуры. Для поля вида (27), когда заранее известно, что амплитуда является константой, это можно сделать при помощи двух счетчиков фотонов. В соответствии с общей схемой рассмотрим две следующие линейные комбинации полей:

$$w_{1,2} = u(R_1, t) \pm iu(R_2, t) = e^{iS(R_1, t)} \pm ie^{iS(R_2, t)}. \quad (29)$$

Очевидно, что w_1 и w_2 являются частными случаями величин, определяемых формулой (10). Поля $w_{1,2}$ могут быть реализованы в интерферометре. Так как $|w_{1,2}|^2 = \{1 \pm \sin[S(R_1, t) - S(R_2, t)]\}/2$, то для $v_{1,2}$ согласно (12) получим

$$v_{1,2} = \frac{1}{2} \eta_{1,2} \int_{t-T}^t \{1 \pm \sin[S(R_1, t') - S(R_2, t')]\} dt'.$$

Предположим для простоты, что чувствительности детекторов одинаковы ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) и что интервал измерения T мал по сравнению с характерным временем изменения фазы. Тогда

$$v_{1,2} = (1/2) \eta T [1 \pm \sin \xi], \quad \xi = S(R_1, t) - S(R_2, t).$$

* Часть I опубликована в № 8 1982 г.

Рассмотрим сначала частный случай больших интенсивностей света, когда $v_{1,2} \gg 1$. Тогда относительные флуктуации фотоотсчетов малы, и можно считать, что счетчики измеряют непосредственно величины v_1, v_2 . В этом случае мы можем по измеренным значениям v_1, v_2 найти

$$\sin \xi = (v_1 - v_2)/(v_1 + v_2).$$

Если известно, что $|\xi| < \pi/2$ (а этого всегда можно добиться, выбрав расстояние $|R_1 - R_2|$ достаточно малым по сравнению с пространственным радиусом когерентности поля), то по измеренным значениям v_1, v_2 можно восстановить $\xi = S(R_1) - S(R_2)$. Заметим, что если бы мы взяли вместо комбинаций $w_{1,2} = u_1 \pm iu_2$ комбинации $w'_{1,2} = u_1 \pm u_2$, то результатом измерений был бы не $\sin \xi$, а $\cos \xi$. Но это значительно менее информативная величина, так как при малых ξ невозможно восстановить знак ξ по $\cos \xi$.

Обратимся теперь к случаю небольших $v_{1,2}$, когда существенные флуктуации числа фотоотсчетов. Тогда в результате измерения мы получаем пару случайных чисел n_1, n_2 , по которым можем образовать новую случайную величину

$$\zeta = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2).$$

Величина ζ может служить лишь оценкой для $\sin \xi$ (см. Приложение 1, в котором исследуются статистические свойства ζ). Мы, однако, сразу перейдем к вычислению условной функции когерентности $\tilde{\Gamma}$ при условии, что известны числа фотоотсчетов n_1, n_2 . Воспользуемся формулой (21) и тем обстоятельством, что в данном случае $v_1 + v_2 = \eta T$ не зависит* от ξ . Тогда

$$\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2) = \frac{\langle e^{i\psi} (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle}{\langle (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle}, \quad (30)$$

где введено обозначение $\psi \equiv S(\rho_1) - S(\rho_2)$. Нам будет удобнее рассчитать несколько более общую величину

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda; n_1, n_2) &\equiv \langle e^{i\lambda\psi} / n_1, n_2 \rangle = \\ &= \frac{\langle e^{i\lambda\psi} (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle_u}{\langle (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle_u}, \end{aligned} \quad (31)$$

представляющую собой условную характеристическую функцию для разности фаз ψ . Функцию $\tilde{\Gamma}$ можно получить из Φ , полагая $\lambda = 1$, а дифференцируя Φ по λ , можно найти условные моменты $\langle \psi^k / n_1, n_2 \rangle$.

Отметим, что в (31) случайные величины ψ и ξ относятся к соседним интервалам времени $(t - T, t)$ и $(t - 2T, t - T)$. Мы, однако, пренебрежем этим различием, считая, что за время T случайные функции ψ, ξ не успевают существенно измениться.

Записав среднее значение в числителе (31) в виде двойного интеграла от произведения усредненной функции и совместной гауссовой плотности вероятностей для ψ, ξ и выполнив интегрирование по ψ , легко получить формулу

$$\langle e^{i\lambda\psi} / n_1, n_2 \rangle = \exp\left(-\frac{\lambda^2 \Delta^2}{2}\right) \frac{C(\lambda; n_1, n_2)}{C(0; n_1, n_2)}, \quad (32)$$

где

$$\Delta^2 = \langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \xi \rangle^2 / \langle \xi^2 \rangle, \quad \beta = \langle \psi \xi \rangle / \langle \xi^2 \rangle,$$

$$C(\lambda; n_1, n_2) = \langle e^{i\lambda\psi} (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle.$$

* Независимость $v_1 + v_2$ от ξ весьма облегчает расчет. В данной модели всегда можно выбрать поля w_i так, чтобы Σv_i не зависела от случайных фаз S .

Отметим, что $\beta\xi$ и Δ^2 представляют собой условное среднее и условную дисперсию ψ при заданном ξ .

Из того, что $(1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} > 0$ следует, что $|C(\lambda; n_1, n_2)/C(0; n_1, n_2)| < 1$. Но так как величина $\exp(-\Delta^2/2)$ представляет собой модуль условной функции когерентности $|\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/\xi)|$ (см. [1]), то из неравенства $|C(\lambda)| < |C(0)|$ вытекает, что в квантовом случае $|\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2)|$ не превышает своего классического предела (как будет показано, он получается при $n_1 + n_2 \rightarrow \infty$).

Функции $C(\lambda)$ легко найти при любых n_1, n_2 , но общая формула весьма громоздка и неудобна. Приведем поэтому результаты для нескольких небольших значений $n_1 + n_2$, а затем при $n_1 + n_2 \gg 1$.

Прежде всего, при $n_1 = n_2 = 0$ из (31) следует, что $\langle e^{i\lambda\psi}/0, 0 \rangle = \langle e^{i\lambda\psi} \rangle$, т. е. если ни в одном из каналов не зарегистрировано ни одного фотона, то условная характеристическая функция совпадает с безусловной (априорной), так как никакой новой информации при $n_1 = n_2 = 0$ нет. Так как ξ — гауссова случайная величина, то для вычисления Φ можно воспользоваться формулой

$$\langle e^{i\alpha\xi} \rangle = \exp\{i\alpha \langle \xi \rangle - (\alpha^2/2)[\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2]\}$$

и разложениями синуса и косинуса по формулам Эйлера. При $n_1 = 1, n_2 = 0$ или $n_1 = 0, n_2 = 1$ это приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda; 1, 0) &= \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \langle \psi^2 \rangle\right) \left[1 \pm i \exp\left(-\frac{\langle \xi^2 \rangle}{2}\right) \operatorname{sh}(\lambda \langle \psi \xi \rangle) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\langle \psi^2 \rangle = D(\rho_1, \rho_2), \quad \langle \xi^2 \rangle = D(R_1, R_2),$$

$$\langle \psi \xi \rangle = (1/2) \{ [D(\rho_1, R_2) - D(\rho_1, R_1)] - [D(\rho_2, R_2) - D(\rho_2, R_1)] \}. \quad (33a)$$

Первый сомножитель в (33) представляет собой безусловную характеристическую функцию для ψ . Так как при любых $A = A^*$ всегда $|1 \pm iA| \geq 1$, то из (33) следует, что $|\tilde{\Gamma}| \geq |\Gamma|$ даже при $n_1 + n_2 = 1$. Дифференцируя (33) по λ , можно получить условное среднее значение и условную дисперсию разности фаз $\psi = S(\rho_1) - S(\rho_2)$:

$$\langle \psi / 1, 0 \rangle = \pm \langle \psi \xi \rangle \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle\right), \quad (34)$$

$$\tilde{D}(\rho_1, \rho_2 / 1, 0) \equiv \langle \psi^2 / 1, 0 \rangle - \langle \psi / 1, 0 \rangle^2 = \langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \xi \rangle^2 \exp(-\langle \xi^2 \rangle).$$

Если принять величину $\pm \langle \psi \xi \rangle \exp(-\langle \xi^2 \rangle/2)$ за оценку разности фаз в точках ρ_1, ρ_2 при условии, что в измерениях зарегистрирован один фотон, то величина \tilde{D} будет давать средний квадрат отклонения разности фаз от этой оценки.

В качестве примера рассмотрим структурную функцию фазы вида $D(\rho_1, \rho_2) = [|\rho_1 - \rho_2|/r_{\text{кор}}]^{5/3}$, соответствующую турбулентным флуктуациям показателя преломления [2]. Если точки R_1, R_2 находятся на расстоянии b друг от друга, а точки ρ_1, ρ_2 лежат на прямой, соединяющей R_1, R_2 , то легко найти, что

$$\langle \psi^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle |a_1 - a_2|^{5/3},$$

$$\langle \psi \xi \rangle = \frac{\langle \xi^2 \rangle}{2} [|1 - a_1|^{5/3} - |1 - a_2|^{5/3} + a_2^{5/3} - a_1^{5/3}], \quad (35)$$

где $a_{1,2} = |\rho_{1,2} - R_1|/b$. На рис. 1 приведены функции \tilde{D} и D , построенные по формулам (34), (35) для значений параметров $\langle \xi^2 \rangle = 1$, $a_1 = 0$, в зависимости от $a_2 = a$. Видно, что даже регистрация одного фотона позволяет снизить дисперсию фазы.

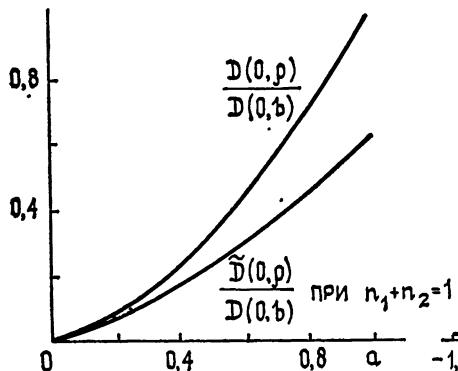


Рис. 1.

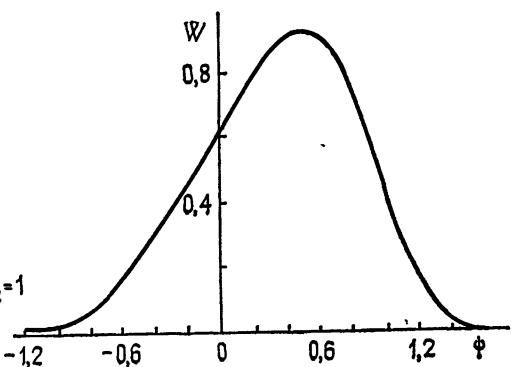


Рис. 2.

Рис. 1. Структурная функция флюктуаций фазы (верхняя кривая) и условная структурная функция в случае регистрации одного фотона (нижняя кривая).

Рис. 2. Условное распределение разности фаз в двух точках в случае регистрации одного фотона.

Условное распределение вероятностей для ψ , соответствующее характеристической функции (33), не является гауссовым и дается формулой

$$W\left(\psi \middle/ \begin{matrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{matrix}\right) = \frac{\exp[-\psi^2/2\langle\psi^2\rangle]}{\sqrt{2\pi\langle\psi^2\rangle}} \left\{ 1 \pm \exp\left[-\frac{\langle\xi^2\rangle\langle\psi^2\rangle - \langle\psi\xi\rangle^2}{2\langle\psi^2\rangle} \right] \sin\left[\frac{\langle\psi\xi\rangle}{\langle\psi^2\rangle} \psi \right] \right\}. \quad (36)$$

На рис. 2 приведен график этой функции, соответствующий значениям параметров $\langle\xi^2\rangle = 1$, $\langle\psi^2\rangle = 0,427$, $\langle\psi\xi\rangle = 0,605$, $\langle\psi/1,0\rangle = 0,367$ (в случае модели (35) эти параметры соответствуют при $\langle\xi^2\rangle = 1$ значениям $a_1 = 0$, $a_2 = 0,6$). Отметим, что условное среднее значение $\langle\psi/1,0\rangle = 0,367$ не совпадает с наиболее вероятным значением 0,529.

Точно так же находятся функции $\Phi(\lambda; n_1, n_2)$ и при других n_1, n_2 . При $n_1 + n_2 = 2$ имеем три функции

$$\Phi\left(\lambda; \begin{matrix} 2, 0 \\ 0, 2 \end{matrix}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2\langle\psi^2\rangle}{2}\right) \frac{3 - e^{-2\langle\xi^2\rangle} \operatorname{ch}(2\lambda\langle\psi\xi\rangle) \pm 4ie^{-\langle\xi^2\rangle/2} \operatorname{sh}(\lambda\langle\psi\xi\rangle)}{3 - e^{-2\langle\xi^2\rangle}}, \quad (37)$$

$$\Phi\left(\lambda; 1, 1\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2\langle\psi^2\rangle}{2}\right) \frac{1 + e^{-2\langle\xi^2\rangle} \operatorname{ch}(2\lambda\langle\psi\xi\rangle)}{1 + e^{-2\langle\xi^2\rangle}},$$

при $n_1 + n_2 = 3$ — четыре функции $\Phi\left(\lambda; \begin{matrix} 3, 0 \\ 0, 3 \end{matrix}\right)$ и $\Phi\left(\lambda; \begin{matrix} 2, 1 \\ 1, 2 \end{matrix}\right)$, которые мы не будем приводить.

Легко проверить, что получающиеся отсюда при $\lambda = 1$ функции $\tilde{\Gamma}$ удовлетворяют условию $|\tilde{\Gamma}| > |\Gamma|$. На рис. 3 приведены функции $|\tilde{\Gamma}(R_1, \rho/n_1, n_2)|$ при $n_1 + n_2 \ll 2$, соответствующие модели (35) и различным уровням флуктуаций разности фаз на базе $b = |R_1 - R_2|$.

В случае больших $n_1 + n_2$ можно показать при помощи асимптотического вычисления входящих в (32) интегралов (см. Приложение 2), что для $\langle \xi^2 \rangle \ll 1$ имеет место формула

$$\lim_{n_1+n_2 \rightarrow \infty} \langle e^{i\psi}/n_1, n_2 \rangle = \exp \left[i \frac{\langle \psi \xi \rangle}{\langle \xi^2 \rangle} \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} - \frac{1}{2} \left(\langle \psi^2 \rangle - \frac{\langle \psi \xi \rangle^2}{\langle \xi^2 \rangle} \right) \right], \quad (38)$$

совпадающая с полученной в [1] при классическом рассмотрении (при этом величина $\arcsin[(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)]$ играет роль измеренной разности фаз). Отметим, что условие $\langle \xi^2 \rangle \ll 1$, использовавшееся при выводе (38), ликвидирует неоднозначность* при нахождении ξ по измеряемой величине $(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2) \approx \sin \xi$ (см. Приложение 1).

Рассмотрим теперь задачу об отыскании оптимального фазового корректора. Как и в [1], будем решать ее для оптической системы, фокусирующей излучение в точку r_0 . Как показано Дайсоном (см. [3]), для некогерентного источника света максимуму интенсивности в фокальной точке (как и максимуму интеграла от квадрата интенсивности по фокальной плоскости) соответствует полная компенсация фазовых искажений в среде распространения.

Для фокусирующей системы формула (2) содержит лишь одно слагаемое, а $\arg[K_0(r_0, \rho)] = \text{const}$, так как фазовые набеги от любой точки входной апертуры до фокальной точки r_0 одинаковы. В этом случае формула (25) приводит к выражению (при $\partial\Gamma/\partial t' = 0$)

$$Z(\rho, \rho', n) = A\tilde{\Gamma}(\rho, \rho'/n), \\ A^* = A.$$

Уравнение (26) принимает вид

$$\int \int \tilde{\Gamma}(\rho, \rho'/n) e^{-i\varphi(\rho', n)} d^2\rho' = (F/A) e^{-i\varphi(\rho, n)}, \quad F^* = F. \quad (39)$$

Рис. 3 Априорные и условные функции коherентности при различных значениях среднего квадрата флуктуаций разности фаз на концах измерительной базы $\langle \xi^2 \rangle$ и при различном числе зарегистрированных фотонов. Кривые 1, 2 при $\langle \xi^2 \rangle = 2,5$; кривые 3, 4, 5 при $\langle \xi^2 \rangle = 10$; кривые 6, 7 при $\langle \xi^2 \rangle = 40$. Кривые 2, 3, 6—априорные функции. Кривые 1, 4, 7—при регистрации одного фотона, кривая 5—при регистрации двух фотонов в одном и том же канале.

* В Приложении 1 рассмотрен вариант измерений с тремя счетчиками, при котором одновременно можно получать оценки как $\sin \xi$, так и $\cos \xi$.

В [4] уравнение такого типа легко решалось, так как ядро $\tilde{\Gamma}$ имело вид $|\tilde{\Gamma}| \exp[if(\rho) - if(\rho')]$ и фазовый множитель распадался на произведение функции от ρ и функции от ρ' . Однако функции (33) и (37) таким свойством уже не обладают. Действительно, представим, например, (33) в форме

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\rho, \rho'/1,0) = & \exp(-\langle \psi^2 \rangle/2) \sqrt{1 + \exp(-\langle \xi^2 \rangle)} \operatorname{sh}^2 \langle \psi \xi \rangle \times \\ & \times \exp[i \operatorname{arctg}[\exp(-\langle \xi^2 \rangle/2) \operatorname{sh} \langle \psi \xi \rangle]]. \end{aligned} \quad (40)$$

Хотя функция $\langle \psi \xi \rangle$ имеет вид $\langle \psi \xi \rangle = f(\rho) - f(\rho')$ (см. (33)), но она входит в фазу нелинейно. Поэтому точно решить уравнение (39) с ядром вида (40) затруднительно. Мы, однако, можем решить это уравнение с хорошей точностью приближенно, если учтем, что $\sqrt{\langle \xi^2 \rangle} < 1$. В этом случае и $|\langle \psi \xi \rangle| < 1$ (если $|\rho - \rho'| < |R_1 - R_2|$), и можно воспользоваться приближенной формулой, которая получается путем разложения $\arg \tilde{\Gamma}$ в ряд по $\langle \psi \xi \rangle$ с сохранением линейного члена:

$$\operatorname{arctg}[\exp(-\langle \xi^2 \rangle/2) \operatorname{sh} \langle \psi \xi \rangle] \approx \exp(-\langle \xi^2 \rangle/2) \langle \psi \xi \rangle.$$

Отметим, что правая часть этого соотношения совпадает с $\langle \psi/1,0 \rangle$, как это видно из (34). Наибольшую погрешность эта приближенная формула имеет при $\langle \psi \xi \rangle = \pm \langle \xi^2 \rangle$ (т. е. когда точки ρ, ρ' совпадают с R_1, R_2). При $\langle \xi^2 \rangle < 1$ погрешность этой аппроксимации не более 2,1%. Точно такие же формулы можно записать для всех n_1, n_2 . Чтобы показать это, выделим в (32) действительную и мнимую части, т. е. положим

$$C(\lambda, n_1, n_2) = A(\lambda, n_1, n_2) + iB(\lambda, n_1, n_2),$$

$$A(\lambda, n_1, n_2) = \langle \cos(\lambda \beta \xi) (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle,$$

$$B(\lambda, n_1, n_2) = \langle \sin(\lambda \beta \xi) (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle.$$

Тогда для $\arg \tilde{\Gamma}$ будем иметь

$$\arg \tilde{\Gamma} = \operatorname{arctg}[B(1, n_1, n_2)/A(1, n_1, n_2)].$$

Если разложить правую часть в ряд по β и ввести обозначения

$$V_{n_1, n_2}^k = \langle \xi^k (1 + \sin \xi)^{n_1} (1 - \sin \xi)^{n_2} \rangle,$$

то с точностью до членов порядка β^2 имеем

$$\arg \tilde{\Gamma} = (\langle \psi \xi \rangle / \langle \xi^2 \rangle) (V_{n_1, n_2}^1 / V_{n_1, n_2}^0) + \dots \quad (41)$$

С другой стороны, разлагая (32) в ряд по степеням λ и учитывая, что $\Phi(\lambda; n_1, n_2) = 1 + i\lambda \langle \psi/n_1, n_2 \rangle + \dots$, получим то же самое выражение

$$\langle \psi/n_1, n_2 \rangle = (\langle \psi \xi \rangle / \langle \xi^2 \rangle) (V_{n_1, n_2}^1 / V_{n_1, n_2}^0), \quad (42)$$

откуда видно, что линейный член разложения $\arg \tilde{\Gamma}$ по $\langle \psi \xi \rangle$ можно записать в виде

$$\arg \tilde{\Gamma} = \langle \psi/n_1, n_2 \rangle + \dots \quad (43)$$

Для $n_1 + n_2 \leq 3$ погрешность аппроксимации (41) не превышает 0,9% при $\langle \xi^2 \rangle < 0,5$ и не превышает 5% при $\langle \xi^2 \rangle < 1$. Кроме того, как сле-

дует из асимптотической формулы (38), $\arg \tilde{\Gamma}$ при $n_1 + n_2 \gg 1$ линеен по $\langle \psi \xi \rangle$, т. е. с увеличением $n_1 + n_2$ погрешность этой аппроксимации стремится к нулю.

Смысл аппроксимации (41) заключается в том, что мы записываем функцию $\tilde{\Gamma}$ в виде

$$\tilde{\Gamma}(\rho, \rho'/n_1, n_2) \approx |\tilde{\Gamma}| \exp\{i[\langle S(\rho)/n_1, n_2 \rangle - \langle S(\rho')/n_1, n_2 \rangle]\}. \quad (44)$$

Такая формула была бы точной, если условное распределение вероятностей для ψ было бы гауссовым. Но, как мы видели, истинное распределение несколько отличается от гауссова. В частности, значения наиболее вероятного и среднего ψ (условных) немного различаются (см. рис. 2). С этим различием и связана погрешность аппроксимации (41), (44).

С использованием аппроксимации (44) уравнение (39) легко решается. Действительно, при этом (39) принимает вид

$$\begin{aligned} \iint |\tilde{\Gamma}(\rho, \rho'/n_1, n_2)| \exp\{i[\langle S(\rho)/n_1, n_2 \rangle - i\langle S(\rho')/n_1, n_2 \rangle - \\ - i\varphi(\rho', n_1, n_2)]\} d^2\rho' = (F/A) \exp\{-i\varphi(\rho, n_1, n_2)\}, \end{aligned} \quad (45)$$

так что решение, соответствующее условию $F^* = F$, легко находится:

$$\varphi(\rho; n_1, n_2) = -\langle S(\rho)/n_1, n_2 \rangle + \text{const.} \quad (46)$$

Учитывая, что $\langle \psi/n_1, n_2 \rangle = \langle S(\rho)/n_1, n_2 \rangle - \langle S(\rho')/n_1, n_2 \rangle$, и используя (42), (33а), можем записать явное выражение для φ :

$$\varphi(\rho; n_1, n_2) = -\frac{V_{n_1 n_2}^1}{V_{n_1 n_2}^0 \langle \xi^2 \rangle} f(\rho), \quad f(\rho) = \frac{1}{2} [D(\rho, R_2) - D(\rho, R_1)]. \quad (47)$$

Решение (47) совершенно аналогично полученному в [1] для классического случая. Зависимость корректирующего фазового сдвига от координат однозначно определяется структурной функцией фазы D . В то же время коэффициент, с которым входит функция f в φ , зависит от чисел n_1, n_2 , определяющих как оценку разности фаз, так и эквивалентные шумы.

Оценим теперь выигрыш, который можно получить от АОС. В рассматриваемом примере формула (22) для среднего значения измеряемой величины J (интенсивности в фокальной точке фокусирующей системы) после подстановки в нее $K = K_0 \exp(i\varphi)$ с учетом аппроксимации (44) и решения (46) принимает вид

$$J_{\max} = (\nu_1 + \nu_2) |K_0|^2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P(n_1, n_2) \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 |\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2)|. \quad (48)$$

Как мы убедились на примерах функций $\tilde{\Gamma}$ при $n_1 + n_2 = 1, 2, 3$ и как следует из общей формулы (32), $|\tilde{\Gamma}| \gg \Gamma$, причем $|\tilde{\Gamma}|$ можно представить в виде

$$|\tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2)| = \Gamma(\rho_1, \rho_2) G(\rho_1, \rho_2; n_1, n_2), \quad \Gamma = \exp(-\langle \psi^2 \rangle/2),$$

где

$$G = \exp(\langle \psi \xi \rangle^2 / \langle \xi^2 \rangle) |C(1; n_1, n_2) / C(0; n_1, n_2)| \geq 1.$$

С использованием этого представления (48) примет вид

$$J_{\max} = (\nu_1 + \nu_2) |K_0|^2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} P(n_1, n_2) \int \int d^2 \rho_1 \int \int d^2 \rho_2 \Gamma(\rho_1, \rho_2) G(\rho_1, \rho_2; n_1, n_2).$$

Если ввести функцию

$$\bar{G}(\rho_1, \rho_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P(n_1, n_2) G(\rho_1, \rho_2; n_1, n_2), \quad (49)$$

то для J_{\max} будем иметь

$$J_{\max} = (\nu_1 + \nu_2) |K_0|^2 \int \int d^2 \rho_1 \int \int d^2 \rho_2 \Gamma(\rho_1, \rho_2) \bar{G}(\rho_1, \rho_2). \quad (50)$$

Сравним эту формулу с формулой (7) для неадаптивной системы, записанной для рассматриваемого случая $M = 1$, $K_0 = \text{const}$, $\partial \Gamma / \partial t = 0$:

$$J = \eta T |K_0|^2 \int \int d^2 \rho_1 \int \int d^2 \rho_2 \Gamma(\rho_1, \rho_2) \quad (\eta T = \nu_1 + \nu_2).$$

Мы видим, что выигрыш, получаемый от применения АОС, описывается множителем $\bar{G} \geq 1$ под знаком интеграла.

При малых $\nu_1 + \nu_2$ в сумме, входящей в (49), достаточно учесть несколько первых членов. На рис. 4 представлена функция $\hat{D}(\rho_1, \rho_2) = D(\rho_1, \rho_2) - 2 \ln \bar{G}(\rho_1, \rho_2)$ при различных значениях $\nu_1 + \nu_2$, представляющая собой средний квадрат непредсказуемых флюктуаций разности фаз $S(\rho_1) - S(\rho_2)$. При этом использовалась формула (35) для $\langle \psi \xi \rangle$ и было принято $\langle \xi^2 \rangle = 1$, $a_1 = 0$. При $\nu_1 + \nu_2 = 1$ использовалась формула (49), в которой учтены все слагаемые с $n_1 + n_2 \leq 3$. При этом погрешность за счет отброшенных членов можно оценить приблизительно в 2%, так как $\sum_{n_1+n_2 < 3} P(n_1, n_2) = 0,981$.

Произведем теперь оценки для больших значений $\nu_1 + \nu_2$. В этом случае в подавляющем большинстве реализаций случайная величина $n_1 + n_2$ также велика, и можно использовать асимптотику функции $\tilde{G}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2)$ при $n_1 + n_2 \gg 1$, но с учетом членов порядка $(n_1 + n_2)^{-1}$, которые дают интенсивность фотонного шума. Согласно результатам Приложения 2, если $p = n_1 + n_2 \gg 1$ и $p^{-1} \ll \langle \xi^2 \rangle \ll 1$, имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\rho_1, \rho_2/n_1, n_2) \approx \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\langle \psi^2 \rangle - \frac{\langle \psi \xi \rangle^2}{\langle \xi^2 \rangle} \left(1 - \frac{2}{(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle} \right) \right] + \right. \\ \left. + i \frac{\langle \psi \xi \rangle}{\langle \xi^2 \rangle} \left(1 - \frac{2}{(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle} \right) \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

Учитывая, что согласно (33а) (см. также (47))

$$\langle \psi \xi \rangle = f(\rho_1) - f(\rho_2), \quad f(\rho) = (1/2) [D(\rho, R_2) - D(\rho, R_1)],$$

получаем, что компенсирующий фазовый сдвиг в этом случае определяется формулой

$$\varphi(\rho; n_1, n_2) = - \frac{f(\rho)}{\langle \xi^2 \rangle} \left(1 - \frac{2}{(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle} \right) \arcsin \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (52)$$

являющейся частным случаем (47), но в то же время имеющей тот же вид, что и в классическом случае [1].

Представив (51) в виде $\tilde{\Gamma} = \Gamma G \exp(i \arg \tilde{\Gamma})$, получим, что при $n_1 + n_2 \gg 1$

$$G = \exp\{(\langle \psi \xi \rangle^2 / 2 \langle \xi^2 \rangle)(1 - 2/(n_1 + n_2) \langle \xi^2 \rangle)\}. \quad (53)$$

Чтобы найти величину \bar{G} , определяемую формулой (49), следует усреднить (53) по $n_1 + n_2$. Но при больших $v_1 + v_2$ распределение вероятностей для $n_1 + n_2$ сосредоточено в узкой области $n_1 + n_2 \approx \approx (v_1 + v_2)[1 \pm (v_1 + v_2)^{-1/2}]$, так что в первом приближении \bar{G} можно получить, заменяя в (53) $n_1 + n_2$ на среднее значение $v_1 + v_2$:

$$\bar{G}(\rho_1, \rho_2) \approx \exp\{(\langle \psi \xi \rangle^2 / 2 \langle \xi^2 \rangle)[1 - 2/(v_1 + v_2) \langle \xi^2 \rangle]\}. \quad (54)$$

Полученная формула описывает средний выигрыш, который обеспечивает АОС в случае большого числа фотонов, регистрируемых в измерительной части прибора.

Сравним формулы (52), (54) с соответствующими формулами, полученными в [1] для классического случая при наличии аддитивного шума ϵ при измерениях разности фаз ξ . Если ξ и ϵ — независимые гауссовые случайные величины, то вместо формул (52), (54) при любом соотношении между $\langle \xi^2 \rangle$ и $\langle \epsilon^2 \rangle$ в классическом случае справедливы формулы

$$\varphi(\rho) = -\frac{f(\rho)}{\langle \xi^2 \rangle + \langle \epsilon^2 \rangle} \xi, \quad \bar{G} = \exp\left[\frac{\langle \psi \xi \rangle^2}{2(\langle \xi^2 \rangle + \langle \epsilon^2 \rangle)}\right].$$

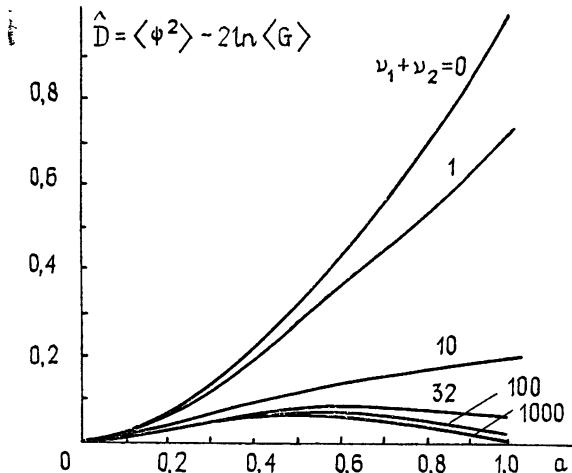


Рис. 4. Средний квадрат остаточных флуктуаций разности фаз относительно точки 0 при различных значениях среднего числа регистрируемых фотонов и при $\langle \xi^2 \rangle = 1$.

Если считать, что $\langle \epsilon^2 \rangle \ll \langle \xi^2 \rangle$, то эти формулы примут вид

$$\varphi(\rho) \approx -[f(\rho)/\langle \xi^2 \rangle][1 - \langle \epsilon^2 \rangle/\langle \xi^2 \rangle]\xi,$$

$$\bar{G} \approx \exp\{(\langle \psi \xi \rangle^2 / 2 \langle \xi^2 \rangle)[1 - \langle \epsilon^2 \rangle / \langle \xi^2 \rangle]\},$$

и, сравнивая их с (52), (54) (при этом в (52) можно заменить случайную величину $n_1 + n_2$ на ее среднее значение $v_1 + v_2$), видим, что они становятся тождественными, если принять

$$\langle \epsilon^2 \rangle = 2/(v_1 + v_2). \quad (55)$$

Таким образом, при $v_1 + v_2 \gg 1$ «фазовый» шум можно приблизенно считать аддитивным с дисперсией, даваемой формулой (55). Эта

формула качественно согласуется с соотношением неопределенностей между числом частиц и фазой, если под эквивалентным числом частиц подразумевать $(n_1 + n_2)/2$.

Проведем численные оценки. На рис. 4 изображены функции $\hat{D}(\rho_1, \rho_2) = D(\rho_1, \rho_2) - 2\ln\bar{G}(\rho_1, \rho_2)$, построенные при $(v_1 + v_2) = 10, 32, 100, 1000$ по формуле (54). При этом принята модель (35) для $D(\rho_1, \rho_2), \langle \xi^2 \rangle = 1, a_1 = 0$. Величина $\hat{D}(R_1, \rho)$ представляет собой средний квадрат непредсказанных флуктуаций фазы $S(\rho) - S(R_1)$.

На основании графиков рис. 4 можно дать оценки возрастания эффективного радиуса когерентности за счет применения АОС. Полагая

$$\hat{D}(R_1, \rho) = [|\rho - R_1|/r_{\text{эфф}}]^{5/3}$$

и выбирая такое значение $a = |\rho - R_1|/|R_2 - R_1|$, при котором \hat{D} имеет максимум, получим оценку снизу для $r_{\text{эфф}}$. При $v_1 + v_2 = 1$ получаем $r_{\text{эфф}} \approx 1,22r_{\text{ког}}$, а при $v_1 + v_2 > 10$ соответственно $r_{\text{эфф}} \geq 2,5r_{\text{ког}}$. Более точную оценку выигрыша следовало бы произвести по формуле (50), и такая оценка будет более благоприятной.

Таким образом, даже при сравнительно небольшом числе фотонов, регистрируемых за время измерения T , в принципе возможно увеличить пространственный радиус когерентности электромагнитного поля.

Оценки, проведенные в разд. 6, носят, разумеется, очень упрощенный характер и относятся к сильно идеализированной схеме. Если говорить о применении рассмотренной схемы АОС в условиях достаточно слабых потоков света, то помимо рассмотренного в этой работе фотонного шума могут оказаться существенными и другие источники шумов и искажений. Кроме того, реальные схемы измерений фазовых сдвигов сложнее, чем рассмотренная выше, поскольку необходимо измерять несколько пространственных разностей фаз и учитывать непостоянство амплитуды поля. Поэтому мы не будем давать здесь оценок предельных световых потоков, для которых может оказаться целесообразным применение рассмотренной схемы АОС.

Основные же выводы из настоящей работы сводятся к следующему:

1) При описании адаптивной оптической системы с регистрацией чисел фотоотсчетов необходимая информация об электромагнитном поле содержится в условных функциях когерентности при заданном числе фотоотсчетов в измерительном канале. Эти функции могут быть рассчитаны по формуле (21).

2) Для выбранного набора измеряемых параметров условная функция когерентности определяет (при помощи уравнения (26)) как вид оптимального фазового корректора, так и оптимальный средний выигрыш.

3) Модуль условной функции когерентности превышает модуль соответствующей априорной функции даже при условии регистрации одного фотона в одном из измерительных каналов.

4) Для электромагнитного поля с гауссовыми флуктуациями фазы, как и в классическом случае, зависимость корректирующего фазового сдвига от координат определяется только видом корреляционной (или структурной) функции фазы, а коэффициент при этом сдвиге зависит от числа фотонов, зарегистрированных в измерительных каналах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть на фотодетекторы подаются две линейные комбинации оптического поля, имеющие вид

$$w_{1,2} = (1/2)(u_1 \pm iu_2) = (1/2)[e^{iS(R_1)} \pm ie^{iS(R_2)}], \quad (\text{П.1.1})$$

тогда $|w_{1,2}|^2 = (1/2)(1 \pm \sin \xi)$, где $\xi = S(R_1) - S(R_2)$. Если чувствительности фотодетекторов одинаковы, то совместное распределение вероятностей их фотоотсчетов имеет вид

$$P(n_1, n_2) = (e^{-v_1} v_1^{n_1}/n_1!) (e^{-v_2} v_2^{n_2}/n_2!), \quad v_{1,2} = (\eta T/2)(1 \pm \sin \xi). \quad (\text{П.1.2})$$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2). \quad (\text{П.1.3})$$

При $n_1 = n_2 = 0$ она не определена, и мы пока будем считать, что $\zeta = q_0$ при $n_1 = n_2 = 0$, а значение q_0 уточним позже. Найдем $\langle \zeta^k \rangle$:

$$\langle \zeta^k \rangle = e^{-(v_1 + v_2)} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^k \frac{v_1^{n_1} v_2^{n_2}}{n_1! n_2!}.$$

Выделим здесь член с $n_1 = n_2 = 0$, а в остальной части суммы произведем замену индексов суммирования, положив $n_1 + n_2 = p$, $n_2 = l$. Тогда $p = 1, 2, \dots, l = 0, 1, \dots, p$; разделив и умножив на $p!$, получим

$$\begin{aligned} \langle \zeta^k \rangle &= e^{-(v_1 + v_2)} \left[q_0^k + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^k p!} \sum_{l=0}^p \frac{p!}{l!(p-l)!} (p-2l)^k \times \right. \\ &\quad \left. \times v_1^{p-2l} (v_1 v_2)^l \right] = e^{-(v_1 + v_2)} \left[q_0^k + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^k p!} A_p(v_1 v_2) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

где введено обозначение

$$A_p(v) = \sum_{l=0}^p C_p^l (p-2l)^k v_1^{p-2l} v^l, \quad C_p^l = \frac{p!}{l!(p-l)!}; \quad (\text{П.1.5})$$

если считать v независимой от v_1 величиной,

$$\begin{aligned} A_p(v) &= \left(v_1 \frac{d}{dv_1} \right)^k \sum_{l=0}^p C_p^l v_1^{p-2l} v^l = \left(v_1 \frac{d}{dv_1} \right)^k v_1^{-p} \sum_{l=0}^p C_p^l (v_1^2)^{p-l} v^l = \\ &= \left(v_1 \frac{d}{dv_1} \right)^k v_1^{-p} (v_1^2 + v)^p = \left(v_1 \frac{d}{dv_1} \right)^k \left(v_1 + \frac{v}{v_1} \right)^p. \end{aligned} \quad (\text{П.1.6})$$

После выполнения дифференцирования мы должны положить $v = v_1 v_2$. Подставляя (П.1.6) в (П.1.4), получаем

$$\langle \zeta^k \rangle = e^{-(v_1 + v_2)} \left\{ q_0^k + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{v_1}{p} \frac{d}{dv_1} \right)^k \left(v_1 + \frac{v}{v_1} \right)^p \Big|_{v=v_1 v_2} \right\}. \quad (\text{П.1.7})$$

Найдем первый и второй моменты ζ . При $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \zeta \rangle &= e^{-(v_1 + v_2)} \left\{ q_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p! p} v_1 p \left(v_1 + \frac{v}{v_1} \right)^{p-1} \left(1 - \frac{v}{v_1^2} \right) \Big|_{v=v_1 v_2} \right\} = \\ &= \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} + e^{-(v_1 + v_2)} \left\{ q_0 - \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.8})$$

При $k = 2$ после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \langle \zeta^2 \rangle &= e^{-(v_1+v_2)} \left\{ q_0^2 - \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \right\} + \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 + \\ &\quad + \left[1 - \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \right] e^{-(v_1+v_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(v_1 + v_2)^p}{p! p}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

Комбинируя (П.1.9) и (П.1.8), можно найти дисперсию

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}^2 &= \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 = \left[1 - \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \right] F(v_1 + v_2) + \\ &\quad + e^{-(v_1+v_2)} [1 - e^{-(v_1+v_2)}] \left[q_0^2 - \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{П.1.10})$$

где введено обозначение

$$F(z) = e^{-z} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p! p}.$$

Выберем теперь q_0 так, чтобы дисперсия σ_{ζ}^2 была минимальной. Очевидно, что для этого следует взять $q_0 = \pm (v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$. Если здесь выбрать верхний знак, то одновременно упрощается и формула для $\langle \zeta \rangle$:

$$\langle \zeta \rangle = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \quad \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 = [1 - \langle \zeta \rangle^2] F(v_1 + v_2). \quad (\text{П.1.11})$$

Но, согласно (П.1.2), $(v_1 - v_2)/(v_1 + v_2) = \sin \xi$, так что получаем

$$\langle \zeta \rangle = \sin \xi, \quad \langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2 = \cos^2 \xi F(v_1 + v_2). \quad (\text{П.1.12})$$

Функция $F(z)$ может быть записана в виде

$$F(z) = e^{-z} \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt = e^{-z} [\text{Ei}(z) - \ln z - \gamma], \quad (\text{П.1.13})$$

где $\gamma = 0,577215 \dots$ — постоянная Эйлера, а $\text{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция. $F(x)$ имеет асимптотики при $|x| \ll 1$ и $x \gg 1$:

$$F(x) = \begin{cases} x - (3/4)x^2 + (11/36)x^3 - \dots & \text{при } |x| \ll 1 \\ 1/x + 1/x^2 + \dots & \text{при } x \gg 1 \end{cases}$$

Максимальное значение (0,5172) $F(x)$ принимает при $x \approx 1,5$. Как видно из формулы (П.1.12), при $v_1 + v_2 \gg 1$ дисперсия σ_{ζ}^2 мала. Она мала и в том случае, когда $\xi \approx \pm \pi/2$. В этом случае один из счетчиков находится в минимуме интерференционной картины. Наибольшее возможное среднеквадратичное отклонение соответствует $\cos^2 \xi = 1$ и $F = F_{\max}$; оно равно $\sqrt{F_{\max}} \approx 0,72$.

Отметим, что можно рассмотреть схему измерений, в которой одновременно оцениваются $\sin \xi$ и $\cos \xi$. Для этого следует образовать три комбинации поля:

$$w_{1,2} = (1/3) [e^{iS_1} + e^{i(S_2 \pm \pi/3)}], \quad w_3 = (1/3) [e^{iS_1} - e^{iS_2}]. \quad (\text{П.1.14})$$

Тогда

$$|w_{1,2}|^2 = (1/9) [2 + \cos \xi \pm \sqrt{3} \sin \xi], \quad |w_3|^2 = (2/9)(1 - \cos \xi).$$

По зарегистрированным числам фотоотсчетов n_1, n_2, n_3 можно получить независимые статистические оценки сразу для $\sin \xi$ и $\cos \xi$. Если произвести эти оценки по методу максимального правдоподобия, варьируя функцию правдоподобия $\ln P = \text{const} + n_3 \ln(1 - \cos \xi) + n_1 \ln(2 + \cos \xi + \sqrt{3} \sin \xi) + n_2 \ln(2 + \cos \xi - \sqrt{3} \sin \xi)$ независимо по $\sin \xi$ и $\cos \xi$, то для этих оценок (обозначаемых как $\{\sin \xi\}$ и $\{\cos \xi\}$) получим

$$\{\cos \xi\} = (n_1 + n_2 - 2n_3)/(n_1 + n_2 + n_3), \quad \{\sin \xi\} = \sqrt{3}(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2 + n_3). \quad (\text{П.1.15})$$

Так как квантовомеханические операторы синуса и косинуса фазы некоммутативны [4], то, вообще говоря,

$$\{\sin \xi\}^2 + \{\cos \xi\}^2 \neq 1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим асимптотику функции $\langle e^{i\lambda \xi} / n_1, n_2 \rangle$ при $n_1 + n_2 \gg 1$. Будем исходить при этом из формулы (32). Записав $C(\lambda; n_1, n_2)$ в виде

$$C(\lambda; n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \xi^2 \rangle}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{f(\xi)\} d\xi, \quad (\text{П.2.1})$$

где

$$f(\xi) = -\frac{\xi^2}{2 \langle \xi^2 \rangle} + i\lambda \beta \xi + n_1 \ln(1 + \sin \xi) + n_2 \ln(1 - \sin \xi), \quad (\text{П.2.2})$$

применим к вычислению (П.1) метод перевала. Введем вместо n_1, n_2 новые переменные

$$p = n_1 + n_2, \quad q = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2); \quad n_{1,2} = (p/2)(1 \pm q). \quad (\text{П.2.3})$$

Нас интересует асимптотика $C(\lambda; n_1, n_2)$ при $p \rightarrow \infty$. Дифференцируя (П.2.2), получаем

$$f'(\xi) = -\xi/\langle \xi^2 \rangle + i\lambda \beta + (p/\cos \xi)(q - \sin \xi); \quad (\text{П.2.4})$$

$$f''(\xi) = -1/\langle \xi^2 \rangle - (p/\cos^2 \xi)(1 - q \sin \xi). \quad (\text{П.2.5})$$

Перевальные точки определяются, как корни уравнения $f'(\xi_*) = 0$ или

$$q - \sin \xi_* = (\cos \xi_*/p)(\xi_*/\langle \xi^2 \rangle - i\lambda \beta). \quad (\text{П.2.6})$$

Легко найти разложение решения этого уравнения по степеням p^{-1} :

$$\xi_* = \xi_0 + ap^{-1} + \dots, \quad \xi_0 = \arcsin q, \quad a = i\lambda \beta - \xi_0/\langle \xi^2 \rangle. \quad (\text{П.2.7})$$

В (П.2.7) мы учли только ближайший к началу координат корень уравнения (П.2.6), так как в случае $\langle \xi^2 \rangle \ll 1$, который мы собираемся рассматривать, остальные перевальные точки дают (из-за множителя $\exp(-\xi^2/2\langle \xi^2 \rangle)$) экспоненциально малый вклад. Подставляя (П.2.7) в (П.2.2), (П.2.5) и используя далее стандартную процедуру, после нескольких громоздких выкладок можно получить следующую формулу для $\langle e^{i\lambda \xi} / n_1, n_2 \rangle$, справедливую с точностью до членов порядка p^{-1} :

$$\begin{aligned} \langle e^{i\lambda \xi} / n_1, n_2 \rangle \approx & \exp \{-(\lambda^2/2)[\Delta^2 + 2\beta^2/p] + \\ & + i\lambda \beta [1 - 2/p \langle \xi^2 \rangle - \operatorname{tg} \xi_0/2p \xi_0] \xi_0\}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.8})$$

Случайная величина $\xi_0 = \arcsin(n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ представляет собой оценку разности фаз по измеренным числам фотоотсчетов. Ясно, что $|\xi_0| \sim \sqrt{\langle \xi^2 \rangle} \ll 1$. В этом случае $(\operatorname{tg} \xi_0/\xi_0) \approx 1$ и последним слагаемым в показателе экспоненты в (П.2.8) можно пренебречь:

$$\langle e^{i\lambda\psi}/n_1, n_2 \rangle \approx \exp \{ - (\lambda^2/2) [\Delta^2 + 2\beta^2/p] + \\ + i\lambda\beta [1 - 2/p \langle \xi^2 \rangle] \xi_0 \}. \quad (\text{П.2.9})$$

Поскольку поправки порядка p^{-1} должны быть малыми по сравнению с основными членами, полученная формула справедлива при условиях

$$n_1 + n_2 \gg 1, \quad 1/(n_1 + n_2) \ll \langle \xi^2 \rangle \ll 1. \quad (\text{П.2.10})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И.—Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 7, с. 861, 872.
2. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.—М.: Наука, 1967.
3. Muller R. A., Buffington A.—J. Opt. Soc. Am., 1974, 64, № 9, р. 1200.
4. Каррузерс П., Ньето М.—В сб.: Когерентные состояния в квантовой теории.—М: Мир, 1972.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
31 августа 1981 г.

QUANTUM NOISE IN ADAPTIVE OPTICAL SYSTEMS. II

V. I. Tatarskij

Based on the general theory developed in the first part of the paper an example is considered of a random electromagnetic field with a constant amplitude and Gaussian phase fluctuations for which the phase difference at two points may be measured by two photon counters. For such a field conventional coherence functions have been calculated which correspond to the registration of this or that number of photons by the counters. It is shown that a gain may be obtained from the adaptive optical system with any weak light fluxes.

In supplement I statistical moments are analysed for the phase difference sine measured by two photon counters.

ИНФОРМАЦИЯ

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XXII, № 2, 1982 г.

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

Н. А. Лотова, И. В. Чашей. Дисперсионный анализ мерцаний для протяженной среды.

Исследовано влияние протяженности среды на характерную форму дисперсионной зависимости межпланетных мерцаний. Рассмотрены две модели движения среды: сферически-симметричный солнечный ветер и быстрый поток на фоне сферически-симметричного ветра. Установлено, что дисперсионная кривая в области высоких частот определяется преимущественно скоростями в близко расположенных к наблюдателю областях среды.

И. М. Черток. Оценки показателя энергетического спектра протонов по данным о солнечных микроволновых радиовсплесках.

Разработан метод краткосрочного прогнозирования показателя γ энергетического спектра потоков протонов вблизи Земли с энергиями в десятки M_eV по отношению максимальных интенсивностей солнечных радиовсплесков на частотах 9 и $15,4$ ГГц (S_9/S_{15}). По данным о 35 протонных событиях определена зависимость между параметрами S_9/S_{15} и γ для вспышек на западной половине диска, а также гелиодолготная поправка для протонов, приходящих к Земле от восточных вспышек.

(Продолжение см. с. 1045)