

УДК 538 574.6

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ *H*-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В. П. Чумаченко

Приводится метод решения двумерной задачи дифракции *H*-поляризованных электромагнитных волн на замкнутых или незамкнутых цилиндрических поверхностях, контур поперечного сечения которых является ломаной линией. Алгоритм обобщается на случай поверхностей конечной кривизны.

Теория дифракции *H*-поляризованных электромагнитных волн на цилиндрических экранах основывается, как правило, на сингулярных интегральных или интегродифференциальных уравнениях 1-го рода, решение которых ищется с применением методов регуляризации [1-5]. Отмечается [4, 6, 7], что при реализации такого подхода возникают затруднения, связанные с формой рассеивающей поверхности, что затрудняет создание общего алгоритма решения этой задачи.

В настоящей работе метод, использованный в [8] при решении задачи дифракции *E*-волн, модифицируется для рассматриваемого случая дифракции *H*-волн. Задача сводится к решению системы интегродифференциальных уравнений относительно функций, сумма которых представляет искомое вторичное поле. Каждая такая функция имеет в качестве носителя определенный кусок поверхности, что позволяет учесть при построении алгоритма известные локальные особенности решения. Рассмотрены случаи, когда поперечное сечение поверхности является ломаной и когда контур сечения состоит из звеньев конечной кривизны. Вид получаемого решения не зависит от формы поверхности.

Дифракция на многоугольниках. Пусть контур поперечного сечения поверхности *S* представляет собой ломаную линию (рис. 1). Следуя [8], опишем около каждого *i*-го ее звена длиной $2f_i$ эллипс, фокусы которого находятся на концах отрезка. Введем для каждого звена декартову (x_i, y_i) и эллиптическую системы координат, связанные соотношениями

$$\begin{aligned} x_i &= f_i \operatorname{ch} \xi_i \cos \eta_i, \\ y_i &= f_i \operatorname{sh} \xi_i \sin \eta_i. \end{aligned} \tag{1}$$

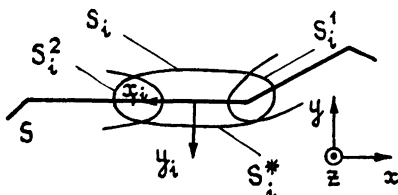


Рис. 1.

Эллипс определяется уравнением $\xi_i = a_i = \text{const}$ и при $a_i \rightarrow 0$ стягивается в соответствующее звено ломаной.

Рассеивающую поверхность S приблизим поверхностью $\bigcup_{i=1}^N S_i$, если она замкнута, и $\left(\bigcup_{i=1}^N S_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^N S_i^*\right)$, если она разомкнута (N — число звеньев).

При дифракции H -волн на идеально проводящей поверхности S должно выполняться условие

$$\partial u(r)/\partial n + \partial u_0(r)/\partial n = 0 \quad \forall r \in S, \quad (2)$$

где u_0 — первичное поле, n — нормаль к поверхности. Искомое вторичное поле u представим в виде

$$u = \sum_{i=1}^N u_i, \quad (3)$$

где функции u_i ($i = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяют уравнению Гельмгольца при $\xi_i \geq a_i$.

Поскольку граничные условия на S_i^* произвольны в случае замкнутой поверхности, условию (2) можно удовлетворить как для замкнутой, так и для разомкнутой поверхности, положив

$$\frac{\partial u_i(r)}{\partial n} = \begin{cases} -\sum_{j \neq i} \frac{\partial u_j(r)}{\partial n} - \frac{\partial u_0(r)}{\partial n} & \forall r \in S_i \cup S_i^* \\ 0 & \forall r \in S_i^! \cup S_i^? \end{cases} \quad (4)$$

Тогда, согласно [9], для определения u_i можно получить систему

$$u_i = - \int_{S_i \cup S_i^*} \left[\sum_{j \neq i} \frac{\partial u_j(r')}{\partial n'_i} + \frac{\partial u_0(r')}{\partial n'_i} \right] G_i(r/r') dS' \quad (5)$$

$(i, j = 1, 2, \dots, N),$

где нормаль n_i направлена внутрь i -го эллипса. Функция Грина G уравнения Гельмгольца, построенная согласно общей методике [10] и удовлетворяющая однородным граничным условиям Неймана при $\xi_i = 0$ и условию излучения, имеет вид

$$G_i = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n^2}{2(-1)^n \text{Me}_n^{(2)'}(0, q_i)} \text{ce}_n(\eta_i, q_i) \text{ce}_n(\eta'_i, q_i) \times \\ \times [\text{Ce}_n(\xi'_i, q_i) \text{Fey}'_n(0, q_i) - \text{Fey}_n(\xi'_i, q_i) \text{Ce}'_n(0, q_i)] \times \\ \times \text{Me}_n^{(2)}(\xi_i, q_i) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n^2}{2(-1)^n \text{Ne}_n^{(2)'}(0, q_i)} \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{se}_n(\eta'_i, q_i) \times \\ \times [\text{Se}_n(\xi'_i, q_i) \text{Gey}'_n(0, q_i) - \text{Gey}_n(\xi'_i, q_i) \text{Se}'_n(0, q_i)] \text{Ne}_n^{(2)}(\xi_i, q_i) \quad \forall \xi_i \geq \xi'_i. \quad (6)$$

Здесь c_n^2 , d_n^2 — известные постоянные, se_n , ce_n , Se_n , Ce_n , Fey_n , Gey_n , $\text{Me}_n^{(2)}$, $\text{Ne}_n^{(2)}$ — обычные и модифицированные функции Матье соответственно [11, 12], $q_i = (f_i k/2)^2$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны.

Учитывая (6) и соотношения симметрии для функций Матье, систему (5) можно преобразовать к виду

$$u_i = -\frac{2}{\pi} \int_{-f_i}^{f_i} \left[\sum_{l \neq i} \frac{\partial u_j(r')}{\partial y'_l} + \frac{\partial u_0(r')}{\partial y'_i} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ne}_n^{(2)}(\xi_i, q_i)}{\text{Ne}_n^{(2)'}(0, q_i)} \times \\ \times \text{se}_n(\eta_i, q_i) \text{se}_n(\eta'_i, q_i) dx'_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

Отсюда вытекает, что u_i можно представить в виде

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \frac{\text{Ne}_n^{(2)}(\xi_i, q_i)}{\text{Ne}_n^{(2)'}(0, q_i)} \text{se}_n(\eta_i, q_i). \quad (8)$$

Отметим, что, как следует из (4), (8), при $a_i = 0$ $\partial u_i / \partial n_i$ и u_i антисимметричны по отношению к различным сторонам поверхности i -го элемента. Выбор u_i в виде (8) обеспечивает выполнение условий на ребре.

Подставляя (8) в (7), получим для определения коэффициентов D'_n бесконечную систему алгебраических уравнений, которая может быть решена методом редукции. Отметим, что на практике желательно иметь возможность пользоваться звеньями небольшой длины, что позволяет выбрать их одинаковыми, не уменьшая универсальности алгоритма. Однако, как показали численные эксперименты, в отличие от случая задачи дифракции E -волн при малых длинах звеньев в (8) нельзя ограничиться одним слагаемым, что приводит к увеличению порядка решаемой системы алгебраических уравнений. Этого можно избежать, используя при построении искомых функций априорные свойства решения.

Выясним физический смысл величины $u_i(r \in S_i^*)$. Так как функции $u_j(r)$ непрерывны вне поверхности своего элемента, то скачок магнитного поля при переходе через поверхность i -го элемента будет равен $2u_i(r \in S_i^*)$, т. е. эта величина имеет смысл полного поверхностного тока, текущего в поперечном направлении. Последнее дает возможность предположить, что, когда длины звеньев малы в сравнении с длиной волны, $u_i(r \in S_i^*)$ мало изменяется на поверхности своего элемента и может быть с достаточной степенью точности заменена линейной функцией. Исходя из физического смысла величины $u_i(r \in S_i^*)$, следует отметить, что $u_{i-1}(r \in S_{i-1}^*)$ и $u_i(r \in S_i^*)$ будут иметь одинаковые предельные значения в месте стыка их элементов поверхности. Обозначив значение поверхностного тока в месте соединения i -го и $i-1$ -го элементов через $2C_i$, будем искать $u_i(r \in S_i^*)$ в виде

$$u_i(r \in S_i^*) = C_{i+1} \varphi^+(x_i) + C_i \varphi_i^-(x_i), \quad (9)$$

где

$$\varphi_i^+(x_i) = \frac{f_i + x_i}{2f_i}, \quad \varphi_i^-(x_i) = \frac{f_i - x_i}{2f_i}.$$

Если элемент прилегает к ребру, то значения φ_i^+ , φ_i^- выберем, исходя из характера поведения у ребра продольной компоненты магнитного поля [13]. Так, например, если ребро образовано i -м и $i-1$ -м элементами, положим $\varphi_i^+ = [(f_i + x_i)/2f_i]^\tau$, где $\tau = \pi/\alpha$ и α — угол при ребре. Если элемент находится на краю разомкнутой поверхности, то $\tau = 1/2$

и один из коэффициентов в (9) полагаем равным нулю, в силу обращения в нуль поверхностного тока на кромке поверхности. Применяем к контуру $S_i^1 \cup S_i \cup S_i^2 \cup S_i^*$ вторую формулу Грина, устремляя $a_i \rightarrow 0$ и учитывая антисимметрию u_i , $\partial u_i / \partial n_i$, $\partial G / \partial n_i$ по отношению к различным сторонам поверхности i -го элемента, получим, что при $\xi_i > 0$ u_i можно представить в виде

$$u_i = -2 \int_{-f_i}^{f_i} u_i(r' \in S_i^*) \frac{\partial G(r/r')}{\partial n_i'} dx_i' \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$G(r/r') = -(i/4) H_0^{(2)}(k|r-r'|) \quad (i^2 = -1). \quad (10)$$

Положим в (7) $r \in S_i^*$ и представим u_i в виде (9). Умножим затем обе части полученного равенства на $(2Ne_1^{(2)'}(0, q_i)) \times [(\pi Ne_1^{(2)}(0, q_i)) se_1(\eta_i, q_i)]^{-1}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π . С учетом соотношений ортогональности для функций se_m [12] мы получим

$$S_i^- C_i + S_i^+ C_{i+1} = -\frac{2}{\pi} \int_{-f_i}^{f_i} \left[\sum_{l \neq i} \frac{\partial u_j(r')}{\partial y_l'} + \frac{\partial u_0(r')}{\partial y_i'} \right] se_1(\eta_i', q_i) dx_i' \quad (11)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$S_i^\pm = \frac{2}{\pi} \frac{Ne_1^{(2)'}(0, q_i)}{Ne_1^{(2)}(0, q_i)} \int_0^\pi \varphi_i^\pm(x_i) se_1(\eta_i, q_i) d\eta_i. \quad (12)$$

Используя затем для представления u_j формулы (9), (10), получим для определения постоянных C_i систему алгебраических уравнений

$$[S_i^- + a_{i, i-1}^+] C_i + [S_i^+ + a_{i, i+1}^-] C_{i+1} + \sum_{j \neq i, i+1} [a_{i, j}^- + a_{i, j-1}^+] C_j = b_i$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

где

$$a_{i, j}^\pm = \frac{4}{\pi} \int_{-f_i}^{f_i} \left[\int_{-f_j}^{f_j} \varphi_j^\pm(x_j') \frac{\partial G(r'/r'')}{\partial y_j'' \partial y_i'} dx_j'' \right] se_1(\eta_i', q_i) dx_i',$$

$$(14)$$

$$b_i = -\frac{2}{\pi} \int_{-f_i}^{f_i} \frac{\partial u_0(r')}{\partial y_i'} se_1(\eta_i', q_i) dx_i'.$$

Полученная система и формулы (9), (10) решают задачу. Заметим, однако, что в рамках выбранной аппроксимации (см. (9)) к $u_i(r \in S_i^*)$ можно прибавить любую функцию вида cx_i без изменения интегралов (12). При малых длинах звеньев такая добавка также мало изменит и интегралы (10). Это приводит к осцилляциям решения при использовании элементов небольшой длины.

Для получения устойчивого решения была использована основная идея метода саморегуляризации [14]. При вычислении интегралов считалось, что для всех звеньев, кроме прилегающих к ребрам, в силу малого изменения u_i на поверхности своего элемента, $u_i(r \in S_i^*)$ на каждой трети интервала интегрирования можно вынести за знак интегра-

ла, заменив значением в центре соответствующего интервала. Для этого достаточно в (14) положить

$$\varphi_j^+ = \begin{cases} 1/6 \quad \forall x_j'' \in (-f_j, -f_j/3) \\ 1/2 \quad \forall x_j'' \in (-f_j/3, f_j/3), & \varphi_j^- = 1 - \varphi_j^+ \\ 5/6 \quad \forall x_j'' \in (f_j/3, f_j) \end{cases}$$

Описанный алгоритм был реализован в виде программы для ЭВМ на языке ФОРТРАН-IV. С целью упрощения вычислений контур поперечного сечения разбивается на звенья одинаковой длины $l = 2f$. Интегралы (14) вычисляются по формуле Симпсона, а при $|i - j| = 1$ — методом Эрмита [15]. Изменение рассматриваемых классов структур производится путем замены подпрограммы, в которой формируются массивы, содержащие информацию о геометрических свойствах рассеивающих объектов.

В качестве модельной задачи использовалась задача дифракции H -волн на полосе, для которой можно получить точное решение [16]. Такое решение дает формула (8) при $N = 1$,

$$D_n^1 = -\frac{2}{\pi} \int_{-f}^{f} \frac{\partial u_0(r')}{\partial y_1'} \operatorname{se}_n(\gamma_1', q_1) dx_1'. \quad (15)$$

В табл. 1 приведены результаты расчета диаграммы направленности $F(\beta)$ вторичного поля при нормальном ($\beta = 0^\circ$) падении плоской волны на полосу шириной $1,272\lambda$ в зависимости от длины элементарного звена.

Таблица 1

β , град	τ	1/2				1
		N				
		12	8	6	4	8
		l/λ				
		0,106	0,159	0,212	0,318	0,159
5	0,979	0,979	0,979	0,979	0,977	0,977
25	0,599	0,599	0,593	0,589	0,558	0,563
45	0,269	0,269	0,264	0,267	0,274	0,228
65	0,163	0,163	0,167	0,173	0,224	0,163
85	0,035	0,035	0,036	0,038	0,052	0,037

Из табл. 1 следует, что при $l/\lambda \leq 0,2$ наибольшее значение относительной ошибки $\max \Delta F(\beta) / \max F(\beta)$ не превосходит 0,01. В последней колонке приведены результаты для случая, когда на прибрежных звеньях $u_i(r \in S_i^*)$ тоже аппроксимировались линейными функциями. Видно, что при этом заметно ухудшается точность решения.

Решение задач дифракции H -волн на замкнутых многоугольниках показало, что при расчете диаграмм направленности вторичного поля первые два знака после запятой стабилизируются также начиная со значений $l \approx 0,2\lambda$, но замена аппроксимаций у ребер на линейные менее заметно влияет на результат.

На рис. 2 приведены рассчитанные диаграммы рассеяния при дифракции плоской H -волны на цилиндре с треугольным поперечным сечением ($N = 30$, $l = 0,1\lambda$). Точками помечены результаты счета при линейной аппроксимации у ребер ($N = 18$, $l = 0,167\lambda$) в области их

наибольшего отклонения от полученных кривых. С уменьшением l различие убывает.

Таким образом, для достижения достаточной для практики точности достаточно в среднем ограничиться одним неизвестным на $0,2\lambda$ длины контура поперечного сечения поверхности.

Случай конечной кривизны поверхности. Пусть поперечное сечение поверхности состоит из кусков гладких линий, кривизна которых может быть отличной от нуля. Разобьем весь контур поперечного сечения

на криволинейные звенья так, чтобы в пределах каждого элемента кривизна линии изменялась мало. Как и в случае ломаной, введем для каждого звена систему ортогональных поверхностных координат (x_i, y_i) , где x_i направлено по касательной к контуру поверхности, а также систему координат (ξ_i, η_i) , которые связаны с координатами (x_i, y_i) соотношениями (1). Вычисляя метрические коэффициенты системы (ξ_i, η_i) , можно убедиться, что они будут отличаться от метрических коэффициентов

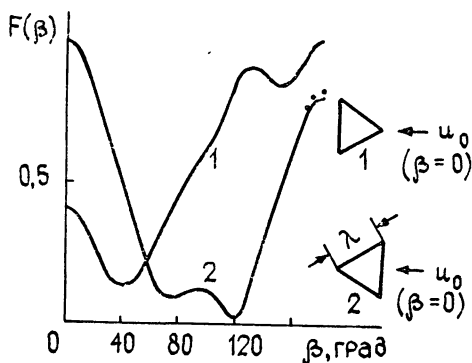


Рис. 2.

эллиптической системы на слагаемые первого порядка малости по отношению к f_i/R_i , где R_i — радиус кривизны i -го звена. Это значит, что если пренебречь этими величинами, то вблизи поверхности элементов уравнение Гельмгольца в координатах (ξ_i, η_i) будет иметь такой же вид, как и в эллиптических координатах, и для решения задачи можно воспользоваться описанным выше методом.

Таблица 2

β, град	Точно	N		
		24	18	12
		l/R		
		0,262	0,349	0,524
0	0,884	0,882	0,880	0,859
40	0,699	0,704	0,705	0,693
80	0,739	0,748	0,756	0,740
120	0,825	0,834	0,840	0,842
160	0,867	0,872	0,874	0,872

Решение модельных задач для цилиндров различных радиусов показало, что уже при $l \leq 0,3R$ величина относительной ошибки $\max \Delta F(\beta) / \max F(\beta) \leq 0,01$. В табл. 2 приведены результаты расчета диаграммы направленности вторичного поля при дифракции плоской H -волны на цилиндре радиуса $R = 0,3\lambda$ в зависимости от числа звеньев N , на которые разбивался контур сечения. Точные значения рассчитаны согласно [17]. Тестовое решение задач дифракции на некоторых незамкнутых круговых цилиндрических поверхностях дало результаты, совпадающие с результатами работ [5-7]. Вычисления производились при помощи той же программы, что и в случае многоугольников.

Отметим, что если длина всего контура поперечного сечения невелика по сравнению с наименьшим радиусом его кривизны, то решение может быть получено без разбиения на вспомогательные элементы с помощью формулы (10), где $u_1(r_1 \in S_1^*)$ вычисляется по формулам (8), (15),

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Пименов Ю. В.—Труды Моск. электротехн. ин-та связи, 1970, вып. 1, с. 125.
- 2 Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Пименов Ю. В.—В сб.: Вычислительные методы и программирование.—М.: Гос. ун-т, 1973, вып. 20, с. 106.
- 3 Захаров Е. В.—В сб.: Вычислительные методы и программирование.—М.: Гос. ун-т, 1978, вып. 28, с. 99.
- 4 Захаров Е. В., Пименов Ю. В.—Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 4, с. 678.
- 5 Захаров Е. В., Пименов Ю. В.—Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 620.
- 6 Захаров Е. В., Пименов Ю. В.—Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 6, с. 1011.
- 7 Назарчук З. Т.—Радиотехника и электроника, 1981, 26, № 4, с. 701.
- 8 Чумаченко В. П.—Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1480.
- 9 Чумаченко В. П.—Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 1004
- 10 Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики.—М.: ИЛ, 1958 — Т. 1.
- 11 Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье — М.: ИЛ, 1953.
- 12 Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.—М.: Наука, 1967.
- 13 Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов.—М.: Мир, 1974.
- 14 Дмитриев В. И., Захаров Е. В.—В сб.: Вычислительные методы и программирование.—М.: Гос. ун-т, 1968, вып. 10, с. 49.
- 15 Бахвалов Н. С. Численные методы.—М.: Наука, 1975.
- 16 Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.—М.: ИЛ, 1964.
- 17 Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн.—М.: Сов радио, 1948.

Запорожский машиностроительный
институт

Поступила в редакцию
7 июля 1981 г.,
после переработки
2 марта 1982 г.

SOLUTION OF A PROBLEM OF DIFFRACTION OF H -POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVES BY PIECE-SMOOTH CYLINDRICAL SURFACES

V. P. Chumachenko

A solution method is presented for two-dimensional problem of diffraction of H -polarized electromagnetic waves by closed or unclosed cylindrical surfaces with contour of transverse section being a broken line. The algorithm is generalized for the case of surfaces of finite curvature.
