

УДК 621.396.677.7

ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ ДВУХ ПЛОСКИХ ВОЛНОВОДОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ТРЕМЯ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

С. М. Журав, С. Ю. Коршунков

Рассматривается задача излучения ТЕМ-волны из двух плоских волноводов, образованных тремя идеально проводящими полуплоскостями. Способ решения основан на методе Винера—Хопфа и выделении дополнительных областей. Функциональные уравнения сводятся к одной бесконечной системе алгебраических уравнений, которая решается методом редукции. Приведены численные результаты.

Задача об излучении из двух плоских волноводов представляет практический интерес как исследование излучателей с малой направленностью и их взаимосвязи. Эта задача является обобщением задачи об излучении из полубесконечного плоского волновода [1], решение которой было использовано в работе [2] для приближенного построения решения задачи об излучении из двух плоских волноводов. Однако способ решения, примененный в [2], не позволяет оценить точность полученных результатов. Численные данные в этой работе не дают полного описания задачи.

В настоящей работе проведено более полное численное исследование задачи. Способ решения, примененный нами, аналогичен использованному в работе [3], где функциональное уравнение, описывающее задачу об излучении из плоского волновода с фланцем, сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд собственных волн в плоском волноводе.

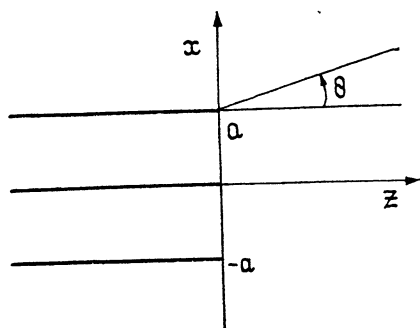


Рис. 1. Система двух плоских волноводов, образованных тремя полуплоскостями.

Рассмотрим два плоских волновода, образованных идеально проводящими, тонкими полуплоскостями ($z < 0, x = 0, \pm a$) (рис. 1). Пусть один из волноводов ($0 < x < a$) возбуждается основной волной плоского волновода E_{00} с поперечной компонентой магнитного поля

$$H_y^{(i)}(x, z) = \exp_1(ikz),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Введем разбиение на подобласти по продольной координате:

1. $z > 0, a < x < \infty$; 2. $z > 0, 0 < x < a$;
3. $z > 0, -a < x < 0$; 4. $z > 0, -\infty < x < -a$.

Полное поле в волноводах представим в виде суперпозиции собственных волн волновода E_{0n} :

$$H_y(x, z) = \exp(ikz) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\pi n x/a) \exp(-i\alpha_n z)$$

при $z < 0, 0 < x < a$,

$$H_y(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\pi n x/a) \exp(-i\alpha_n z)$$

при $z < 0, -a < x < 0$, где $\alpha_n = \sqrt{k^2 - \pi^2 n^2/a^2}$ — постоянные распространения, A_n, B_n — искомые амплитуды возбужденных волн.

Запишем фурье-преобразование возбужденного поля $H_y(x, z)$:

$$\varphi_+^{(l)}(x, \alpha) = \int_0^{\infty} H_y(x, z) \exp(i\alpha z) dz, \quad \varphi_-^{(l)}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^0 H_y(x, z) \exp(i\alpha z) dz, \quad (1)$$

где индекс $l = 1, 2, 3, 4$ означает подобласть, а индексы «+» и «-» присваиваются функциям, регулярным соответственно в верхней и нижней полуплоскостях комплексной переменной α . Неизвестные функции (1) удовлетворяют фурье-преобразованию волнового уравнения, решение которого с учетом значений поля и его производной при $z=0$ можно записать в виде

$$\varphi_+^{(1)}(x, \alpha) + \varphi_-^{(1)}(x, \alpha) = A \exp(-\gamma x); \quad (2.1)$$

$$\varphi_+^{(4)}(x, \alpha) + \varphi_-^{(4)}(x, \alpha) = B \exp(\gamma x); \quad (2.2)$$

$$\varphi_+^{(2)}(x, \alpha) = C \operatorname{ch} \gamma x + D \operatorname{sh} \gamma x + \frac{i}{\alpha + k} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha - \alpha_n} \cos \frac{\pi n x}{a}; \quad (2.3)$$

$$\varphi_+^{(3)}(x, \alpha) = E \operatorname{ch} \gamma x + F \operatorname{sh} \gamma x + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\alpha - \alpha_n} \cos \frac{\pi n x}{a}, \quad (2.4)$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$. При получении (2.1) и (2.2) были использованы условия излучения ($\operatorname{Re}(\gamma) > 0$).

Подставляя в выражения (2) и их производные по x $x=0, \pm a$, исключая A, B, C, D, E и F и используя соотношения

$$\varphi_+^{(2)}(0, \alpha) = \varphi_+^{(3)}(0, \alpha) \text{ и } \varphi_+^{(2)'}(0, \alpha) = \varphi_+^{(3)'}(0, \alpha),$$

следующие из непрерывности касательных составляющих поля на границе областей 2 и 3, преобразуем систему уравнений (2) к виду

$$S_+'(\alpha) = -\gamma [D_+(\alpha) + \varphi_-^{(1)}(a, \alpha) - \varphi_-^{(4)}(-a, \alpha)]; \quad (3.1)$$

$$D_+'(\alpha) = -\gamma [S_+(\alpha) + \varphi_-^{(1)}(a, \alpha) + \varphi_-^{(4)}(-a, \alpha)]; \quad (3.2)$$

$$S_+(\alpha) - \frac{i}{\alpha + k} = D_+'(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \gamma a}{\gamma \operatorname{sh} \gamma a} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n + B_n}{\alpha - \alpha_n}; \quad (3.3)$$

$$D_+(\alpha) - \frac{i}{\alpha + k} = S_+'(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \gamma a}{\gamma \operatorname{ch} \gamma a} - \frac{i}{\operatorname{ch} \gamma a} \left[\frac{1}{\alpha + k} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - B_n}{\alpha - \alpha_n} \right] + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n - B_n}{\alpha - \alpha_n}. \quad (3.4)$$

Здесь

$$S_+(\alpha) = \varphi_+^{(2)}(\alpha, \alpha) + \varphi_+^{(3)}(-\alpha, \alpha), \quad D_+(\alpha) = \varphi_+^{(2)}(\alpha, \alpha) - \varphi_+^{(3)}(-\alpha, \alpha).$$

Исключая из системы уравнений (3) $S_+(\alpha)$ и $D_+(\alpha)$, получаем два функциональных уравнения относительно неизвестных функций $S'_+(\alpha)$ и $D'_+(\alpha)$:

$$S'_+(\alpha) \frac{\text{th } \gamma \alpha + 1}{\gamma} + \xi_-(\alpha) = \frac{i}{\text{ch } \gamma \alpha} \left[\frac{1}{\alpha + k} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - B_n}{\alpha - \alpha_n} \right] - \frac{i}{\alpha + k}; \quad (4.1)$$

$$D'_+(\alpha) \frac{\text{cth } \gamma \alpha + 1}{\gamma} + \zeta_-(\alpha) = -\frac{i}{\alpha + k}. \quad (4.2)$$

Здесь введены обозначения

$$\xi_-(\alpha) = \varphi_-^{(1)}(\alpha, \alpha) - \varphi_-^{(4)}(-\alpha, \alpha) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n - B_n}{\alpha - \alpha_n},$$

$$\zeta_-(\alpha) = \varphi_-^{(1)}(\alpha, \alpha) + \varphi_-^{(4)}(-\alpha, \alpha) + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n + B_n}{\alpha - \alpha_n}.$$

Функциональные уравнения (4) позволяют провести решение задачи. Факторизация функций

$$\frac{\text{cth } \gamma \alpha + 1}{\gamma} = H_+(\alpha) H_-(\alpha), \quad H_-(\alpha) = H_+(-\alpha)$$

и

$$\frac{\text{th } \gamma \alpha + 1}{\gamma} = K_+(\alpha) K_-(\alpha), \quad K_-(\alpha) = K_+(-\alpha)$$

известна, например, из [4].

Поделив уравнения (4.1) и (4.2) на $K_-(\alpha)$ и $H_-(\alpha)$ соответственно, разложив правые части этих уравнений на слагаемые, регулярные в верхней и нижней полуплоскостях переменной α , и воспользовавшись теоремой Лиувилля, получим

$$S'_+(\alpha) K_+(\alpha) - i \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \frac{\pi(m+0,5)}{a^2 \hat{\alpha}_m K_+(\hat{\alpha}_m)} \times \right. \\ \left. \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n - B_n}{\hat{\alpha}_m - \alpha_n} - \frac{1}{k - \hat{\alpha}_m} \right] \frac{1}{\alpha + \hat{\alpha}_m} \right\} = 0; \quad (5.1)$$

$$D'_+(\alpha) H_+(\alpha) + \frac{i}{(\alpha + k) H_+(k)} = 0, \quad (5.2)$$

где $\hat{\alpha}_m = \sqrt{k^2 - (m+0,5)^2 \pi^2 / a^2}$ — полюса функции, стоящей в правой части уравнения (4.1). При выводе (5) использовалась асимптотика функций $S'_+(\alpha)$ и $D'_+(\alpha)$, следующая из условия на ребре.

Регулярность правых частей соотношений (3.3) и (3.4) при $\alpha = \alpha_n = \sqrt{k^2 - \pi^2 n^2 / a^2}$ и $\alpha = \hat{\alpha}_n = \sqrt{k^2 - \pi^2 (n+0,5)^2 / a^2}$ ($n = 0, 1, \dots$) устанавливает связь между фурье-преобразованием поля и амплитудами собственных волн:

$$S'_+(\hat{\alpha}_n) = i(-1)^n \frac{\pi(n+0,5)}{a} \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_n + k} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p - B_p}{\hat{\alpha}_n - \alpha_p} \right]; \quad (6.1)$$

$$D'_+(\alpha_n) = -i\alpha_n a \varepsilon_n (-1)^n [A_n + B_n], \quad (6.2)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases}$$

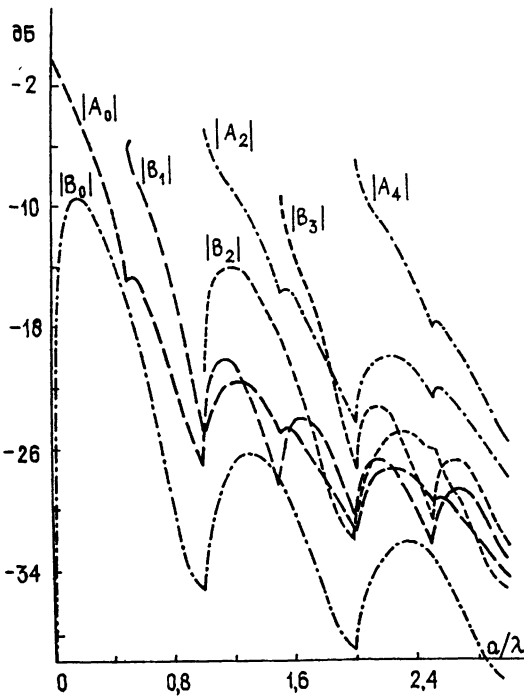


Рис. 2.

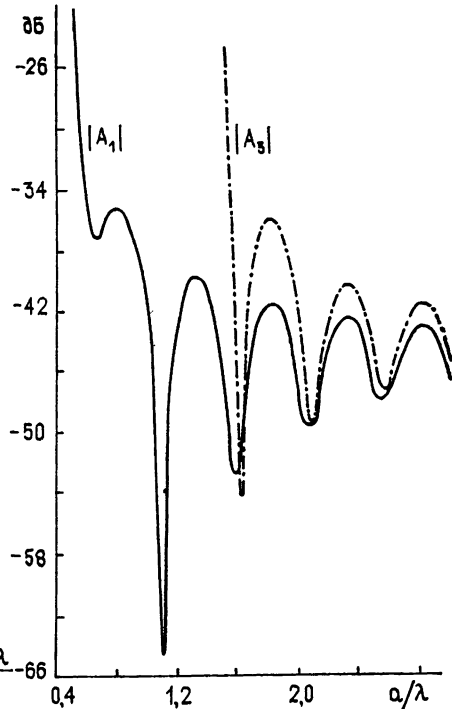


Рис. 3.

Рис. 2. Частотные зависимости модулей амплитуд $A_0, A_2, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3$ в активном и пассивном волноводах.

Рис. 3. Частотные зависимости модулей амплитуд A_1, A_3 распространяющихся волн $E_{0, 2n+1}$ в активном волноводе.

Полагая в (5) $\alpha = \hat{\alpha}_n$, $\hat{\alpha}_n$ и используя (6), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд собственных волн A_n (или B_n):

$$\sum_{p=0}^{\infty} Q_{np} [A_p - B_p] = T_n, \quad (7)$$

$$A_n + B_n = \frac{(-1)^n}{\varepsilon_n \alpha_n a (\alpha + k) H_+(k) H_+(\alpha_n)},$$

где

$$Q_{np} = K_+(\hat{\alpha}_n) \frac{(-1)^n (n+0,5)}{\hat{\alpha}_n - \alpha_p} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+0,5)}{a \hat{\alpha}_m (\hat{\alpha}_m - \alpha_p) (\hat{\alpha}_m + \hat{\alpha}_n) K_+(\hat{\alpha}_m)},$$

$$T_n = K_+(\hat{\alpha}_n) \frac{(-1)^{n+1} (n + 0,5)}{\hat{\alpha}_n + k} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (m + 0,5)}{a \hat{\alpha}_m (k - \hat{\alpha}_m) (\hat{\alpha}_m + \hat{\alpha}_n) K_+(\hat{\alpha}_m)},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Поле в области $|x| > a$ определяется через обратное фурье-преобразование суммы и разности решений функциональных уравнений (5). Для нахождения характеристик излучения вычислим асимптотическое значение поля методом перевала [5]:

$$\Sigma(\theta) = \frac{cr}{8\pi} E_0 H_y^* = \frac{c}{16k} \frac{1}{k^2 a^2} \left| \frac{1}{K_+(-k \cos \theta)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M_m}{\hat{\alpha}_m + k \cos \theta} + \eta \frac{1}{H_+(-k \cos \theta)} \frac{a}{2k\pi H_+(k) (1 + \cos \theta)} \right|^2,$$

где c — скорость света в вакууме, $\eta = \begin{cases} 1, & \theta \geq 0 \\ -1, & \theta < 0 \end{cases}$,

$$M_m = \frac{(-1)^m (m + 0,5)}{\hat{\alpha}_m K_+(\hat{\alpha}_m)} \left[\frac{1}{k - \hat{\alpha}_m} - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p - B_p}{\hat{\alpha}_m - \alpha_p} \right].$$

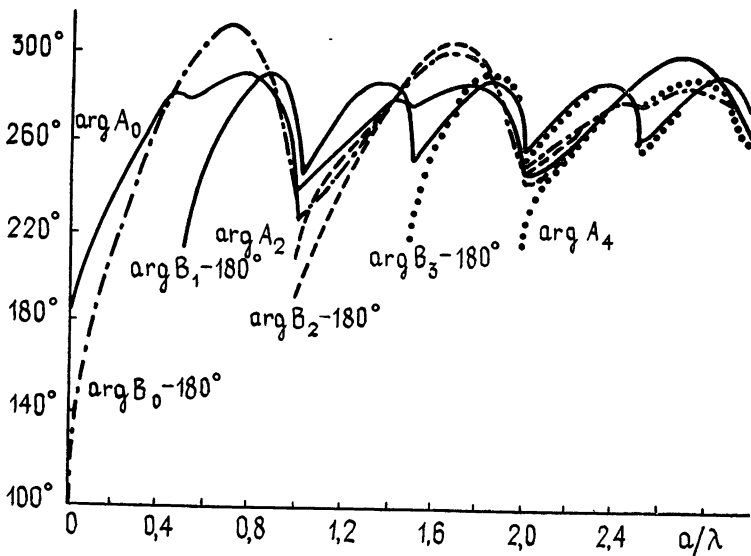


Рис. 4. Частотные зависимости фаз амплитуд $A_0, A_2, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3$ в активном и пассивном волноводах.

Система уравнений (7) решалась приближенно методом редукции. Для контроля численных результатов проверялось выполнение соотношения энергетического баланса

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma(\theta) d\theta = P_0 - \sum_{n=0}^{N-1} P_n |A_n|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} P_n' |B_n|^2$$

(здесь P_n и P_n' ($n=0, 1, \dots, N-1$) — мощности, переносимые распространяющимися волнами E_{0n} с единичной амплитудой) и выполнение ус-

ловия на ребре, эквивалентное следующей асимптотической оценке для коэффициентов A_n и B_n :

$$A_n \sim B_n \sim n^{-3/2} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Результаты численных расчетов представлены графически на рис. 2—6. На рис. 2, 3 приведены частотные зависимости модуля коэффициента отражения падающей волны и амплитуд распространяющихся волн E_{0n} в активном A_n и пассивном B_n волноводах ($n=0, 1, 2, 3, 4$).

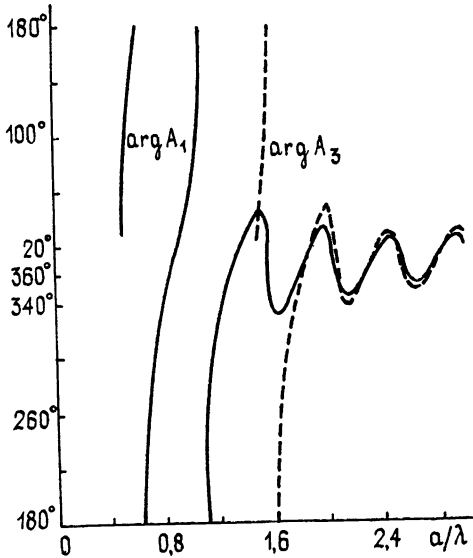


Рис. 5. Частотные зависимости фаз амплитуд A_1, A_3 в активном волноводе.

Из графиков видно, что в активном волноводе волны с симметрией поля, отличной от возбуждающей, а именно $E_{0, 2k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$) возбуждаются с малыми по сравнению с волнами $E_{0, 2k}$ амплитудами, тогда

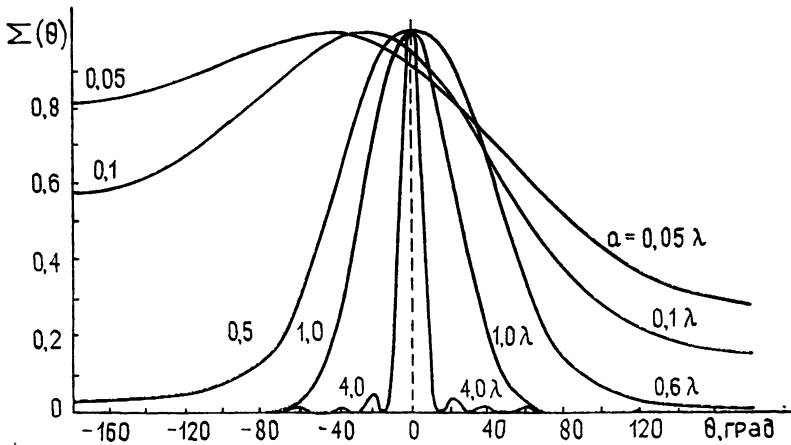


Рис. 6 Нормированные диаграммы направленности для высот волноводов $2a/\lambda=0,1; 0,2; 1; 2, 8$.

как в пассивном волноводе амплитуды волн $E_{0, 2k+1}$ несколько больше амплитуд волн $E_{0, 2k}$. Для вычисления коэффициентов B_k, A_{2k} с точностью до десятых процента система уравнений (7) решалась с два-

дцатью комплексными неизвестными, при этом коэффициенты B_k , A_{2k} быстро выходят на асимптотику (8). Для вычисления коэффициентов A_{2k+1} с той же точностью количество неизвестных в системе уравнений (7) бралось равным шестидесяти, а значения коэффициентов A_{2k+1} гораздо медленнее выходят на асимптотику.

На рис. 4, 5 приведены частотные зависимости фазы распространяющихся в обоих волноводах волн, соответствующие амплитудам, изображенным на рис. 2 и 3. Асимптотическая оценка для фаз коэффициентов трансформации $\varphi_n \sim \text{const}$ хорошо выполняется для всех видов волн и тем лучше, чем меньше высоты волноводов.

На рис. 6 изображены нормированные диаграммы направленности. Параметром кривых на рис. 6 является высота волноводов a . Из графиков видно, что пассивный волновод вызывает смещение максимума излучения в сторону активного, причем тем больше, чем меньше высота волноводов a . При уменьшении высоты волноводов диаграмма направленности становится более изотропной. Для больших высот волноводов ($a > \lambda$) влияние пассивного соседа почти не сказывается на характеристиках излучения.

В заключение отметим, что аналогичным способом можно рассмотреть излучение из двух плоских волноводов любой другой собственной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.— М.: Сов. радио, 1966.
2. Тарковский Л. Б., Рубинштейн А. И.— Радиотехника и электроника, 1969, 14, № 8, с. 1369.
3. Воскресенский Г. В., Журав С. М.— Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 7, с. 1390.
4. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М.: ИЛ, 1962.
5. Федорюк М. В. Метод перевала — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
3 июня 1980 г.,
после переработки
4 августа 1981 г.

RADIATION FROM TWO PLANE WAVEGUIDES FORMED BY THREE HALF-PLANES

S. M. Zhurav, S. Yu. Korshunkov

A problem is considered of TEM-wave radiation from two plane waveguides formed by three ideally conducting half-planes. The method of solution is based on Winer—Hopf method and isolation of additional regions. Functional equations are reduced to one infinite system of algebraic equations which is solved by the method of reductions. Numerical results are presented.
