

УДК 621.371

## АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КАЛИБРОВКИ «НУЛЯ»

*И. Г. Замек*

Анализируется эффективность применения метода калибровки «нуля» для снижения влияния белого и фликкерного шума на точность измерения дискретных значений и формы сигнала  $S(t)$ . Рассмотрено преобразование шума, происходящее в результате применения метода калибровки «нуля», с учетом неидеальности процесса дискретизации. Получены условия, при которых метод калибровки «нуля» обеспечивает снижение влияния шума и выражения, позволяющие рассчитать остаточное влияние шума после применения метода калибровки. Рассмотрены различные сочетания метода калибровки «нуля» и низкочастотной фильтрации шума.

В радиоизмерительной технике и физическом эксперименте наличие шума препятствует реализации высокой точности измерений. Для снижения влияния шума наряду с другими методами широко применяется калибровка «нуля» аппаратуры [1–8]. Простейшим примером может служить известная калибровка «нуля» гальванометра, выполнявшаяся оператором вручную [1]. Метод калибровки часто используется на практике для снижения влияния именно фликкерных шумов, в то же время имеющаяся теория касается лишь случая стационарного шума. Исключение составляет работа Кислякова [6], которая, однако, посвящена исследованию только специфических особенностей радиометрических измерений. Анализ эффективности метода калибровки «нуля» препятствовал, также, недостаточно исследованный вопрос преобразования шума при его дискретизации — в основе метода калибровки «нуля» всегда лежит дискретизация шума.

В силу этих причин результаты опубликованных работ не дают количественных выражений эффективности метода калибровки «нуля» при шумах фликкерного типа. В данной работе эффективность применения метода калибровки «нуля» рассмотрена при шумах белого и фликкерного типов с учетом конечной полосы пропускания измерительного прибора. Получены выражения, характеризующие эффективность метода в зависимости от интервала калибровки  $\tau$ , периода взятия дискретных отсчетов  $T$ , полосы пропускания измерительного прибора  $\omega_n$  и показателя степени спектра шума  $\gamma$ .

### 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУМА ПРИ ЕГО ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Вопросы, связанные с дискретным представлением непрерывных процессов, рассматривались в большом числе работ [9–13]\*. При этом, как правило, процедура образования дискретных данных из непрерывного процесса  $\eta(t)$  рассматривалась как идеальная,  $\eta_i = \eta(t_i)$ . Это предположение справедливо в случае дискретизации процесса, низкочастотного по сравнению с полосой пропускания устройства дискретизации. Однако на входе устройства дискретизации всегда действует

\* Обширная библиография по этому вопросу, включающая более двухсот наименований, приведена в обзоре [12].

смесь исследуемого процесса (сигнала  $S(t)$  и шума  $\eta(t)$ ). Шум является, как правило, широкополосным, и вопрос образования дискретных отсчетов даже низкочастотного сигнала, при наличии шума, требует анализа неидеальности процесса дискретизации.

В реальных устройствах дискретизации преобразование непрерывного процесса  $\eta(t)$  сопровождается двумя эффектами:

1) при дискретизации образуются значения  $X_i$ , лишь приблизительно совпадающие с  $\eta_i$ . Величина  $X_i$  определяется значениями процесса  $\eta(t)$  в некоторой окрестности момента  $t_i$  и свойствами реального устройства дискретизации;

2) на выходе устройства дискретизации образуются не «мгновенные» значения  $X_i$ , а импульсы конечной длительности и определенной формы  $U(t)$ , амплитуда которых пропорциональна  $X_i$ .

Второй из этих эффектов отмечался в литературе [11]. Основной вопрос — образование значений  $X_i$  в результате дискретизации непрерывного процесса  $\eta(t)$  — оставался до последнего времени практически нерассмотренным в теории дискретизации.

Простейшее устройство дискретизации представляет собой электрический ключ, замыкаемый на короткий промежуток времени, с емкостью в качестве нагрузки. В современных устройствах дискретизации

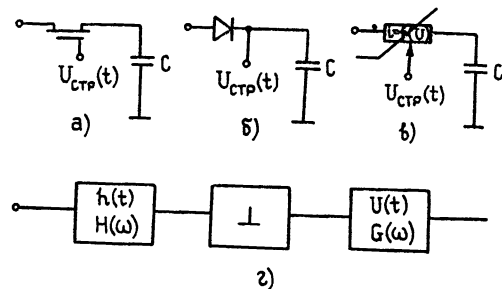


Рис. 1. К анализу преобразования шума в реальном устройстве дискретизации: а), б) — примеры устройств дискретизации, в) — обобщенная схема устройства, г) — эквивалентная схема.

роль ключевого элемента выполняет биполярный или полевой транзистор рис. 1а, или полупроводниковый диод рис. 1б, открываемые на малый интервал времени с помощью коротких стробирующих импульсов. Следовательно, основой построения устройства дискретизации является линейная параметрическая цепь, в качестве которой используется устройство с нелинейной вольт-амперной характеристикой  $i = f(U)$ , проводимость которого изменяется под действием коротких стробирующих  $U_{стр}(t)$  импульсов рис. 1в. Анализ этих схем показывает, что устройство дискретизации представляет собой такой амплитудный модулятор, который в отличие от общепринятой схемы амплитудного модулятора с активной нагрузкой имеет своей нагрузкой емкость.

К анализу образования дискретных данных, фактически, пришли при исследовании процессов, происходящих в смесителях стробоскопических осциллографов [13–17], где было показано, что при условии малости входного процесса по сравнению с амплитудой стробирующих импульсов искажения процесса  $\eta(t)$ , происходящие при его дискретизации, можно считать чисто линейными\*. Импульсная переходная характеристика эквивалентного фильтра определяется первой производной вольт-амперной характеристики ключевого элемента  $f'(U)$ , емкостью  $C$  и формой стробирующих импульсов  $U_{стр}(t)$ :

$$h_g(t) = C^{-1} f' [U_{стр}(-t)].$$

В [17, 18] рассматривалось влияние паразитных элементов схемы. С учетом фильтрующего действия входных цепей с импульсной пе-

\* При проектировании устройств дискретизации, как правило, принимаются необходимые меры для того, чтобы процедура дискретизации не сопровождалась нелинейными искажениями исследуемого процесса.

Переходной характеристикой  $h_{вх}(t)$  для результирующей импульсной переходной характеристики устройства дискретизации  $h(t)$  можно записать:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_g(t - V) h_{вх}(V) dV.$$

Эквивалентная схема устройства дискретизации может быть представлена в виде последовательно соединенных фильтра I с импульсной переходной характеристикой  $h(t)$ , импульсного элемента II и фильтра III с импульсной переходной характеристикой  $U(t)$ , совпадающей с формой выходных импульсов устройства дискретизации\*, рис. 1г.

Импульсную переходную характеристику  $h(t)$  фильтра I в сравнении с низкочастотных устройствах дискретизации, когда фильтрующее действие входных цепей пренебрежимо мало, можно считать с достаточной строгостью финитной — отличной от нуля на конечном интервале времени. Однако низкочастотные устройства дискретизации, как правило, используются в сочетании с фильтром низких частот на их входе. В этом случае результирующая импульсная переходная характеристика не является финитной. В тех случаях, когда специально такой фильтр не ставится, его роль могут играть инерционные входные цепи измерительного прибора, в состав которого входит устройство дискретизации. Следовательно, для широкополосных устройств дискретизации и низкочастотных устройств дискретизации с низкочастотным фильтром на входе  $h(t)$  не является финитной, а ее длительность  $\tau_h$  по уровню 0,5 от амплитуды может превышать интервал времени  $\tau$  между отсчетами дискретных значений,  $\tau_h > \tau$ .

Для низкочастотных устройств дискретизации без фильтра на входе  $h(t)$  может быть финитной, а интервал  $\tau$  между отсчетами дискретных значений не может быть меньше  $\tau_h$  ( $\tau > \tau_h$ ).

К эквивалентной схеме, изображенной на рис. 1г, сводится преобразование шума в измерителях с дискретным отсчетом.

Преобразование спектральной плотности мощности белого и фликкерного шумов, происходящее при их дискретизации, рассмотрено в [19, 21].

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУМА В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КАЛИБРОВКИ «НУЛЯ»

Пусть на входе измерителя с дискретным отсчетом действуют сигнал  $S(t)$  и шум  $\eta(t)$ , обусловленный как внешними, так и собственными шумами аппаратуры. Результаты измерения дискретных значений смеси сигнала \*\* и шума  $S_i = S(t_i) + X_i$  будут содержать случайную составляющую  $X_i$ , обусловленную влиянием шума  $\eta(t)$ . Процессы  $\eta(t)$  и  $X(t)$  связаны между собой интегралом Дюамеля  $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - V) \eta \times (V) dV$ .

При калибровке «нуля» отключают сигнал, измеряют шум, записывают результат измерения шума  $X_i$  и впоследствии вычитают его из результатов измерения смеси сигнала и шума. При этом результаты измерения будут содержать случайную составляющую  $Y_i = X(t_i + \tau) - X(t_i)$ .

\* Полоса пропускания устройства дискретизации определяется длительностью импульсной переходной характеристики и выбирается в зависимости от полосы спектра частот исследуемого сигнала. Эта эквивалентная схема без ее обоснования приведена в [19, 20].

\*\* Предполагается, что полоса пропускания фильтра I выбрана достаточно большой по сравнению с полосой частот спектра сигнала, так что линейные искажения сигнала пренебрежимо малы.

Блок-схема метода калибровки «нуля» представлена на рис. 2а, а эквивалентная схема преобразования шума, происходящего в результате применения калибровки «нуля», представлена на рис. 2б. Эквивалентная схема преобразования шума при калибровке «нуля» с последующей аналоговой фильтрацией представлена на рис. 2в.

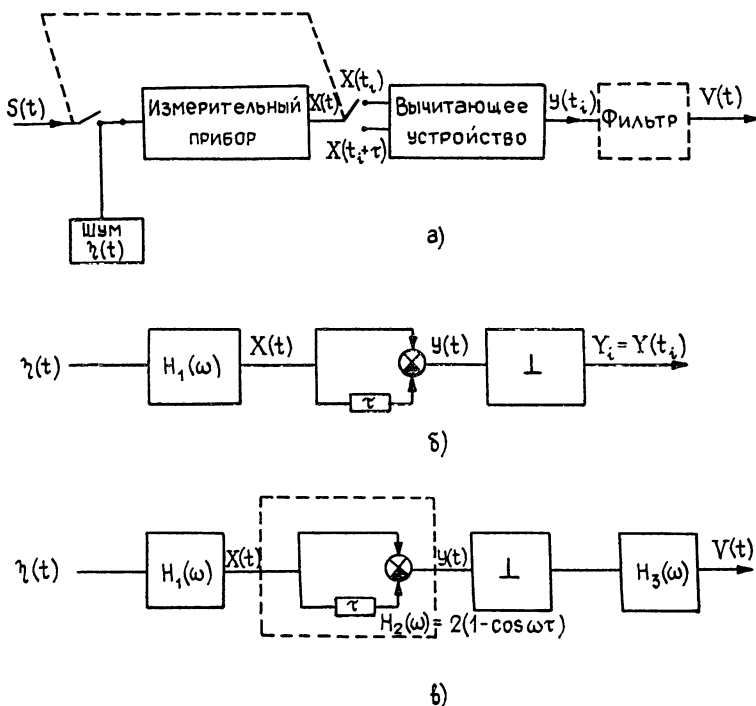


Рис. 2.

Предположим, что процесс  $\eta(t)$  (шум, приведенный ко входу измерителя) нестационарный со стационарными первыми приращениями. В этом случае процесс  $y(t)$  будет стационарным, и, используя выражение для корреляционной функции процесса на выходе линейной системы [22], получим

$$K_Y(\theta) = 2d_X(\theta, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(U)h(V) d_{\eta}(U - V + \theta, \tau) dU dV; \quad (1a)$$

$$\langle Y^2 \rangle = 2d_X(0, \tau) = D_X(\tau) = K_Y(0), \quad (16)$$

где  $d_{\eta}(\theta, \tau) = \langle [\eta(t + \theta + \tau) - \eta(t + \theta)][\eta(t + \tau) - \eta(t)] \rangle$  — статистическая структурная функция процесса  $\eta(t)$  [23].

В спектральной области выражению (1а) соответствует

$$K_Y(\theta) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta}(\omega) H(\omega) (1 - \cos \omega\tau) \cos \omega\theta d\theta, \quad (2)$$

где

$$H(\omega) = |C(i\omega)|^2, \quad C(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Из (2) видим, что снижение влияния шума при калибровке «нуля» происходит за счет подавления низкочастотных компонент спектра шума множителем  $2(1 - \cos \omega\tau)$  и высокочастотных компонент множителем  $H(\omega)$  (рис. 3) — аналогичный график приведен в [7].

Определение корреляционной функции  $K_Y(\theta)$  и мощности процесса  $y(t)$ , полученного в результате калибровки «нуля», сводится к вычислению «модифицированных» структурных функций, содержащих в подынтегральном выражении (2) дополнительный множитель  $H(\omega)$ . Отметим, что на практике, за счет конечной полосы пропускания реальных физических устройств, мы всегда имеем дело с «модифицированными» структурными функциями.

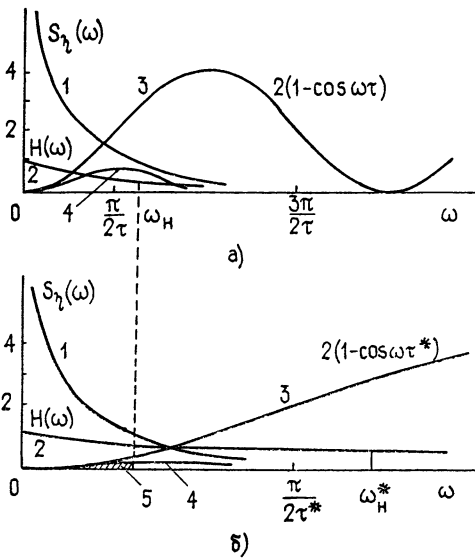


Рис. 3.

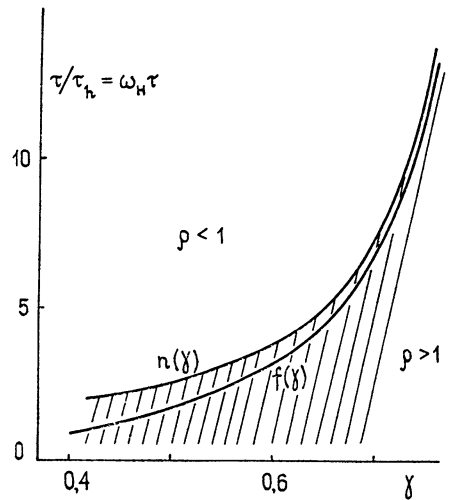


Рис. 4.

Рис. 3. Иллюстрация снижения шума, происходящего при калибровке «нуля»: а) калибровка «нуля» с предварительной фильтрацией шума («медленная» калибровка «нуля»), б) быстрая калибровка «нуля» с последующей фильтрацией шума; 1 — спектральная плотность мощности шума  $\eta(t)$ , 2 — квадрат модуля коэффициента передачи измерительного прибора, 3 — множитель, учитывающий эффект применения калибровки «нуля», 4 — шумы, оставшиеся после применения калибровки «нуля», 5 — шумы, оставшиеся после применения «быстрой» калибровки нуля с последующей фильтрацией.

Рис. 4. Область параметров  $\gamma$  и  $\tau$  (заштрихована), при которых метод калибровки «нуля» приводит к снижению влияния шума.

Возьмем результирующую импульсную переходную характеристику измерительного прибора  $h(t)$  в виде  $h(t) = (\tau_h/2)^2 [(\tau_h/2)^2 + t^2]^{-1}$ . В этом случае  $H(\omega) = \exp(-|\omega|/\omega_h)$ , где  $\omega_h = \tau_h^{-1}$  и анализ эффективности метода калибровки «нуля» сводится к вычислению структурных функций процесса со спектральной плотностью мощности (СПМ)

$$S_X(\omega) = A \exp(-|\omega|/\omega_h) |\omega|^{-\gamma}, \quad (3)$$

$\gamma$  — показатель степени спектра шума.

Рассмотрение, основанное на использовании быстро спадающей функции  $h(t)$ , пригодно и для приближенного описания измерителей с финитной функцией  $h(t)$ . При этом следует ограничиться областью таких значений  $\tau$ , при которых  $h(t)$  можно считать практически равной нулю. При рассматриваемом виде  $h(t)$  уже при  $t = 2\tau_h$   $h(t) = 0,06$ , а при  $t = 3\tau_h$   $h(t) = 0,25^*$ .

\* В [24, 25] были рассмотрены «модифицированные» структурные функции с  $H(\omega) = \sin^2(\omega T/2)/(\omega T/2)^2$ . Результаты работы [24, 25] могут быть непосредственно использованы при анализе эффективности метода калибровки «нуля» для измерителя с финитной импульсной переходной характеристикой  $h(t)$ , имеющей вид прямоугольного импульса.

### 3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОДНОКРАТНОЙ КАЛИБРОВКИ «НУЛЯ»

Случай  $0 < \gamma < 1$ . В этом случае шум  $X(t)$  (с СПМ вида (3)) может быть стационарным и иметь конечную корреляционную функцию

$$K_X(\theta) = \langle X^2 \rangle [1 + (\theta\omega_n)]^{-(1-\gamma)/2} \cos [(1 - \gamma) \operatorname{arctg}(\theta\omega_n)], \quad (4)$$

где  $\langle X^2 \rangle = K_X(0) = 2A\Gamma(1-\gamma)\omega_n^{1-\gamma}$ .

Из (4), воспользовавшись известной связью [23] между статистической структурной и корреляционной функциями, получим для мощности  $\langle Y^2 \rangle$

$$\langle Y^2 \rangle = K_Y(0) = 2\langle X^2 \rangle \{1 - \cos [(1 - \gamma) \operatorname{arctg}(\tau\omega_n)] / [1 + (\tau\omega_n)^2]^{-(1-\gamma)/2}\}. \quad (5)$$

Мощность (5) процесса  $Y(t)$  может быть снижена по сравнению с мощностью процесса  $X(t)$  уменьшением  $\tau$  или  $\omega_n$ . Из (4) и (5) можно получить выражение для выигрыша, получаемого за счет применения калибровки «нуля»:

$$\rho = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle Y^2 \rangle} = 0,5 \left\{ 1 - \frac{\cos [(1 - \gamma) \operatorname{arctg}(\tau\omega_n)]}{[1 + (\tau\omega_n)^2]^{(1-\gamma)/2}} \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Величина  $\rho > 1$ , если

$$\frac{2 \cos [(1 - \gamma) \operatorname{arctg} \tau\omega_n]}{[1 + (\tau\omega_n)^2]^{(1-\gamma)/2}} > 1. \quad (7)$$

Решением неравенства (7) является заштрихованная область на рис. 4, ограниченная кривой  $n(\gamma)$ . Пользуясь зависимостью  $n(\gamma)$ , по известным значениям  $\gamma$  и  $\tau_h$  можно определить границу допустимых значений  $\tau$ , при которых калибровка «нуля» приводит к снижению шума:

$$\tau < \tau_h n(\gamma). \quad (8)$$

При достаточно большом отношении  $\tau/\tau_h = \tau\omega_n$  (8) можно заменить более строгим неравенством:

$$\tau < \tau_h f(\gamma),$$

где  $f(\gamma) = \sqrt{(2 \sin \pi\gamma/2)^{2/(1-\gamma)} - 1}$ ,  $f(\gamma)$  является хорошим приближением к  $n(\gamma)$ , начиная с  $\tau > 5\tau_h$ .

При фиксированном значении  $\gamma$  с увеличением  $\tau$  до  $\tau n(\gamma)$  величина выигрыша  $\rho$  будет изменяться в заштрихованной области на рис. 5 от максимальных значений, лежащих, например, на кривой 1 при  $\tau = \tau_h$ , до единицы при  $\tau = \tau_h n(\gamma)$ \*. При дальнейшем увеличении  $\tau$  применение калибровки «нуля» приводит к возрастанию шума,  $-\rho < 1$ , и при  $\tau \rightarrow \infty$  величина  $\rho \rightarrow 1/2$ .

Если интервал калибровки не может быть сделан меньше некоторой определенной величины  $\tau_0$  (например, вследствие конечного быстрогодействия коммутирующих устройств), то будет существовать такое

\* В случае  $\gamma = 0$  величина  $\rho = 1$  при  $\tau = \tau_h$  ( $n(0) = 1$ ).

значение  $\gamma_0 = n^{-1}(\tau_0)^*$ , что при  $\gamma < \gamma_0$  применение калибровки «нуля» будет приводить к возрастанию влияния шума, а при  $\gamma_0 < \gamma < 1$  — к снижению шума (рис. 5). С ростом интервала калибровки область значений  $\gamma$ , в которой калибровка «нуля» приводит к снижению шума, сокращается. Так, при  $\tau = \tau_h$   $\gamma_0 = 0$  (кривая 1 на рис. 5), при  $\tau = 2\tau_h$   $\gamma_0 = 0,42$  (кривая 2), а при  $\tau = 4\tau_h$   $\gamma_0 = 0,61$  (кривая 3).

При увеличении интервала калибровки время, необходимое для одного измерения, возрастает. Снизить время измерения можно, взяв прибор с более широкой полосой пропускания  $\omega_n^* \gg \omega_n$ , чем это необходимо, исходя из спектра сигнала  $S(t)$ , и уменьшив в такое же число раз интервал калибровки  $\tau$  до  $\tau^* = \tau\omega_n/\omega_n^*$  (этот случай будем называть «быстрой» калибровкой в отличие от рассмотренной выше «медленной» калибровки). При этом получается несколько меньший выигрыш:

$$\rho^* = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle Y^2 \rangle_{\tau=\tau^*}} = \rho \left( \frac{\omega_n}{\omega_n^*} \right)^{1-\gamma} = \rho \left( \frac{\tau^*}{\tau} \right)^{1-\gamma}. \quad (9)$$

Однако время измерения по сравнению с «медленной» калибровкой «нуля» будет меньше в  $\tau/\tau^*$  раз.

*Случай  $1 \leq \gamma < 3$ .* При  $\gamma = 1$   $X(t)$  будет обладать конечной статистической структурной функцией  $d_x(\theta, \tau)$ , и для процесса  $y(t)$  из (2) и (3) будем иметь

$$K_Y(\theta) = 2d_x(\theta, \tau) = A \ln \{ [1 + \omega_n^2(\theta + \tau)^2] [1 + \omega_n^2(\theta - \tau)^2] [1 + (\omega_n\theta)^2]^{-2} \}; \quad (10a)$$

$$\langle Y^2 \rangle = D_X(\tau) = 2A \ln [(\omega_n\tau)^2 + 1]. \quad (10б)$$

В случае  $1 < \gamma < 3$  фильтрующим действием измерительного прибора для  $\tau_h \ll \tau$  можно пренебречь. При этом корреляционная функция и мощность процесса  $Y(t)$  определяются структурными функциями фликкерного шума  $\eta(t)$ ,  $K_Y = 2d_\eta(\theta, \tau)$ ,  $\langle Y^2 \rangle = D_\eta(\tau)$ . Структурные функции фликкерного шума приведены в [23].

Как видим, при  $1 \leq \gamma < 3$  применение метода калибровки очень эффективно, в то время как мощность шума  $\langle X^2 \rangle$  расходится, мощность  $\langle Y^2 \rangle$  конечна и уменьшается с уменьшением  $\tau\omega_n = \tau/\tau_h$ . Это свидетельствует о том, что при  $1 \leq \gamma < 3$ , метод калибровки («медленной») оказывается значительно более эффективным, чем метод фильтрации (сужение полосы пропускания измерительного прибора).

Учитывая, что структурная функция фликкерного шума при  $1 < \gamma < 3$  пропорциональна  $\tau^{\gamma-1}$  [23], можно заключить, что при таких значениях  $\gamma$  применение «быстрой» калибровки «нуля» позволяет одновременно уменьшить влияние шума и снизить время измерения.

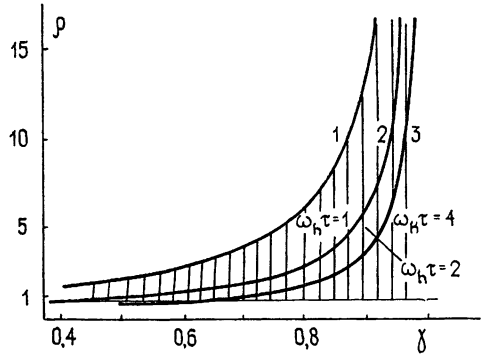


Рис. 5 Выигрыш (по мощности) при  $0 < \gamma < 1$ , получаемый за счет применения «медленной» калибровки «нуля». 1 —  $\tau = \tau_h$ , 2 —  $\tau = 2\tau_h$ , 3 —  $\tau = 4\tau_h$ .

\*  $n^{-1}(\gamma)$  — функция, обратная  $n(\gamma)$ . Зависимость  $\gamma_0 = n^{-1}(\tau_0/\tau_h)$  можно получить из рис. 4. Для этого график на рис. 4 следует зеркально отразить относительно вертикальной оси и повернуть на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

В дополнение к (6), (9) из выражений (4), (5), (10б) легко записать выражения для выигрыша, характеризующего эффективность снижения влияния шума методами фильтрации, «медленной» и «быстрой» калибровок. В табл 1 (столбцы 1—3) приведено качественное сравнение полученных результатов. Как следует из таблицы, при  $1 \leq \gamma < 3$  (а в ряде случаев и при  $\gamma_0 < \gamma < 1$ ) вместо того, чтобы сужать полосу пропускания измерительного прибора, следует брать прибор с более широкой полосой пропускания и использовать «быструю» калибровку «нуля».

Таблица 1

	Фильтрация	Фильтрация с последующей «медленной» калибровкой	«Быстрая» калибровка	«Быстрая» калибровка с последующей фильтрацией К — Ф
Фильтрация		$\gamma_0 < \gamma < 3$ Скорость измерений ниже в 2 и более раз	$\gamma_0 < \gamma < 3$ Скорость измерений существенно выше	$0 \leq \gamma < 3$ Скорость измерений та же
Фильтрация с последующей «медленной» калибровкой	$0 \leq \gamma < \gamma_0$ Скорость измерений выше в 2 и более раз		$1 < \gamma < 3$ Скорость измерений существенно выше	$0 \leq \gamma < 3$ Скорость измерений выше в 2 и более раз
«Быстрая» калибровка	$0 \leq \gamma < \gamma_0$ Скорость измерений существенно ниже	$\gamma_0 < \gamma < 1$ Скорость измерений существенно ниже		$0 \leq \gamma < 3$ Скорость измерений существенно ниже

В таблице приведены значения  $\gamma$ , при которых метод, указанный в верхней горизонтальной строке, обеспечивает более эффективное снижение влияния шума по отношению к методу, указанному в левом вертикальном столбце. То же относится и к характеристике скорости измерений.

Дальнейшее снижение влияния шума при том же времени измерения, что и при методе фильтрации, возможно при использовании сочетания методов «быстрой» калибровки «нуля» с усреднением или низкочастотной фильтрацией.

#### 4. СОЧЕТАНИЕ МЕТОДОВ ФИЛЬТРАЦИИ И «БЫСТРОЙ» КАЛИБРОВКИ НУЛЯ

Фильтрация — «быстрая» однократная калибровка «нуля» (Ф—К). Рассмотрим случай, когда на входе устройства дискретизации используется фильтр с большой постоянной времени  $\tau_h \gg \tau^*$ . Положив в (2)  $\tau = \tau^*$ , разложим множитель  $1 - \cos \omega \tau^*$  в ряд и, ограничившись первым членом разложения, получим для  $0 \leq \gamma < 3$

$$\langle Y^2 \rangle = 2A(\tau^*)^2 \omega_h^{3-\gamma} \Gamma(3-\gamma). \quad (11)$$

Как видим, при любых значениях  $\gamma < 3$  применение предварительной фильтрации с последующей «быстрой» калибровкой «нуля» приводит к существенному снижению влияния шума. Из (4) и (11) можно записать для выигрыша, полученного при  $\gamma < 1$  ( $\tau^* \ll \tau_h$ ),

$$\rho' = \frac{\langle X^2 \rangle}{\langle Y^2 \rangle} = \left( \frac{\tau_h}{\tau^*} \right)^2 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(3-\gamma)}. \quad (12)$$

Эффективность снижения шума растет с ростом  $(\tau_h/\tau^*)^2$ .



«Быстрая» периодическая калибровка «нуля» — фильтрация ( $K-\Phi$ ). В тех случаях, когда на входе устройства дискретизации нельзя применить низкочастотный фильтр\* (например, в широкополосных устройствах дискретизации — стробоскопических осциллографах и стробвольтметрах), для снижения влияния шума может быть использована «быстрая» калибровка в сочетании с последующим усреднением результатов дискретных отсчетов  $S'_i = S_i + Y_i$  или с низкочастотной аналоговой фильтрацией. И цифровая и аналоговая обработка дают одинаковые результаты при том же времени измерения. Рассмотрим случай аналоговой фильтрации, представляющий, кроме того, интерес для широкополосных измерителей с аналоговой формой представления результатов измерения.

Пусть, как и ранее, необходимая — для данной полосы спектра частот измеряемого сигнала — полоса пропускания аппаратуры равна  $\omega_n$ . Возьмем прибор с полосой  $\omega_n^* = 1/\tau_h^* \gg \omega_n$ . Результаты периодических измерений, выполняемых с использованием «быстрой» калибровки «нуля»  $S_i + Y_i$ , преобразованные в последовательность примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов с амплитудой  $S_i + Y_i$ , пропустим через низкочастотный фильтр с полосой пропускания  $\omega_n$ . Эквивалентная схема преобразования шума представлена на рис. 2в. Спектральная плотность мощности шума на выходе этой схемы

$$F_V(\omega) = H_3(\omega) \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_1\left(\omega - \frac{2\pi}{T}p\right) H_2\left(\omega - \frac{2\pi}{T}p\right) S_\eta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}p\right), \quad (13)$$

$$H_1(\omega) = \exp(-|\omega|/\omega_n^*), \quad H_2(\omega) = 2(1 - \cos \omega\tau^*),$$

$$H_3(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega| \leq \omega_n, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \omega_n, \end{cases}$$

$T$  — период взятия отсчетов  $S_i + Y_i$  ( $\tau^* < T \ll \tau_h$ ).

Выражение (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} F_V(\omega) = & 2H_3(\omega) \left\{ (1 - \cos \omega\tau^*) S_X(\omega) + \right. \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \left[ S_X\left(\frac{2\pi}{T}p + \omega\right) + S_X\left(\frac{2\pi}{T}p - \omega\right) \right] \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau^*p\right) \times \right. \\ & \times \cos \omega\tau^* \left. \right) - \sum_{p=1}^{\infty} \left[ S_X\left(\frac{2\pi}{T}p - \omega\right) - S_X\left(\frac{2\pi}{T}p + \omega\right) \right] \times \\ & \left. \times \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau^*p\right) \sin \omega\tau^* \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Суммы в (14) обусловлены эффектом наложения спектра шума. Пренебрегая членами более высокого порядка малости для  $F_V(\omega)$ , в полосе пропускания низкочастотного фильтра  $\omega_n \ll 2\pi/T$  можно записать

$$F(\omega) = (\tau^*\omega)^2 S_X(\omega) + 4A \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\alpha^*p)}{p^2} \exp(-\beta^*p), \quad (15)$$

где  $\alpha^* = 2\pi\tau^*/T$ ,  $\beta^* = 2\pi/T\omega_n^* = 2\pi\tau_h^*/T$  ( $2\pi > \alpha^* > \beta^*$ ,  $\beta^* < \pi$ ,  $\alpha^* + \beta^* < 2\pi$ ).

\* Здесь будем считать  $\tau^* > \tau_h^*$ ,  $T > 2\tau_h^*$ ,  $\tau_h^* + \tau^* < T$ ,  $T \ll \tau_h$ .

Для мощности шума на выходе низкочастотного фильтра из (15) при  $\gamma < 3$  получим

$$\langle V^2 \rangle = R_1 + R_2, \quad (16)$$

где  $R_1 = 2A(3 - \gamma)^{-1}(\tau^*)^2 \omega_n^{3-\gamma}$ ,

$$R_2 = 8A(2\pi)^{-\gamma} T^\gamma \omega_n \sum_{p=1}^{\infty} (1 - \cos \alpha^* p) p^{-\gamma} \exp(-\beta^* p).$$

Сравнивая с (11), видим, что в (16) кроме первого члена  $R_1$ , близкого к (11), имеется еще член  $R_2$ , что свидетельствует о более высокой эффективности фильтрации с последующей «быстрой» калибровкой (Ф—К) по сравнению с калибровкой с последующей фильтрацией (К—Ф). При  $\gamma \rightarrow 3$  основной вклад в (16) дает первый член  $R_1$ , и эффективность Ф—К и К—Ф оказывается одинаковой. С уменьшением  $T/\tau_h$  при  $\gamma < 1$  отношение  $\langle X^2 \rangle / \langle V^2 \rangle$  возрастает быстрее, чем  $(\tau_h/T)^\gamma$ , а при  $2 > \gamma > 1$  отношение  $\langle Y^2 \rangle_{\tau=\tau^*} / \langle V^2 \rangle$  возрастает быстрее, чем  $(\tau_h/T)^\gamma (\tau^*/\tau_h)^{\gamma-1}$ . Качественное сравнение метода К—Ф с фильтрацией, «медленной» и «быстрой» калибровками приведено в табл. 1. Частные случаи  $\gamma = 0$ ,  $\gamma < 1$  и  $\gamma = 1$  рассмотрены в Приложении.

*Фильтрация — «быстрая» периодическая калибровка — фильтрация (Ф—К—Ф).* В измерителях, допускающих применение низкочастотного фильтра на входе устройства дискретизации, влияние шума наиболее эффективно может быть снижено при использовании фильтрации как до, так и после калибровки. Мощность шума  $\langle V^2 \rangle$  в этом случае можно получить, заменив в (15)  $\omega_n^*$  на  $\omega_n$  и проинтегрировав (15) в полосе от 0 до  $\omega_n$ . При этом вторым слагаемым в (16) можно пренебречь, так как наличие входного фильтра с полосой пропускания  $\omega_n$ , меньшей частоты взятия отсчетов  $F = 2\pi/T$ , в значительной степени уменьшает влияние эффекта наложения спектра шума. Мощность шума будет определяться модифицированными гамма-функциями [26]. Используя представление модифицированной гамма-функции в виде ряда, получим, что  $\langle V^2 \rangle$  определяется — с точностью до постоянного множителя — слагаемым  $R_1$  выражения (16):

$$\langle V^2 \rangle = 2A(\tau^*)^2 \omega_n^{3-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(3 - \gamma + n)}. \quad (17)$$

Учитывая, что  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ , легко видеть, что  $\langle V^2 \rangle < R_1 e^{-1}$ .

Полученные результаты позволяют ответить на вопрос: какому из методов — низкочастотной фильтрации шума или калибровке «нуля» — следует отдать предпочтение при решении конкретной измерительной задачи, выбирая между такими обычно противоречивыми факторами, как чувствительность и время измерения (увеличивать постоянную времени измерительного прибора  $\tau_h$  или взять прибор с малой постоянной времени и применить быструю калибровку «нуля»).

1) При  $\gamma > \gamma_0$  ( $\gamma_0 < 1$ ) применение калибровки «нуля» приводит к снижению влияния шума, а при  $\gamma < \gamma_0$  — к возрастанию этого влияния. Приведенные графики и выражения позволяют определить область значений  $\gamma > \gamma_0 = n^{-1}(\tau/\tau_h)$ , при которых применение калибровки «нуля» приводит к снижению влияния шума, и получаемое при этом снижение шума в зависимости от отношения интервала калибровки к длительности импульсной переходной характеристики измерительного прибора  $\tau/\tau_h$ .

2) При  $1 < \gamma < 3$  применение «быстрой» калибровки «нуля» позволяет уменьшить влияние шума на результаты измерений дискретных значений сигнала и одновременно повысить быстродействие измерений.

3) Наиболее эффективно снизить влияние шума удастся при использовании сочетания «быстрой» калибровки с низкочастотной фильтрацией. Рассмотренные варианты сочетания фильтрации и «быстрой» калибровки перечислены в порядке убывания их эффективности:  $\Phi-K-\Phi$ ,  $\Phi-K$ ,  $K-\Phi$ . Эффективность снижения влияния шума этими методами тем выше, чем меньше могут быть сделаны период измерения  $T$  дискретных значений и интервал калибровки  $\tau^*$  по сравнению с длительностью импульсной переходной характеристики фильтров  $\tau_h$ . Получены выражения, позволяющие рассчитывать величину снижения влияния шума.

Автор благодарен А. Н. Малахову за внимание к работе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Эффективность сочетания «быстрой» периодической калибровки с низкочастотной фильтрацией ( $K-\Phi$ ) ( $\gamma = 0$ , $\gamma < 1$ , $\gamma = 1$ )

1. Случай  $\gamma = 0$ . Суммируя в (16) ряд, получим ( $R_2 \gg R_1$ )

$$\langle V^2 \rangle = 4A \frac{\text{sh } \beta^* (1 - \cos \alpha^*)}{(\text{ch } \beta^* - \cos \alpha^*)(\text{ch } \beta^* - 1)} \omega_n \quad (\text{П.1})$$

Сравним с методом фильтрации (4):

$$\frac{\langle X^2 \rangle}{\langle V^2 \rangle} = \frac{(\text{ch } \beta^* - 1)(\text{ch } \beta^* - \cos \alpha^*)}{2(1 - \cos \alpha^*) \text{sh } \beta^*} \quad (\text{П.2})$$

Отношение  $\langle X^2 \rangle / \langle V^2 \rangle < 1$  в области, расположенной выше кривой на рис. 6. При выполнении неравенств, приведенных в (15), эта область сокращается до размеров области, расположенной выше кривой и ограниченной пунктирными линиями на рис. 6.

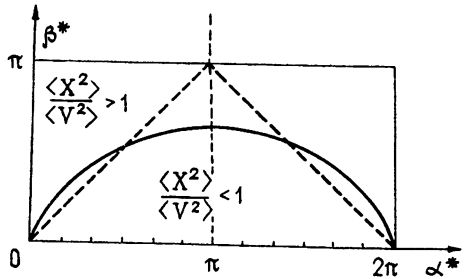


Рис. 6.

2. Случай  $\gamma < 1$ . Из (4), (16) и (П.2) можно записать

$$\frac{\langle X^2 \rangle}{\langle V^2 \rangle} < \left( \frac{\tau_h}{T} \right)^\gamma \frac{(2\pi)^\gamma \Gamma(1 - \gamma)}{2} \frac{(\text{ch } \beta^* - 1)(\text{ch } \beta^* - \cos \alpha^*)}{(1 - \cos \alpha^*) \text{sh } \beta^*} \quad (\text{П.3})$$

Из (П.3) видим, что если период «быстрой» калибровки может быть сделан значительно меньше  $\tau_h = 1/\omega_n$ , то метод  $K-\Phi$  будет эффективен и в случае слабокоррелированного шума.

3. Случай  $\gamma = 1$ . Суммируя ряд в (16), получим ( $R_2 \gg R_1$ )

$$\langle V^2 \rangle = \frac{2A}{\pi} \ln \left( \frac{\text{ch } \beta^* - \cos \alpha^*}{\text{ch } \beta^* - 1} \right) \quad (\text{П.4})$$

Из (106) и (П.4) можно указать нижнюю границу получаемого дополнительного выигрыша по сравнению с методом «быстрой» калибровки (без использования низкочастотной фильтрации):

$$\frac{\langle Y^2 \rangle_{\tau=\tau^*}}{\langle V^2 \rangle} \geq 4,5 \left( \frac{\tau_h}{T} \right) \ln \left[ \left( \frac{\tau^*}{\tau_h} \right)^2 + 1 \right]. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.5) видим, что дополнительное применение низкочастотной фильтрации целесообразно даже в том случае, когда период «быстрой» калибровки оказывается порядка (и даже несколько больше)  $\tau_h$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. Л. Электрические флуктуации.— М.—Л.: ОНТИ, 1936, гл. V.
2. Земельман М. А. Автоматическая коррекция погрешностей измерительных устройств.— М.: Изд-во стандартов, 1972.
3. Туз Ю. М. Диссертация, Киев, Политехнический ин-т, 1972.
4. Хидака Т.— Приборы для научных исследований, 1975, № 2, с. 31 (русский перевод).
5. Nicolson A. M. Wescon Conv., San Francisco C. A., Sess 22, 1969.
6. Кисляков А. Г.— Изв вузов — Радиофизика, 1962, 5, № 5, с. 945.
7. Корольков Д. В., Парийский Ю. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 12, с. 173.
8. Персин С. М.— В сб.: Географическое приборостроение, 1963, вып. 17.
9. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электротехнике. В кн: Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции узла связи. Управление связи, РККА, 1933.
10. Шеннон К. Связь при наличии шума В кн: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике.— М.: ИЛ, 1963.
11. Папулис А.— ТИИЭР, 1966, 54, № 7, с. 34.
12. Джерри А. Д.— ТИИЭР, 1977, № 11, с. 53.
13. Вол В. А.— Радиотехника, 1958, № 8, с. 63.
14. Вол В. А.— Радиотехника, 1959, № 3, с. 69.
15. Вол В. А.— Радиотехника, 1960, № 4, с. 36.
16. Гудкович Б. Д.— Вопросы радиоэлектроники. Сер. Радиоизмерительная техника, 1968, № 4, с. 96.
17. Рябинин Ю. А. Стробоскопическое осциллографирование. Изд. 2-е, дополненное и переработанное.— М: Сов. радио, 1972.
18. Белорусец В. Б., Левитас Б. Н.— Техника средств связи. Радиоизмерительная техника, 1978, № 3, с. 19.
19. Замек И. Г., Малахов А. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 1, с. 61.
20. Игнатъев Н. К. Дискретизация и ее приложения.— М.: Связь, 1980.
21. Замек И. Г.— Техника средств связи. Радиоизмерительная техника, 1981, № 1.
22. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1.— М.: Сов. радио, 1969.
23. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах.— М.: Наука, 1968.
24. Vagnes J. A. a. o.— Proc. IEEE. Trans, 1971, IM-20, № 2, p. 105.
25. Пашев Г. П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1535.
26. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию  
2 сентября 1981 г.

#### ANALYSIS OF EFFICIENCY OF THE METHOD OF «ZERO» CALIBRATION

*I. G. Zamek*

The efficiency and potential possibilities are analysed for the application of «zero» calibration method to decrease the effect of the white and flicker noise on the measurement accuracy of discrete values and the signal form  $S(t)$ . The noise transformation is considered which occurs as a result of the «zero» calibration method application taking into account the nonidealization of the discretization process. Conditions have been obtained when the method of the «zero» calibration provides the decrease of the noise effect as well as expressions permitting to calculate the residual noise effect after the calibration method applied. Different combinations of the «zero» calibration method and low-frequency noise filtration of noise are considered.