ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 522.2;538.56;535

КВАНТОВЫЙ ШУМ В АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. I*

В. И. Татарский

Теоретически анализируются адаптивные оптические системы (АОС), работающие с малыми световыми потоками, для которых основной помехой является квантовый шум Рассматриваются АОС, использующие априорную информацию о статистике волнового поля и работающие по заданному алгоритму с использованием счетчиков фотонов. Показано, что основной статистической характеристикой электромагнитного поля, определяющей как возможный средний выигрыш, так и оптимальный алгоритм работы АОС, является условная функция когерентности при известном числе фотонов, зарегистрированных в измерительных каналах. Получена явная формула, позволяющая вычислить эту функцию, если известны статистические свойства электромагнитного поля. Для нахождения вида оптимального распределенного фазового корректора получено интегральное уравнение, ядро которого содержит условную функцию когерентности

1. ВВЕДЕНИЕ

Адаптивная оптика привлекает к себе в последнее время значительный интерес в связи с возможностью существенно снизить вредное влияние флуктуаций в среде распространения на качество оптической системы. Этому вопросу посвящено уже несколько обзоров и специальных сборников (см., например, [1–3]). В работах автора [4] рассматривались некоторые общие вопросы теории адаптивных оптических систем и было введено понятие условной функции когерентности волнового поля, которое для адаптивных оптических (или в более общем случае — волновых) систем играет ту же роль, что и обычное понятие когерентности для неадаптивных систем. В работе [4] не рассматривались, однако, вопросы, связанные с квантовой природой света. Вместе с тем, если интенсивность излучения достаточно мала, что в большинстве случаев и представляет интерес для практических приложений в астрономии, то влиянием фотонного шума [5] пренебрегать уже нельзя, так как именно этот шум становится определяющим для работы адаптивной системы. Настоящая работа обобщает полученные в [4] результаты на этот случай.

Следует отметить, что фотонный шум нельзя рассматривать как аддитивный шум, возникающий при измерениях параметров волнового поля. Поэтому мы не можем сразу воспользоваться результатами работы [4] и рассматриваем вопрос заново.

Теоретическому рассмотрению квантового (фотонного) шума в адаптивных оптических системах (АОС) посвящена работа Дайсона [5], однако постановка задачи в ней вызывает, на наш взгляд, некоторые возражения, о которых говорилось в заключительной части работы [4]. С другой стороны, в настоящей статье, следуя работе [5], мы предполагаем, что единственными измеряемыми величинами являются числа фотоотсчетов $n_1, \dots, n_N$, зарегистрированных N счетчиками фотонов за некоторый интервал времени T. При этом мы вынужде-

* Статья «Квантовый шум в адаптивных оптических системах». II будет опубликована в № 9 1982 г.

ны рассматривать и конкретный механизм процесса измерения (например, измерения фазы при помощи счетчиков фотонов).

АОС может функционировать с использованием системы обратной связи. В этом случае числа $n_1, \ldots, n_N$ регистрируются внутри петли обратной связи и зависят не только от состояния волнового поля, но и от состояния самой АОС. Такой тип АОС анализировался в [5].

Можно представить себе АОС, работающую по заданному алгоритму. В этом случае числа $n_1, \ldots, n_N$ измеряются в той части оптической системы, состояние которой не меняется, поэтому они зависят только от состояния волнового поля. Измеренные значения $n_1, \ldots, n_N$ используются для управления структурой той части АОС, которая независима от ее измерительной части. В [4] мы рассматривали в основном системы такого типа. В настоящей работе мы также ограничимся более простым для анализа случаем адаптивных систем, работающих по заданному алгоритму. Наконец, одна из главных особенностей в рассматриваемой нами постановке задачи заключается в том, что мы предполагаем заранее известными статистические свойства волнового поля (априорная информация о поле). Это и позволяет заранее указать оптимальный алгоритм управления системой.

Как было показано в [4], оптимальный средний выигрыш, который может быть получен от АОС, определяется тем, как и в каком количестве выбраны управляемые элементы, и для данного набора этих элементов зависит только от статистических характеристик волнового поля, в частности, условной функции когерентности. Поэтому, чтобы оценить предельные возможности АОС, достаточно рассмотреть наиболее простой случай системы, использующей априорную информацию о поле и работающую по заданному алгоритму.

Дальнейшие разделы работы посвящены следующим вопросам. Во втором разделе приводятся необходимые сведения о статистике фотоотсчетов. В третьем разделе рассматривается структура АОС с регистрацией фотоотсчетов и показано, что ее средний отклик определяется условной функцией когерентности (19) при известном числе фотоотсчетов в измерительной части системы. В четвертом разделе работы выводится явная формула (21), позволяющая вычислять эту условную функцию когерентности, если известна статистика волнового поля. В пятом разделе выводится нелинейное интегральное уравнение (26), определяющее оптимальный фазовый корректор. Во второй части работы (раздел 6) рассмотрен конкретный пример: волновое поле с гауссовым распределением флуктуаций фазы и постоянной амплитудой. Для этого поля строятся условные функции когерентности, соответствующие тому или иному числу зарегистрированных при измерениях фазы фотонов. В Приложении 1 (часть II) анализируется распределение вероятностей для синуса разности фаз, возникающее при измерении его при помощи двух фотосчетчиков.

2. НЕАДАПТИВНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С РЕГИСТРАЦИЕЙ ЧИСЛА ФОТООТСЧЕТОВ

Как и в [4], будем описывать волновое поле при помощи медленно изменяющейся во времени комплексной амплитуды $u(\boldsymbol{r}, t)$. Эту величину можно, вообще говоря, определить различными способами, но мы будем считать $ue^{-i\omega t}$ аналитическим сигналом, что позволяет воспользоваться развитой в работах [6–8] квантовой теорией фотодетектирования.

Рассмотрим типичную схему оптического прибора, работающего в режиме счета фотонов. Пусть $u(\boldsymbol{\rho}, t)$ — амплитуда поля на входной апертуре оптического прибора. Это поле подвергается в приборе некоторому линейному преобразованию вида

$$v(\mathbf{r},\ t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\mathbf{r},\ \rho)\,u(\rho,\ t)\,d^2\rho. \tag{1}$$

В нескольких точках $\mathbf{r}_1,\ldots,\ \mathbf{r}_M$ выходной апертуры располагаются счетчики фотонов, регистрирующие числа фотоотсчетов за интервал времени $(t-T,\ t)$. Пусть $m_1,\ldots,m_M$ — количества фотоотсчетов, зарегистрированных этими счетчиками. Мы будем считать, что величина Q, подвергающаяся измерению в данном приборе, выражается через m_α линейно:

$$Q(t)=\sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha m_\alpha \tag{2}$$

(результаты нетрудно обобщить и на более общий случай произвольной зависимости Q от m_α).

Как известно (см., например, [6–8]), фотодетектор, взаимодействующий с детерминированным (когерентным) полем v, регистрирует за время от $t-T$ до t некоторое случайное число m фотонов, причем вероятность регистрации m фотонов равна

$$P(m)=e^{-\mu}\mu^m/m!,$$

где

$$\mu=\eta\int\limits_{t-T}^{t}|v(t')|^2\,dt',$$

а коэффициент η пропорционален площади* и квантовой эффективности фотодетектора. Если волновое поле $v(t')$ является случайным, то эта формула по-прежнему справедлива для каждой его реализации и дает условную вероятность регистрации m фотонов при заданном поле $v(t')$:

$$P(m/v)=e^{-\mu}\mu^m/m!$$

Безусловное распределение вероятностей для m можно получить отсюда усреднением по v:

$$P(m)=(1/m!)\,\langle e^{-\mu}\mu^m\rangle_v.$$

Точно так же, если имеется несколько счетчиков, расположенных в точках $\mathbf{r}_1,\ldots,\ \mathbf{r}_M$, то совместная вероятность регистрации m_1 фотонов счетчиком в $\mathbf{r}_1,\ldots,\ m_M$ фотонов счетчиком в $\mathbf{r}_M$ при заданных полях $v(\mathbf{r}_1,\ t'),\ \ldots,\ v(\mathbf{r}_M,\ t')$ равна

$$P(m_1,\ldots,\ m_M/v(\mathbf{r}_1,\ t'),\ \ldots,\ v(\mathbf{r}_M,\ t'))= \tag{3}$$

$$=\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{e^{-\mu_M}\mu_M^{m_M}}{m_M!},$$

где

$$\mu_\alpha=\eta_\alpha\int\limits_{t-T}^{t}|v(\mathbf{r}_\alpha,\ t')|^2\,dt'. \tag{4}$$

Безусловную же вероятность регистрации $m_1,\ldots,m_M$ фотонов можно получить, усредняя (3) по v:

$$P(m_1,\ldots,\ m_M)=\left\langle\frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{e^{-\mu_M}\mu_M^{m_M}}{m_M!}\right\rangle_v. \tag{5}$$

---

* Предполагается, что амплитуда поля мало меняется в пределах фотодетектора. В противном случае в формуле для μ появляется дополнительное интегрирование по апертуре фотодетектора.

По поводу формулы (5) следует отметить, что для полностью детерминированных волновых полей числа фотоотсчетов, регистрируемых различными фотодетекторами, статистически независимы. Зависимость между ними появляется, согласно (5), только за счет коррелированных флуктуаций поля. Если же флуктуации волнового поля в разных точках становятся независимыми, то снова появляется и независимость фотоотсчетов.

Среднее число фотоотсчетов в α-м детекторе равно

$$\langle m_\alpha \rangle = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_M=0}^{\infty} m_\alpha P(m_1, \ldots, m_M).$$

Подставляя (5), производя суммирование под знаком усреднения по v и пользуясь формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\mu} \mu^k / k! = \mu, \tag{6}$$

получим $\langle m_\alpha \rangle = \langle \mu_\alpha \rangle_v$. Используя эту формулу и усредняя (2), находим

$$J \equiv \langle Q \rangle = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \langle \mu_\alpha \rangle_v. \tag{7}$$

Подставляя сюда (4) и (1), можно записать выражение для среднего значения J измеряемой величины Q в следующем виде:

$$\begin{aligned} J = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \eta_\alpha \int_{t-T}^{t} dt' \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_1) \times \\ \times K_0^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_2) \langle u(\rho_1, t') u^*(\rho_2, t') \rangle = \\ = \int_{t-T}^{t} dt' \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 L_0(\rho_1, \rho_2) \Gamma(\rho_1, \rho_2, t'), \end{aligned} \tag{8}$$

где введены обозначения

$$L_0(\rho_1, \rho_2) = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \eta_\alpha K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_1) K_0^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_2) \tag{9}$$

и

$$\Gamma(\rho_1, \rho_2, t) = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t) \rangle.$$

Здесь Γ — функция взаимной когерентности второго порядка волнового поля, а функция L_0 характеризует структуру прибора. Если в интеграле (8) функция Γ спадает значительно быстрее, чем L_0, то это свидетельствует о недостаточной для данного прибора пространственной когерентности волнового поля. В этом случае и может оказаться полезной АОС.

3. АДАПТИВНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С РЕГИСТРАЦИЕЙ ЧИСЛА ФОТООТСЧЕТОВ

В АОС, работающей по заданному алгоритму, производится измерение характеристик волнового поля $u(\rho, t)$ на входной апертуре и измеренные величины, характеризующие данное состояние волнового поля, используются для управления структурой оптической системы. Мы будем предполагать, что единственными величинами, которые могут быть при этом измерены, являются числа фотоотсчетов в измерительной части прибора. Здесь необходимо отметить следующий общеизвестный факт. Измерение числа фотоотсчетов может дать информацию лишь о величине квадрата модуля поля. Поэтому, чтобы получить информацию не только о модуле, но и о фазе поля, необходимо предварительно добиться интерференции полей. Например, если мы хотим измерить разность фаз поля в двух точках $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$, то можно предварительно при помощи интерферометра сформировать величину $w_3 = u(\boldsymbol{R}_1, t) + iu(\boldsymbol{R}_2, t)$, после чего поле w_3 подвергнуть фотодетектированию. Вместе с измерениями чисел фотоотсчетов для полей $w_1 = u(\boldsymbol{R}_1, t)$ и $w_2 = u(\boldsymbol{R}_2, t)$ это даст возможность получить статистическую оценку величины $\sin[S(\boldsymbol{R}_1) - S(\boldsymbol{R}_2)]$ (соответствующий пример будет более подробно рассмотрен в разделе 6 и в Приложении 1 (часть II)).

В соответствии со сказанным выше, мы предположим, что в измерительной части АОС формируются N вспомогательных полей

$$w_i(t) = \iint F_i(\rho)\, u(\rho, t)\, d^2\rho, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

каждое из которых подвергается фотодетектированию на интервале времени $(t_p - T, t_p)$. Результатами измерений являются случайные числа $n_1, \ldots, n_N$ (если будет необходимо отметить, что они получены на p-м интервале времени, мы будем обозначать их как $n_i^{(p)}$). Совместное распределение вероятностей для чисел n_i имеет тот же вид, что и (5):

$$P(n_1, \ldots, n_N) = \left\langle \frac{e^{-\nu_1} \nu_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{e^{-\nu_N} \nu_N^{n_N}}{n_N!} \right\rangle_{u_p}, \tag{11}$$

где

$$\nu_i = \eta_i \int\limits_{t_p - T}^{t_p} |w_i(t')|^2\, dt', \quad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

и угловые скобки с индексом u_p обозначают усреднение по флуктуациям волнового поля на интервале $(t_p - T, t_p)$. Величины $n_i^{(p)}, n_i^{(p-1)}, \ldots$, полученные в результате измерений на p-м, $(p-1)$-м и т. д. интервалах времени, можно использовать для управления состоянием оптической системы на последующем $(p+1)$-м интервале времени. Мы предположим, для простоты, что используются лишь числа $n_i^{(p)}$, полученные на предыдущем интервале времени. (Это ограничение не будет приводить к существенному ухудшению работы АОС, если время измерения T не превышает времени корреляции $\tau_к$ поля u.) Тогда функции $K(\boldsymbol{r}, \rho)$, $L(\rho_1, \rho_2)$, описывающие структуру прибора на $(p+1)$-м интервале времени, будут зависеть от измеренных значений $n_i^{(p)}$:

$$K_{p+1} = K(\boldsymbol{r}, \rho;\, n_1^{(p)}, \ldots, n_N^{(p)}), \quad L_{p+1} = L(\rho_1, \rho_2;\, n_1^{(p)}, \ldots, n_N^{(p)}). \tag{13}$$

Проследим, как сказывается зависимость функций K_{p+1} от $n^{(p)}$ на среднем значении измеряемой величины. С учетом (13), имеем

$$v_{p+1}(\boldsymbol{r}_\alpha, t', n^{(p)}) = \iint K(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho;\, n^{(p)})\, u_{p+1}(\rho, t')\, d^2\rho.$$

Здесь индекс $(p+1)$ при $u(\rho, t')$ означает, что $t_{p+1} - T \leqslant t' \leqslant t_{p+1}$. Тогда параметр μ_α, определяющий скорость счета α-го счетчика, запишется в виде

$$\mu_\alpha^{(p+1)}(n^{(p)}) = \eta_\alpha \int\limits_{t_{p+1} - T}^{t_{p+1}} dt' \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 K(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_1;\, n^{(p)}) \times$$
$$\times K^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_2;\, n^{(p)})\, u_{p+1}(\rho_1, t')\, u_{p+1}^*(\rho_2, t'). \tag{14}$$

Случайные числа $m_1^{(p+1)},\ldots,\ m_M^{(p+1)}$, появляющиеся в результате регистрации фотонов в «рабочей» части прибора на $(p+1)$-м интервале времени, описываются совместным распределением вероятностей вида (5), в котором, однако, параметры $\mu_\alpha^{(p+1)}$ задаются формулой (14). При этом, поскольку случайные величины $n^{(p)}$ и u_{p+1} статистически зависимы, усреднение (при заданных $n^{(p)}$) производится по условному распределению вероятностей для u_{p+1} при условии, что на предыдущем интервале времени были зарегистрированы числа $n_1^{(p)},\ldots,\ n_N^{(p)}$. В результате мы получаем условное распределение для фотоотсчетов m на $(p+1)$-м интервале при условии, что на p-м интервале в измерительной части прибора были зарегистрированы числа $n_1^{(p)},\ldots,\ n_N^{(p)}$:

$$P_{p+1}(m_1,\ \ldots,\ m_M/n_1^{(p)},\ \ldots,\ n_N^{(p)}) = \left\langle \frac{e^{-\mu_1^{(p+1)}}\left(\mu_1^{(p+1)}\right)^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{e^{-\mu_M^{(p+1)}}\left(\mu_M^{(p+1)}\right)^{m_M}}{m_M!} \Big/ n_1^{(p)},\ldots,\ n_N^{(p)} \right\rangle_{u_{p+1}}. \tag{15}$$

В следующем разделе работы мы выведем явную формулу, позволяющую находить условные средние при заданных $n_l^{(p)}$. Сейчас же, считая, что $P(m/n)$ известно, вычислим при помощи (15) условное среднее значение $\langle m_\alpha/n^{(p)}\rangle$. Тогда, в силу формулы (6),

$$\langle m_\alpha/n^{(p)}\rangle \equiv \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_M=0}^{\infty} m_\alpha P_{p+1}(m/n^{(p)}) = \langle \mu_\alpha^{(p+1)}/n^{(p)}\rangle_{u_{p+1}}. \tag{16}$$

После этого условное среднее значение величины $Q_{p+1}=\Sigma\, q_\alpha m_\alpha$ при заданных $n^{(p)}$ выразится формулой

$$\langle Q_{p+1}/n^{(p)}\rangle = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \langle \mu_\alpha^{(p+1)}/n^{(p)}\rangle_{u_{p+1}}. \tag{17}$$

Теперь можно получить формулу для среднего значения $J=\langle Q\rangle$, если усреднить (17) по распределению вероятностей (11) для $n_l^{(p)}$:

$$J = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \langle \mu_\alpha^{(p+1)}/n\rangle_{u_{p+1}} \left\langle \prod_{l=1}^{N} \frac{e^{-\nu_l}\nu_l^{n_l}}{n_l!} \right\rangle_{u_p}. \tag{18}$$

Рассмотрим подробнее входящую сюда величину $\langle \mu_\alpha^{(p+1)}/n\rangle_u$. Подставляя (14), запишем ее в виде

$$\langle \mu_\alpha/n\rangle_u = \eta_\alpha \int_{t_{p+1}-T}^{t_{p+1}} dt' \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2\, K(\mathbf{r}_\alpha,\ \rho_1;\ n^{(p)}) \times$$

$$\times K^*(\mathbf{r}_\alpha,\ \rho_2;\ n^{(p)}) \langle u_{p+1}(\rho_1,\ t')\, u_{p+1}^*(\rho_2,\ t')/n^{(p)}\rangle_u.$$

Мы видим, что величина $\langle \mu/n\rangle_u$ определяется условной функцией когерентности волнового поля

$$\widetilde{\Gamma}(\rho_1,\ \rho_2,\ t'/n_1,\ldots,\ n_N) = \langle u(\rho_1,\ t')\, u^*(\rho_2,\ t')/n_1,\ldots,\ n_N\rangle_u. \tag{19}$$

Эта функция аналогична введенным в [4] условным функциям когерентности, которые определяют среднее значение измеряемой величины в АОС в пренебрежении квантовыми шумами.

4. УСЛОВНАЯ ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЧИСЛЕ ФОТООТСЧЕТОВ

В этом разделе мы выведем явную формулу, по которой можно находить условные средние значения произвольных функционалов от волнового поля при заданном числе фотоотсчетов.

Будем исходить из формулы (3), которую запишем для фотоотсчетов в измерительной части АОС:

$$P(n_1,\ldots,n_N/u)=\prod_{l=1}^{N}\frac{e^{-\nu_l}\nu_l^{n_l}}{n_l!}.$$

Здесь случайное волновое поле u входит в параметры ν_i, определяемые формулами (12) и (10).

Обозначим через $W[u]$ вероятностный функционал («плотность вероятностей») случайного волнового поля $u(\rho,t)$. Средние значения произвольных функционалов от u выражаются через $W[u]$ при помощи континуального интеграла:

$$\langle F[u]\rangle=\int F[u]\,W[u]\prod_{\rho,t}du(\rho,t).$$

Тогда, если умножить $P(n/u)$ на $W[u]$, мы найдем совместное распределение вероятности получения фотоотсчетов $n_1,\ldots,n_N$ и данной реализации $u(\rho,t)$:

$$W[n_1,\ldots,n_N;u]=\frac{e^{-\nu_1}\nu_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{e^{-\nu_N}\nu_N^{n_N}}{n_N!}W[u].$$

Учитывая, что формулу для совместной вероятности можно записать в двух эквивалентных видах:

$$W[n_1,\ldots,n_N;u]=P(n/u)\,W[u]=W[u/n]\,P(n),$$

получаем отсюда

$$W[u/n_1,\ldots,n_N]=\frac{P(n_1,\ldots,n_N/u)}{P(n_1,\ldots,n_N)}W[u].$$

Используя эту формулу, запишем условное среднее значение произвольного функционала от u:

$$\langle F[u]/n_1,\ldots,n_N\rangle=[P(n_1,\ldots,n_N)]^{-1}\int F[u]\,P(n_1,\ldots,n_N/u)\,W[u]\,\Pi du.$$

Но континуальный интеграл в правой части представляет собой безусловное среднее значение от произведения $F[u]P(n/u)$. Поэтому, подставляя выражения для $P(n/u)=\Pi[\exp(-\nu_i)\nu_i^{n_i}/n_i!]$ и $P(n)=\langle P(n/u)\rangle_u$, запишем последнюю формулу в окончательном виде:

$$\langle F[u]/n_1,\ldots,n_N\rangle=\frac{\langle F[u]\,e^{-\nu_1}\nu_1^{n_1}\cdots e^{-\nu_N}\nu_N^{n_N}\rangle_u}{\langle e^{-\nu_1}\nu_1^{n_1}\cdots e^{-\nu_N}\nu_N^{n_N}\rangle_u}. \tag{20}$$

Здесь

$$\nu_l-\nu_l[u]=\eta_l\int_{t_p-T}^{t_p}dt'\iint d^2\rho_1\iint d^2\rho_2F_l(\rho_1)F_l^*(\rho_2)\,u(\rho_1,t')\,u^*(\rho_2,t').$$

В частности, для условной функции когерентности, определяемой формулой (19), можем записать:

$$\widetilde{\Gamma}(\rho_1,\rho_2,t/n_1,\ldots,n_N)=$$

$$= \frac{\langle u(\rho_1, t)\, u^*(\rho_2, t) \exp[-(\nu_1 + \ldots + \nu_N)]\, \nu_1^{n_1} \ldots \nu_N^{n_N} \rangle_u}{\langle \exp[-(\nu_1 + \ldots + \nu_N)]\, \nu_1^{n_1} \ldots \nu_N^{n_N} \rangle_u}. \tag{21}$$

В разд. 6 работы будут приведены примеры условных функций когерентности для конкретной статистической модели оптического поля.

5. ОПТИМАЛЬНАЯ АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА

Как и в [4], можно рассмотреть вопрос об оптимальном выборе функции $K(\boldsymbol{r}, \rho; n_1, \ldots, n_N)$ с целью максимизировать среднее значение измеряемой величины J. Выразив входящие в формулу (18) величины через $\tilde{\Gamma}$ и K, можем записать

$$J = \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_N=0}^{\infty} q_\alpha \eta_\alpha P(n_1, \ldots, n_N) \int_{t-T}^{t} dt' \iint d^2\rho_1 \times$$
$$\times \iint d^2\rho_2 K(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_1, n) K^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho_2, n) \tilde{\Gamma}(\rho_1, \rho_2, t'/n). \tag{22}$$

Как и в [4], будем искать оптимальную фазовую коррекцию и в связи с этим положим

$$K(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho, n) = K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho)\, e^{i\varphi(\rho, n)}. \tag{23}$$

Здесь $K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho)$ — известные функции, представляющие собой желаемую характеристику оптического прибора, рассчитанного на работу с пространственно-когерентным излучением. Подставим (23) в (22) и проварьируем J по $\varphi(\rho, n)$. Используя формулу

$$\frac{\delta\varphi(\rho, n_1, \ldots, n_N)}{\delta\varphi(\rho', n_1', \ldots, n_N')} = \delta(\rho - \rho')\, \delta_{n_1 n_1'} \ldots \delta_{n_N n_N'},$$

получим условие экстремума для J в следующем виде:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta J}{\delta\varphi(\rho', n_1', \ldots, n_N')} = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \eta_\alpha P(n_1', \ldots, n_N') \int_{t-T}^{t} dt' \iint d^2\rho \times$$
$$\times \{K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho') K_0^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho) \tilde{\Gamma}(\rho', \rho, t'/n') \exp\{i[\varphi(\rho', n') - \varphi(\rho, n')]\} - \tag{24}$$
$$- K_0^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho') K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho) \tilde{\Gamma}(\rho, \rho', t'/n') \exp\{i[\varphi(\rho, n') - \varphi(\rho', n')]\}\} = 0.$$

Учитывая, что $\tilde{\Gamma}(\rho, \rho', t'/n) = \tilde{\Gamma}^*(\rho', \rho, t'/n)$, это условие можно записать также в форме $F - F^* = 0$, где введены обозначения

$$F(\rho, n) = e^{i\varphi(\rho, n)} \iint d^2\rho' Z(\rho, \rho', n)\, e^{-i\varphi(\rho', n)},$$
$$Z(\rho, \rho', n) = \sum_{\alpha=1}^{M} q_\alpha \eta_\alpha K_0(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho) K_0^*(\boldsymbol{r}_\alpha, \rho') \int_{t-T}^{t} dt' \tilde{\Gamma}(\rho, \rho', t'/n). \tag{25}$$

Уравнению $F - F^* = 0$ можно придать вид, аналогичный задаче на собственные значения:

$$\iint Z(\rho, \rho', n)\, e^{-i\varphi(\rho', n)} d^2\rho' = F(\rho, n)\, e^{-i\varphi(\rho, n)}, \quad F^* = F. \tag{26}$$

Математический смысл уравнения (26) состоит в том, что ищется такой единичный вектор $\exp[-i\varphi(\rho, n)]$ на комплексной плоскости, который переводится интегральным оператором Z в вектор $F\exp[-i\varphi(\rho, n)]$ того же направления, но, вообще говоря, другого, зависящего от точки ρ, модуля F. Уравнение (26) имеет тот же вид, что и аналогичное уравнение, полученное в [4] для случая, когда квантовый шум несуществен.

Если решение уравнения (26) найдено, то величина $J_{\max}$, соответствующая подстановке этого решения в (22), определяется формулой

$$J_{\max} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} P(n_1, \dots, n_N) \iint F(\rho, n_1, \dots, n_N)\, d^2\rho.$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае оптимальная структура адаптивной системы определяется условной функцией когерентности $\tilde{\Gamma}$, что аналогично результату, полученному в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Дж. У.— ТИИЭР, 1978, **66**, № 6, с. 31.
2. Адаптивная оптика: Сб. статей под ред. Д. Фрида.— М: Мир, 1980.
3. Оптические телескопы будущего./Под ред. Пачини, Рихтера и Вильсона. — М.: Мир, 1981.
4. Татарский В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 7, с. 861, 872.
5. Dyson F. J.— J. Opt. Soc. Am., 1975, **65**, № 5, p. 551.
6. Вольф Э., Мандель Л.— УФН, 1965, **87**, с. 491; 1966, **88**, с. 347, 619.
7. Глаубер Р.— В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика.— М.: Мир, 1966.
8. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики.— М.: Мир, 1970.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
31 августа 1981 г.

QUANTUM NOISE IN ADAPTIVE OPTICAL SYSTEMS. I

V. I. Tatarskij

A theoretical analysis is given for adaptive optical systems (AOS) operating with small light fluxes, the basic interference for which is the quantum noise. AOS are considered using and the photon counters the apriory information on the statistics of the wave field and they operate according to the given algorithm. It is shown that the basic statistical characteristics of the electromagnetic field defining both the possible average advantage and the optimal algorithm of AOS operation is the conventional coherence function with the known number of photons registered in measurement channels. An explicit formula has been obtained which permits to calculate this function if statistical properties of the electromagnetic field is known. To find the form of the optimal distribution of the phase corrector an integral equation is derived the nucleus of which has the conventional function of coherency.