где $f(x)$ и $g(x)$ — аналитические функции, а $\xi(t)$ — белый шум с единичной спектральной плотностью. Тогда [1, 2]

$$k_1(x) = 0{,}5\,[g^2(x)\,(d/dx)\ln W(x) + g'(x)\,g(x)],$$
$$k_2(x) = \sqrt{g^2(x)}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что для синтеза (1) необходимо по $\{\varkappa_s(0, \tau[s-1])\}_2^k$ найти $g(x)$.

Учитывая, что дифференциальные уравнения для $\varkappa_s(0, \tau[s-1])$ линейны [3] и начальные условия для них известны, систему уравнений (10.8 16) [3] по решениям $\{\varkappa_s(0, \tau[s-1])\}_2^k$ можно восстановить единственным образом [4].

Будем искать $g(x)$ в виде

$$g(x) = \sum_{i=1}^{M}{}' b_i x^i. \tag{3}$$

Учитывая соотношения (10.8.16) и (10 8.17) [3], всегда можно найти единственные A_{sm}, равные

$$A_{sm} = \frac{1}{(m-1)!}\left\langle \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \sum_{l=1}^{s-1} c_{s-1}^{l} (x[s-1-l],\ k_l(x) \right\rangle,$$

а по ним — $\{b_i\}^M$.

Однако относительно $\{b_i\}^M$ система алгебраических уравнений может быть недоопределена, и коэффициенты $\{b_i\}$ можно находить, минимизируя невязку системы, что приводит к задачам квадратичного программирования. Отметим, что во многих практических случаях в СДУ (1) целесообразно выбирать $g^2(x) = K_0$, что упрощает дальнейшее практическое использование моделей и незначительно влияет на вид, например, $\varkappa_2(0, \tau)$ [1, 2]. Тогда процедура синтеза (1) элементарна, что иллюстрируется примером.

Пример. Пусть задана $W(x) = c\exp(px^2 - qx^4)$ и $\{\varkappa_s(0, \tau[s-1])\}_2^4$. Положим $g^2(x) = K_0$, кроме того, с погрешностью $\sim 20\%$ [1, 2]

$$\varkappa_2(0, \tau) = \varkappa_2 \exp(-\lambda_1|\tau|).$$

Условия указанного приближения оговорены в [2]. Тогда, используя [3], легко показать, что

$$K_0 = \lambda_1/|2qn_0 - p|,$$

где $n_0 = \alpha_4/\alpha_2$, что совпадает с [2], где этот результат был получен из других соображений.

В заключение отметим, что хотя на первый взгляд способ задания априорной информации для синтеза СДУ (1) исключает «модельные приближения», оговоренные в [3], тем не менее эти допущения приходится делать, так как синтезированное СДУ тем ближе к «истинному», чем полнее заданная априорно система $\{\varkappa_s(0, \tau[s-1])\}_1^k$, и $W(x)$ описывает $W_2(x, x_\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конторович В. Я.— Изв. АН СССР — Техническая кибернетика, 1974, № 6, с. 143.
2. Конторович В. Я.— Труды учебных институтов связи, 1980, вып. 97, с. 3.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований — М.: Сов. радио, 1978.
4. Гноенский Л. С, Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем.— М : Наука, 1969, с. 511.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 4 июня 1981 г.

УДК 621 396.67

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

О. И. Шелухин

В некоторых важных для практики случаях [1] измеритель параметров движения располагается в непосредственной близости от отражающей поверхности. Целью предлагаемой работы является оценка точности таких измерителей при нахождении их в зоне Френеля.

Определим поле $e(V, a, t)$ в месте приема, считая, что передающая и приемная антенны совмещены и перемещаются со скоростью V и ускорением a вблизи отражающей поверхности, минимальное расстояние до которой R_0 и характеризуется коэффициентом отражения $v[\theta(x, y)]$. Здесь $\theta(x, y)$ — угол падения в точке $C(x, y, 0)$. Согласно [2] запишем:

$$e(V, a, t) = \frac{i}{\lambda} \iint\limits_{D(x,y)} E(x, y, 0) \frac{\exp(ikR)}{R} v[\theta(x, y)]\, dx\, dy, \tag{1}$$

где $E(x, y, 0) = i\lambda^{-1} \iint\limits_{S} F(\xi, \eta, R_0) \exp(ikR_1) R_1^{-1} d\xi d\eta$ — напряженность поля в точке $C(x, y, 0)$, $F(\xi, \eta, R_0)$ — распределение амплитуд и фаз поля в точке $B(\xi, \eta, R_0)$ раскрыва антенны, $k = 2\pi/\lambda$ — волновой множитель, S — площадь раскрыва антенны, $D(x, y)$ — площадь облучаемой поверхности,

$$R = \left[(x_0 + Vt + at^2 - x)^2 + (y - y_0)^2 + R_0^2\right]^{1/2} \simeq$$

$$\simeq R_0 + 0{,}5\, R_0^{-1} \{(y - y_0)^2 + [(x - x_0) - (Vt + at^2)]^2\},$$

x_0, y_0, R_0 — координаты центра раскрыва антенны, $R_1 = \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + R_0^2\right]^{1/2} \simeq R_0 + 0{,}5\, R_0^{-1}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$, ξ, η — текущая координата раскрыва антенны.

Полагая в амплитудных сомножителях $1/R \simeq 1/R_1 \simeq 1/R_0$, представим (1) в виде

$$e(V, a, t) = \exp(ikR_0)\, \lambda^{-2} R_0^{-2} \iint\limits_{D(x, y)} v[\theta(x, y)] \exp[ikR_0 \varphi(x, y, a, V, t)] \times$$
$$\times \left\{ \iint\limits_{S} F(\xi, \eta) \exp[ikR_0 \varphi_1(\xi, \eta, x, y)]\, d\xi\, d\eta \right\} dx\, dy, \tag{2}$$

где

$$\varphi(x, y, a, V, t) = 0{,}5 R_0^{-2} [(y - y_0)^2 + (x - x_0 - Vt - at^2)^2],$$

$$\varphi_1(\xi, \eta, x, y) = 0{,}5\, R_0^{-2} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

Рассматривая случай, когда $F(\xi, \eta)$ может быть представлено в виде

$$F(\xi, \eta) = |F(\xi, \eta)| \exp\left(-ik\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + R_0^2}\right),$$

запишем внутренний интеграл в виде

$$I_1 = \iint\limits_{S} |F(\xi, \eta)| \exp[ikR_0 \varphi_2(\xi, \eta, x, y)]\, d\xi dn,$$

где

$$\varphi_2(\xi, \eta, x, y) = \varphi_1(\xi, \eta, x, y) - R_0^{-1} \left(\xi^2 + \eta^2 + R_0^2\right)^{1/2}.$$

Поскольку $kR_0 \gg 1$, а $\varphi_2(\xi, \eta, x, y)$ и $|F(\xi, \eta)|$ — медленно меняющиеся функции переменных ξ и η, то справедливо асимптотическое равенство [3]

$$I_1 = \frac{2\pi i}{kR_0 C_1(x, y, \xi_0, \eta_0)} \exp[ikR_0 \varphi_2(x, y, \xi_0, \eta_0)], \tag{3}$$

где

$$C_1(x, y, \xi_0, \eta_0) = \left[\varphi''_{2\,\xi\xi}\, \varphi''_{2\,\eta\eta} - \left(\varphi''_{2\,\xi\eta}\right)^2\right]^{1/2} \Big|_{\xi=\xi_0\ \eta=\eta_0},$$

а ξ_0 и η_0 определяются из системы уравнений

$$(d/d\xi)\, \varphi_2(\xi, \eta, x, y)\,|_{\xi=\xi_0,\ \eta=\eta_0} = 0,$$

$$(d/d\eta)\, \varphi_2(\xi, \eta, x, y)\,|_{\xi=\xi_0,\ \eta=\eta_0} = 0.$$

Нетрудно показать, что $\xi_0 = x_0$, а $\eta_0 = y_0$.

С учетом (3) представим (2) в виде

$$e(V, a, t) = -iB \iint\limits_{D(x, y)} A(x, y) \exp[ikR_0 \varphi_\Sigma(x, y, V, a, t)]\, dx\, dy, \tag{4}$$

где

$$A(x, y) = v[\theta(x, y)]\, C_1^{-1}(x, y, x_0, y_0), \quad B = \exp(ikR_0)\,\lambda^{-1} R_0^{-3}\,|F(x_0, y_0)|,$$

$$\varphi_\Sigma(x, y, V, a, t) = \varphi(x, y, V, a, t) + \varphi_2(x, y, x_0, y_0) =$$

$$= R_0^{-2}[(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 + 0{,}5\,(Vt + at^2)^2 - (x-x_0)(Vt+at^2)].$$

Используя метод стационарной фазы, представим (4) в виде

$$e(V, a, t) = \frac{2\pi BA(x_1, y_1)}{kR_0\, C_2(x_1, y_1)} \exp[ikR_0\, \varphi_\Sigma(x_1, y_1, a, V)],$$

где

$$C_2(x_1, y_1) = \left[\varphi''_{\Sigma\, xx}\varphi''_{\Sigma\, yy} - \left(\varphi''_{\Sigma\, xy}\right)^2\right]^{1/2}_{x=x_1,\, y=y_1},$$

а x_1 и y_1 определяются из системы уравнений

$$\varphi'_{\Sigma x}(x, y, a, V, t)\,\Big|_{x=x_1,\, y=y_1} = 0,$$

$$\varphi'_{\Sigma y}(x, y, a, V, t)\,\Big|_{x=x_1,\, y=y_1} = 0.$$

С учетом ранее сделанных обозначений запишем окончательное выражение для поля в месте приема:

$$e(V, a, t) = D\exp\{-ikR_0^{-1}[(x_1-x_0)(Vt-at^2) - 0{,}5\,(Vt+at^2)^2]\}.$$

Здесь

$$D = |F(x_0, y_0)|\, R_0^{-4} C_1^{-1}(x_1, y_1, x_0, y_0)\, C_2^{-1}(x_1, y_1)\times$$

$$\times\exp\left[-ik\left(R_0 - 0{,}5\left(x_0^2 + y_0^2\right)R_0^{-1}\right)\right].$$

Границы применимости полученных выражений определяются, очевидно, соотношением $R_0 \ll 2(L_а + L_п)^2/\lambda$, где $L_а$ и $L_п$ —соответственно наибольшие размеры раскрыва антенны и облучаемой поверхности, а также областью применимости метода стационарной фазы.

Перейдем к определению дисперсий оценок параметров движения: скорости σ_2^V и ускорения σ^2_a, которые характеризуют точность измерителя параметров движения. Считаем, что обнаружение и измерение параметров сигнала (5) на интервале времени T осуществляется на фоне гауссова шума $n(t)$, характеризующегося спектральной плотностью $S(\omega)$ и корреляционной функцией $K(\tau)$. Представим сигнал на входе измерителя в виде

$$X(t, V, a) = e(V, a, t) + n(t).$$

Как известно, [4] структура измерителя, осуществляющего оптимальную обработку сигналов $X(t, V, a)$, однозначно определяется логарифмом функции правдоподобия, имеющим вид

$$\ln L(V, a) = \int_T \vartheta(\tau, a, V)\, X(t, V, a)\, dt,$$

где функция $\vartheta(t, a, V)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_T K(t, \tau)\,\vartheta(\tau, a, V)\, d\tau = e(t, a, V).$$

С учетом сделанных предположений о структуре измерителя дисперсии оценок параметров движения могут быть определены из соотношений [4]

$$\sigma_V^2 = -\left[S''_{V,V} - S''_{a,V}/S''_{a,a}\right]^{-1}_{\hat V = V,\, \hat a = a},$$

$$\sigma_a^2 = -\left[S''_{a,a} - S''_{a,V}/S''_{V,V}\right]^{-1}_{\hat V = V,\, \hat a = a}, \qquad (5)$$

где $S(a, \hat a, V, \hat V, t) = \int_T \vartheta(t, a, V)\, e(\hat V, \hat a, t)\, dt$ представляет собой сигнальную функцию на выходе оптимального измерителя.

В случае, когда $K(\tau) = 2N_0\delta(\tau)$ и $\vartheta(t, a, V) = 0{,}5\, N_0^{-1}\, e\,(t, a, V)$, где $2N_0$ — спектральная плотность шума, можно записать:

$$S\,(V, a, t) = 0{,}5\, N_0^{-1} \int\limits_T e^*(t, \hat{a}, \hat{V})\, e\,(t, a, V)\, dt. \tag{6}$$

Отсюда входящие в (5) слагаемые могут быть легко определены. Так, для $S''_{V,\,V}$ найдем:

$$S''_{V,\,V} = 0{,}5\, N_0^{-1} \int\limits_T e^*(t, \hat{a}, \hat{V})\, [(d^2/dV^2)\, e\,(t, a, V)]_{V=\hat{V},\, a=\hat{a}}\, dt, \tag{7}$$

где $\hat{V}$ и $\hat{a}$ — оценки скорости перемещения измерителя и его ускорения. Используя (4) и (7), нетрудно определить матрицу S.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере равномерного движения, при котором $a = 0$. В результате (4) приведется к виду

$$e(V, a, t) = D \exp\,[-ik(a_1 Vt - a_2 V^2 t^2)], \tag{8}$$

где

$$a_1 = (x_1 - x_0)\, R_0^{-1}, \quad a_2 = 0{,}5\, R_0^{-1}.$$

С учетом (7) находим дисперсию скорости перемещения:

$$\sigma^2_V = -\left[S''_{V,\,V}\right]^{-1}_{V=\hat{V}} = \frac{2N_0}{D^2}\left[a_1^3 \frac{T^3}{3} - a_1 a_2 \hat{V}\, T^4 + \frac{4}{5}\, a_2^2\, \hat{V}^2 T^5\right]^{-1}. \tag{9}$$

Полученные результаты показывают, что перемещение измерителя в непосредственной близости от отражающей поверхности приводит к появлению в (8) составляющей вида $\exp\,(-ia_2 V^2 t^2)$, что увеличивает дисперсию оценки скорости.

В случае, когда измеритель располагается в дальней зоне, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ и (9) преобразуется к виду

$$\sigma^2_V = (2N_0/D)\,(4/T)^{-1},$$

что совпадает с аналогичным соотношением в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорин-Рябов В. В., Богачев А. П., Шелухин О. И.— Радиотехника, 1980, 35, № 3, с. 35.
2. Шелухин О. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 3, с. 391.
3. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1971.
4. Амиантов И. Н Избранные вопросы статистической теории связи.— М.: Сов. радио, 1971.
5. Тузов Г. И Выделение и обработка информации в доплеровских системах.—М.: Сов. радио, 1967.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию 14 апреля 1981 г.