ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 7 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 621.391 : 519.27

О ПОВЕДЕНИИ ПРОИЗВОДНОЙ В МОМЕНТЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ ЗАДАННОГО УРОВНЯ

В. И. Хименко

Рассмотрена задача о распределении производной в моменты пересечений непрерывным дифференцируемым случайным процессом некоторого заданного уровня. Получены простые аналитические выражения для условных плотностей вероятности. Результаты конкретизированы для некоторых наиболее распространенных негауссовых процессов. Все распределения представлены как отношения вероятностей, связанных с соответствующими потоками событий, образованных пересечениями, т. е. при условиях типа «горизонтального окна».

1. Во многих радиофизических задачах, связанных с рассмотрением вероятностных характеристик выбросов случайных процессов [1-3] возникает необходимость исследования поведения производной $\dot{\xi}(t)$ в моменты пересечений случайным процессом $\xi(t)$ некоторого заданного уровня c. Существенной особенностью в таких задачах является то, что вероятность пересечения непрерывным случайным процессом $\xi(t)$ уровня c при $t = t_0$ в общем случае равна нулю, $P\{\xi(t_0) = c\} = 0$. Это приводит, в частности, к неоднозначному определению условной плотности вероятности $p[\dot{\xi}(t) \,|\, \xi(t) = c]$ производной $\dot{\xi}(t) \equiv d\xi(t)/dt$. Второй важной особенностью является здесь то, что привычный метод нахождения условной плотности вероятности

$$p\,[\dot{\xi}(t) \,|\, \xi(t) = c] = p_2\,[\xi(t),\ \dot{\xi}(t)]/p_1(\xi)\,|_{\xi=c}$$

по совместной плотности вероятности $p_2[\xi(t),\ \dot{\xi}(t)]$ для значений $\xi(t)$, $\dot{\xi}(t)$ и одномерной плотности вероятности $p_1(\xi)$ процесса $\xi(t)$ не позволяет решить указанную задачу, поскольку в данном случае

$$p\,[\dot{\xi}(t) \,|\, \xi(t) = c] \neq p\,[\dot{\xi}(t_0) \,|\, \xi(t_0) = c].$$

В работе [4] (см. также [3] и [5], стр. 266) на основе использования условных вероятностей типа «горизонтального окна» получено выражение $p[\dot{\xi}(t_0) \,|\, \xi(t_0) = c]$ для случая стационарного гауссова процесса $\xi(t)$; для процессов с негауссовым распределением подобные вопросы, по-видимому, до настоящего времени остаются открытыми. В данной работе рассматриваются характерные особенности решения таких задач и для некоторых распространенных классов негауссовых процессов находятся явные выражения условных плотностей вероятности производной.

2. Определение вероятности $P\{A \,|\, \xi(t_0) = c\}$ некоторого произвольного события A при условии, что в момент времени $t = t_0$ траектория процесса $\xi(t)$ пересекает заданный уровень c, существенно зависит от интерпретации условия $\xi(t_0) = c$. Наиболее простыми и удобными являются два определения: условные вероятности «вертикального окна»

$P\{A \mid \xi(t_0) = c\}_{\text{v.w}}$ и условные вероятности «горизонтального окна» $P\{A \mid \xi(t_0) = c\}_{\text{h.w}}$. В первом случае (рис. 1) условие $\xi(t_0) = c$ интерпретируется как $\xi(t_0) \in [c, c + \Delta c]$, т. е. считается, что в момент времени $t = t_0$ траектория $\xi(t)$ проходит через элементарное «вертикальное окно» $[c, c + \Delta c]$. Во втором случае предполагается выполненным равенство $\xi(t) = c$ для некоторого $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$, т. е. считается, что пересечение уровня происходит на интервале $[t_0, t_0 + \Delta t]$ или, другими словами, что траектория $\xi(t)$ проходит через элементарное «горизонтальное окно» $[t_0, t_0 + \Delta t]$.

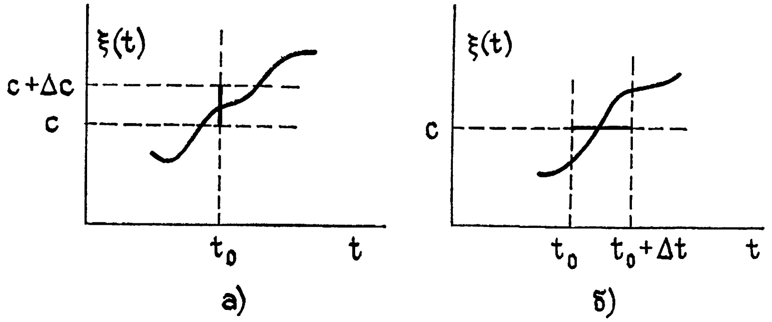

Рис. 1. Различная интерпретация события $\xi(t_0) = c$:
а) $\xi(t_0) \in [c, c + \Delta c]$, б) $\xi(t) = c$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$.

В обоих определениях [4] (см. также [1], § 11.1),

$$P\{A \mid \xi(t_0) = c\}_{\text{v.w}} \equiv \lim_{\Delta c \to 0} P\{A \mid \xi(t_0) \in [c, c + \Delta c]\}; \tag{1}$$

$$P\{A \mid \xi(t_0) = c\}_{\text{v.w}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} P\{A \mid \xi(t) = c, t \in [t_0, t_0 + \Delta t]\}, \tag{2}$$

условия $\xi(t_0) \in [c, c + \Delta c]$ и $\xi(t) = c$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ в пределе при $\Delta c \to 0$ и $\Delta t \to 0$ сходятся к условию $\xi(t_0) = c$. Вместе с тем выбор определений типа (1) или (2) при исследованиях условных вероятностей должен зависеть от характера решаемой задачи, так как различие в интерпретации события $\xi(t_0) = c$ приводит к принципиальному различию получающихся результатов. Учитывая эти особенности, перейдем теперь непосредственно к рассмотрению условных плотностей вероятности производной.

3. Предположим, что исследуемый случайный процесс $\xi(t)$ является стационарным и дифференцируемым, имеет математическое ожидание $m_\xi \equiv M\{\xi(t)\} = 0$ и корреляционную функцию $R_\xi(\tau) \equiv \equiv M\{\xi(t)\xi(t + \tau)\} = \sigma_\xi^2 r(\tau)$, для которой $-R_\xi''(0) = -(d^2/d\tau^2) \times \times R_\xi(\tau)|_{\tau=0} < \infty$. Будем также считать, что известна одномерная плотность вероятности $p_1(\xi)$ для процесса $\xi(t)$ и совместная плотность вероятности $p_2[\xi(t), \dot{\xi}(t)] \equiv p_2(\xi, \dot{\xi})$ для значений $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ в совпадающие моменты времени.

Из определения (1) легко заметить, что условие $\xi(t_0) \in [c, c + + \Delta c]$ всегда в конечном счете приводит к усреднению (или интегрированию) по уровню c. Если при исследованиях производной $\dot{\xi}(t)$ воспользоваться условием вертикального окна, то условная плотность вероятности $p[\dot{\xi}(t_0) \mid \xi(t_0) = c]_{\text{v.w}}$ может быть определена как

$$p[\dot{\xi}(t_0) \mid \xi(t_0) = c]_{\text{v.w}} = p_2(\xi, \dot{\xi}) p_1^{-1}(\xi)|_{\xi=c}. \tag{3}$$

Соотношение (3) при известных $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi, \dot\xi)$ позволяет достаточно просто находить условную плотность вероятности $p[\dot\xi(t_0)|\xi(t_0) = c]_{\text{v.w}} \equiv p(\dot\xi|\xi = c)$, которая, однако, не дает возможности характеризовать поведение производной $\dot\xi(t_0)$ в моменты пересечений $t = t_0$ процессом $\xi(t)$ некоторого заданного (фиксированного) уровня c.

Иначе обстоит дело при использовании условных вероятностей типа горизонтального окна (2). В предположении $\xi(t) = c$, $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ удается рассмотреть фиксированные значения уровня c, но в отличие от формулы (3) условные плотности вероятности в подобных случаях могут быть найдены лишь через вероятности, связанные с потоками событий, образованных пересечениями, т. е. через интенсивности соответствующих потоков событий.

Случайный процесс $\xi(t)$, очевидно, может пересекать заданный уровень c при различных значениях производной $|\dot\xi(t)|$, т. е. с различной скоростью $|\dot\xi(t)| \neq 0$ (или под различным углом наклона). Если предположить, что в момент пересечения значение производной зафиксировано $\dot\xi(t) \in [\dot\xi, \dot\xi + \Delta\dot\xi]$, то вероятность такого пересечения в общем случае будет определяться вероятностью совместного выполнения условий $\xi(t) \in [c - 0{,}5\Delta\xi, c + 0{,}5\Delta\xi]$ и $\dot\xi(t) \in [\dot\xi, \dot\xi + \Delta\dot\xi]$ и может быть записана как

$$P\left\{c - \frac{\Delta\xi}{2} \leqslant \xi(t) < c + \frac{\Delta\xi}{2}, \dot\xi \leqslant \dot\xi(t) \leqslant \dot\xi + \Delta\dot\xi\right\} = p_2(\xi, \dot\xi)\,\Delta\xi\,\Delta\dot\xi.$$

В свою очередь, из свойства дифференцируемости процесса $\xi(t)$ следует, что $\Delta\xi = |\xi(t + \Delta t) - \xi(t)| = |\dot\xi|\Delta t$, а поэтому вероятность $\Delta P_{\dot\xi}$ пересечения уровня c на элементарном интервале Δt с некоторой фиксированной производной $\dot\xi(t) \in [\dot\xi, \dot\xi + \Delta\dot\xi]$ будет равна

$$\Delta P_{\dot\xi} = p_2(\xi, \dot\xi)\Delta\xi\Delta\dot\xi = p_2(\xi, \dot\xi)\,|\dot\xi|\,\Delta t\Delta\dot\xi \quad (\xi = c). \tag{4}$$

Из выражения (4) после учета возможных изменений производной $\dot\xi(t) \in (-\infty, \infty)$ и усреднения находится вероятность ΔP пересечения уровня c процессом $\xi(t)$ на отрезке Δt с произвольным значением производной:

$$\Delta P = \Delta t \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\dot\xi|\, p_2(\xi, \dot\xi)\big|_{\xi=c}\, d\dot\xi. \tag{5}$$

Выражения (4) и (5) позволяют записать общую формулу для условной плотности вероятности

$$\begin{aligned} p[\dot\xi(t_0)|\xi(t_0) = c]_{\text{h.w}} &\equiv p_0(\dot\xi_0|\xi = c) = \\ &= |\dot\xi|\, p_2(\xi, \dot\xi)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\dot\xi|\, p_2(\xi, \dot\xi)\,d\dot\xi\right]^{-1}\Bigg|_{\xi=c,\ \dot\xi=\dot\xi_0}, \end{aligned} \tag{6}$$

которая характеризует поведение производной $\dot\xi(t_0) \equiv \dot\xi_0$ в моменты пересечений $t = t_0$ случайным процессом $\xi(t)$ заданного уровня c.

При рассмотрении стационарных случайных процессов $\xi(t)$ с $-R''_\xi(0) < \infty$ события, заключающиеся в пересечении процессом $\xi(t)$ уровня c, представляют собой стационарный и регулярный поток случайных событий [1] (§ 10.5). Количественно такие потоки характеризуются своей интенсивностью, которая в данном случае совпадает со средним числом пересечений (событий) в единицу времени. Формула

(6) при подобной интерпретации по существу определяется отношением интенсивностей двух потоков событий. Один из этих потоков порожден пересечениями, которые происходят с некоторым фиксированным значением производной $\dot{\xi}(t)$, а другой поток порожден пересечениями, происходящими с производной $\dot{\xi}(t) \in (-\infty, \infty)$.

4. Воспользуемся теперь общей формулой (6) и рассмотрим характер условной плотности вероятности $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c)$ для класса стационарных случайных процессов $\xi(t)$, обладающих свойством

$$p_2(\xi, \dot{\xi}) = p_1(\xi)p(\dot{\xi}), \tag{7}$$

т. е. процессов, для которых значения $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ в совпадающие моменты времени являются статистически независимыми.

При выполнении условия (7) формула (6) преобразуется к виду

$$p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c) = \frac{|\dot{\xi}|p(\dot{\xi})}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\dot{\xi}|p(\dot{\xi})d\dot{\xi}} = \frac{|\dot{\xi}|p(\dot{\xi})}{M\{|\dot{\xi}|\}}\Bigg|_{\dot{\xi}=\dot{\xi}_0} \tag{8}$$

и, что особенно важно отметить, условная плотность вероятности $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c)$ перестает при этом зависеть от выбранного уровня: $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c) = p_0(\dot{\xi}_0)$.

Из общих свойств стационарных случайных процессов $\xi(t)$ следует, что входящая в формулу (8) одномерная плотность вероятности $p(\dot{\xi})$ производной $\dot{\xi}(t)$ характеризуется параметрами

$$m_{\dot{\xi}} \equiv M\{\dot{\xi}(t)\} = (d/dt)m_{\xi} = 0, \quad \sigma_{\dot{\xi}}^2 = M\{\dot{\xi}^2(t)\} = -R_{\xi}''(0)$$

и обладает свойством четности $p(\dot{\xi}) = p(-\dot{\xi})$. Если предположить, что функция $p(\dot{\xi})$ является гауссовой функцией:

$$p(\dot{\xi}) = (2\pi\sigma_{\dot{\xi}}^2)^{-1/2}\exp(-0{,}5\dot{\xi}^2\sigma_{\dot{\xi}}^{-2}), \tag{9}$$

то после простого интегрирования формула (8) приводится к явному виду:

$$p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c) = \frac{|\dot{\xi}_0|}{2\sigma_{\dot{\xi}}^2}\exp\left(-\frac{\dot{\xi}_0^2}{2\sigma_{\dot{\xi}}^2}\right), \quad \dot{\xi}_0 \in (-\infty, \infty). \tag{10}$$

Условная плотность вероятности (10) описывает поведение производной $\dot{\xi}(t_0) \equiv \dot{\xi}_0$ в моменты пересечений процессом $\xi(t)$ некоторого заданного уровня c. Формула (10) справедлива для класса стационарных случайных процессов, обладающих свойствами (7) и (9). Помимо гауссовых процессов [3–5] (см. также [2], стр. 355) эта формула будет, в частности, справедлива для процессов $\xi(t)$ с распределением Рэлея, Райса, Максвелла, а также процессов с χ-распределением.

Рис. 2. Характер распределения производной в моменты пересечений случайным процессом заданного уровня ($\dot{\varepsilon}_0 \equiv \dot{\xi}_0$)

Плотность вероятности $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c) = p_0(\dot{\xi}_0)$ состоит из двух симметричных ветвей (рис. 2). Правая ветвь $p_0(\dot{\xi}_0)$, $\dot{\xi}_0 \in (0, \infty)$ характеризует поведение производной $\dot{\xi}(t_0)$ в моменты положительных выбросов, а левая ветвь $p_0(\dot\xi_0)$, $\dot\xi_0 \in (0, -\infty)$ — в моменты отрицательных выбросов. Поведение функции $p_0(\dot\xi_0)$ в окрестности значений $|\dot\xi(t_0)| = 0$ согласуется с известной теоремой Булинской [6], в которой доказано, что для непрерывных дифференцируемых случайных процесcов $\xi(t)$ вероятность $P\{\xi(t) = c, \ \dot\xi(t) = 0\}$ одновременного выполнения событий $\xi(t) = c$ и $\dot\xi(t) = 0$ для произвольного момента t равна нулю.

Если интересоваться, в частности, лишь положительными выбросами ($\dot\xi_0 > 0$) случайного процесса $\xi(t)$, то в моменты начала выбросов $t = t_0$ распределение производной $\dot\xi(t_0) = \dot\xi_0$ описывается законом Рэлея:

$$p_0(\dot\xi_0 \,|\, \xi = c) = \frac{\dot\xi_0}{\sigma^2_{\dot\xi}} \exp\left(-\frac{\dot\xi_0^2}{2\sigma^2_{\dot\xi}}\right), \quad \dot\xi_0 \in (0, \infty), \tag{11}$$

а ее математическое ожидание и дисперсия равны

$$M\{\dot\xi_0 | \xi = c\} = \int_0^\infty \dot\xi_0 p_0(\dot\xi_0 | \xi = c) d\dot\xi_0 = \sigma_{\dot\xi}\,(0{,}5\pi)^{1/2},$$

$$D[\dot\xi_0 | \xi = c] = \int_0^\infty (\dot\xi_0 - M\{\dot\xi_0 | \xi = c\})^2 p_0(\dot\xi_0 | \xi = c)\, d\dot\xi_0 = \sigma^2_{\dot\xi}\,(2 - 0{,}5\,\pi). \tag{12}$$

Параметр $\sigma^2_{\dot\xi}$ в соответствии с известным равенством

$$\sigma^2_{\dot\xi} = -R''_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_\xi(\omega)\, d\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega\right)^{-1}$$

может быть выражен в формулах (11), (12) как через корреляционную функцию $R_\xi(\tau)$, так и через спектральную плотность $S_\xi(\omega)$ исследуемого процесса $\xi(t)$.

5. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда значения $\xi(t)$ и $\dot\xi(t)$ не являются независимыми и свойства (7) и (9) не выполняются.

Общая формула (6) при условии

$$p_2(\xi, \dot\xi) = p_1(\xi) p(\dot\xi | \xi) \neq p_1(\xi) p(\dot\xi) \tag{13}$$

для всего класса таких процессов будет иметь вид

$$p_0(\dot\xi_0 | \xi = c) = \left. \frac{|\dot\xi| p(\dot\xi | \xi)}{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot\xi| p(\dot\xi | \xi) d\dot\xi} \right|_{\xi = c,\ \dot\xi = \dot\xi_0}. \tag{14}$$

Нарушение свойства статистической независимости (7) является, как правило, следствием различных нелинейных преобразований случайных процессов. Учитывая это, с целью конкретизации получающихся результатов рассмотрим класс функционально преобразованных процессов. Будем при этом предполагать, что некоторый процесс $\eta(t)$, обладающей совместной плотностью вероятности $p_2[\eta(t), \dot\eta(t)] \equiv p_2(\eta, \dot\eta) = p_1(\eta) p(\dot\eta)$, подвергается функциональному преобразованию $\eta(t) \to f[\eta(t)] = \xi(t)$. Если существует однозначная обратная функция $\eta(t) = \varphi[\xi(t)] \equiv \varphi[\xi]$, то, выполнив по известным правилам в выражении $p_2(\eta, \dot\eta)$ замену переменных $\eta(t) = \varphi[\xi]$, $\dot\eta(t) = \varphi'[\xi]\dot\xi$, для преобразованного процесса $\xi(t)$ получим ([2], стр. 138)

$$p_2(\xi, \dot\xi) = p_2(\varphi[\xi], \varphi'[\xi]\dot\xi) g^2[\xi],$$

где $g[\xi] \equiv \varphi'[\xi(t)]$ — якобиан преобразования.

Характерной особенностью подобных преобразований является то, что если исходные процессы $\eta(t)$ обладают свойством (7) и одномерная плотность вероятности $p(\dot{\eta})$ производной $\dot{\eta}(t) \equiv d\eta(t)/dt$ равна

$$p(\dot{\eta}) = (2\pi\sigma_{\dot{\eta}}^2)^{-1/2} \exp(-0{,}5\dot{\eta}^2\sigma_{\dot{\eta}}^{-2}),$$

то для преобразованных процессов $\xi(t) = f[\eta(t)]$ совместная плотность вероятности (13) в общем случае имеет вид [7]

$$p_2(\xi, \dot{\xi}) = p_1(\xi) p(\dot{\xi}|\xi) = p_1(\xi) \frac{g[\xi]}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{\eta}}} \exp\left(-\frac{g^2[\xi]\dot{\xi}^2}{2\sigma_{\dot{\eta}}^2}\right). \qquad (15)$$

Такое представление плотности вероятности $p(\dot{\xi}|\xi)$ позволяет в формуле (14) выполнить интегрирование и для рассматриваемого класса функционально преобразованных процессов в явном виде записать условную плотность вероятности производной:

$$p_0(\dot{\xi}_0 | \xi = c) = \frac{|\dot{\xi}_0| g^2[c]}{2\sigma_{\dot{\eta}}^2} \exp\left(-\frac{\dot{\xi}_0^2 g^2[c]}{2\sigma_{\dot{\eta}}^2}\right). \qquad (16)$$

Распределение (16) по своему характеру отличается от распределения (10). Влияние статистической связи между значениями $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ и влияние заданного уровня c на поведение производной $\dot{\xi}(t_0)$ в моменты пересечений полностью определяется здесь видом якобиана $g[\xi] \equiv \varphi'[\xi(t)]$ при $\xi(t) = c$.

Воспользуемся формулой (16) и рассмотрим практически важный пример негауссова процесса $\xi(t)$ с χ^2-распределением. Как известно, если предположить, что $\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_n(t)$ — независимые стационарные гауссовы процессы с одинаковыми математическими ожиданиями $m_\eta = M\{\eta_i(t)\} = 0$ и одинаковыми корреляционными функциями

$$R_\eta(\tau) = R_i(\tau) = M\{\eta_i(t)\eta_i(t+\tau)\} = \sigma^2\rho(\tau), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (17)$$

то стационарный случайный процесс

$$\xi(t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \xi(t) \in (0, \infty) \qquad (18)$$

будет иметь одномерную плотность вероятности

$$p_1(\xi) = [2^{n/2}\sigma^n \Gamma(n/2)]^{-1} \xi^{(n/2)-1} e^{-\xi/2\sigma^2}, \qquad (19)$$

$$\xi(t) \in (0, \infty),$$

которая называется χ^2-распределением с n степенями свободы.

Негауссов процесс (18) может в данном случае рассматриваться как результат квадратичного преобразования процесса с χ-распределением. Согласно [7] при таком подходе $g[\xi] = (2\sqrt{\xi})^{-1}$, а, следовательно, условная плотность вероятности производной $\dot{\xi}(t_0)$ в моменты пересечений процессом $\xi(t)$ уровня c на основе формулы (16) равна

$$p_0(\dot{\xi}_0 | \xi = c) = \frac{|\dot{\xi}_0|}{8c\sigma^2[-\rho''(0)]} \exp\{-\dot{\xi}_0^2/8c\sigma^2[-\rho''(0)]\}. \qquad (20)$$

Результирующая формула (20) содержит параметр $\sigma_{\dot{\eta}}^2 = -\sigma^2\rho''(0) = (-d^2/d\tau^2)R_\eta(\tau)|_{\tau=0}$, который связан с корреляционной функцией (17) исходных гауссовых компонент $\eta_i(t)$. При практическом использовании результатов более удобным может оказаться выражение функции $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c)$ лишь через параметры исследуемого негауссова процесса $\xi(t)$. С этой целью предположим, что процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию вида

$$R_\xi(\tau) \equiv M\{[\xi(t) - m_\xi][\xi(t+\tau) - m_\xi]\} = \sigma_\xi^2 r(\tau), \tag{21}$$

и учтем, что согласно определению (18) его математическое ожидание m_ξ и дисперсия σ_ξ^2 равны [8] $m_\xi = n\sigma^2$, $\sigma_\xi^2 = 2n\sigma^4$. Взаимосвязь корреляционных функций (21) и (17) процессов $\xi(t)$ и $\eta_i(t)$ определится при этом простым соотношением

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau) = 2n\sigma^4\rho^2(\tau),$$

из которого можно найти дисперсию производной

$$\sigma_{\dot{\xi}}^2 = (-d^2/d\tau^2) R_\xi(\tau)\big|_{\tau=0} = -4n\sigma^4\rho''(0)$$

и выразить $\sigma_{\dot{\eta}}^2 = -\sigma^2\rho''(0)$ через характеристики процесса $\xi(t)$:

$$-\sigma^2\rho''(0) = \frac{\sigma_{\dot{\xi}}^2}{4\pi\sigma^2} = -\frac{\sigma_\xi^2 r''(0)}{4n\sigma^2} = -\frac{1}{2}\sigma^2 r''(0).$$

Теперь окончательное выражение для условной плотности вероятности $p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c)$ производной $\dot{\xi}(t_0)$ в моменты пересечений процессом $\xi(t)$ заданного уровня c может быть записано в виде

$$p_0(\dot{\xi}_0|\xi = c) = \frac{|\dot{\xi}_0|}{4c\sigma^2[-r''(0)]}\exp\left[\frac{\dot{\xi}_0^2}{4c\sigma^2 r''(0)}\right]. \tag{22}$$

Если интересоваться пересечениями уровня c лишь при $\dot{\xi}(t) > 0$, то из выражения (22) непосредственно следует, что в моменты пересечений $t = t_0$ условное математическое ожидание $M\{\dot{\xi}_0|\xi = c\}$ и условная дисперсия $D[\dot{\xi}_0|\xi = c]$ производной $\dot{\xi}(t_0)$ равны

$$M\{\dot{\xi}_0|\xi = c\} = \sigma[-\pi c r''(0)]^{1/2},$$

$$D[\dot{\xi}_0|\xi = c] = (4-\pi)c\sigma^2[-r''(0)]$$

и, как и следовало ожидать, зависят не только от спектрально-корреляционных свойств процесса $\xi(t)$, но и от выбранного уровня c.

Рассмотренный процесс $\xi(t)$ с χ^2-распределением обладает достаточно общей структурой. Это приводит, в частности, к тому, что формула (22) останется справедливой также и для процессов $\xi(t)$ с экспоненциальным распределением и гамма-распределением.

6. Полученные в данной работе условные распределения (10), (16), (22) позволяют характеризовать поведение производной $\dot{\xi}(t_0)$ в моменты пересечений $t = t_0$ некоторыми распространенными видами негауссовых процессов $\xi(t)$ произвольно заданного уровня c. Эти же результаты достаточно просто могут быть использованы для нахождения вероятностей пересечений (или среднего числа пересечений) заданного уровня при различных ограничениях на угол наклона касательной в моменты пересечений или ограничениях на скорость нарастания выбросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г, Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы.— М.: Мир, 1969
2 Тихонов В И. Выбросы случайных процессов — М · Наука, 1970.
3. Blackl F, Lindsey W. C.— IEEE Trans, 1973, **IT-18**, № 3, p. 295.
4. Кас М., Slepian D.— Ann. Math Statist, 1959, **30**, № 4, p 1215
5. Стратонович Р Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике — М.: Сов. радио, 1961.
6. Булинская Е. В — Теория вероятностей и ее применение, 1961, **6**, вып. 4, с. 474.
7. Хименко В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 8, с. 1170.
8. Крамср Г. Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступила в редакцию 2 июля 1981 г.

ON BENAVIOUR OF A DERIVATIVE AT MOMENTS OF CROSSING OF THE GIVEN LEVEL BY A RANDOM PROCESS

V. I. Khimenko

A problem is considered on distribution of a derivative at moments of crossing of a certain given level by differentiated random process. Simple analytical expressions have been obtained for conventional densities of the probability. Results are concretized for some of the most common nongaussian processes. All distributions are presented as ratios of probabilities connected with the corresponding fluxes of events formed by crossings, i e. under the condition of the «horisont window» type.

Аннотации депонированных статей

УДК 537.226

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ КИРПИЧА, ЦЕМЕНТА И ДРЕВЕСИНЫ В ДИАПАЗОНЕ МЕТРОВЫХ—САНТИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН

Ю. И. Лещанский, Н. В. Ульянычев, Г. Н. Лебедева, Н. Я. Попова, Е. Д. Метелкина

Представлены экспериментальные и расчетные зависимости относительной комплексной диэлектрической проницаемости влажного кирпича, цемента и древесины от влажности и частоты. Измерения проводились по методу «короткого замыкания» при температуре окружающего воздуха 16—20 С

Затвердевший раствор силикатного цемента марки 300 без наполнителей и древесина сосны средней смолистости исследовались на волнах 226; 30 и 3,17 *см*; образцы, вырезанные из однородных участков глиняных обожженых (красных) кирпичных блоков, исследовались на волнах 226; 90; 30; 10; 3,17; 1,9 и 0,8 *см* Кирпич и цемент исследовались от воздушно-сухого состояния до предельной влагоемкости, древесина— от воздушно-сухого состояния до влажности 45—75%.

Погрешность приведенных кривых для кирпича и цемента по ε' порядка $\pm 10\%$ и по ε'' порядка $\pm 15\%$, погрешность кривых для древесины по ε' порядка $\pm 15\%$ и по ε'' порядка $\pm 20\%$. Полученные кривые позволяют сделать вывод о различии форм связи влаги в указанных диэлектриках и о существенном влиянии на их свойства формы и размеров пор.

Статья депонирована в ВИНИТИ, рег № 4772—82 Деп. от 7 сентября 1982 г.