

УДК 621.371.32

## ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПЕКТРОВ ФЛУКТУАЦИЙ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

*М. Е. Грачева, А. С. Гурвич*

Предлагаются простые формулы для приближенного расчета спектра и дисперсий флуктуаций интенсивности в плоской монохроматической волне, распространяющейся в турбулентной среде с колмогоровским спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости. Численный расчет по предлагаемым формулам удовлетворительно согласуется с точным расчетом [4] и экспериментальными данными [11, 12].

В настоящее время значительного развития достигла теория распространения электромагнитных и звуковых волн в турбулентной среде. Когда вызванные турбулентностью флуктуации интенсивности монохроматической волны невелики, достаточным является первое приближение метода плавных возмущений (МПВ) [1]. Для сильных флуктуаций развита асимптотическая теория [2]. Общее описание может быть получено в марковском приближении [3]. Однако формулы, удобные для практических расчетов, удалось получить только в приближении МПВ. В общем же случае конечный результат, например частотный спектр флуктуаций интенсивности (квадрата амплитуды) волны, достигается лишь путем решения достаточно сложной вычислительной задачи с помощью мощной ЭВМ [4]. Эксперимент показывает, что сильные флуктуации возникают в самых разнообразных условиях, например, при распространении света в приземном слое атмосферы [5] или радиоволн через межпланетную или межзвездную среду [6].

В работе получены простые формулы для приближенного расчета спектра флуктуаций интенсивности в плоской монохроматической волне, распространяющейся в турбулентной среде с колмогоровским спектром  $\Phi_\varepsilon(x)$  диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ :

$$\Phi_\varepsilon(x) = AC_\varepsilon^2 x^{-11/3}, \quad (1)$$

где  $C_\varepsilon^2$  — структурная характеристика,  $A = 0,033$  [1]. Колмогоровский спектр хорошо описывает турбулентность в атмосфере и океане. Эксперименты [7] свидетельствуют о том, что спектр (1) описывает и структуру флуктуаций электронной концентрации в межпланетной плазме.

Построение формул для приближенной оценки удобнее начинать с двумерного спектра  $F(x)$ , связанного с корреляционной функцией  $B(\rho)$  преобразованием

$$F(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty B(\rho) J_0(x\rho) \rho d\rho, \quad (2)$$

где  $J_0(x\rho)$  — функция Бесселя. Первое приближение МПВ дает следующее выражение для двумерного спектра относительных флуктуаций интенсивности плоской монохроматической волны, которое для удобства дальнейших выкладок удобно записать в таком виде:

$$F_0(x) = 0,334 \beta_0^2 x^{-2} (k/x^2 x)^{5/6} [1 - \text{sinc}(x^2 x/k)], \quad (3)$$

где  $\text{sinc } y = y^{-1} \sin y$ . Параметр  $\beta_0^2 = 0,31 C_i^2 k^{7/6} x^{11/6}$  является универсальной безразмерной характеристикой длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ , длины трассы  $x$  в турбулентной среде и турбулентности. Результаты, полученные в первом приближении МПВ, справедливы при  $\beta_0^2 \ll 1$ .

Масштабной частотой в спектре (3) является  $\kappa_F = (k/x)^{1/2}$ . Спектр (3) приводит к корреляционной функции, удовлетворяющей закону сохранения энергии

$$\int_0^\infty B(\rho) \rho d\rho = 0. \quad (4)$$

Учет второго и следующего приближений МПВ приводит к формуле для относительных флуктуаций интенсивности [3]

$$\beta^2 = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1 = \beta_0^2 (1 + a_1 \beta_0^2 + a_2 \beta_0^4 + \dots). \quad (5)$$

Вычисление коэффициентов  $a_1, a_2, \dots$  связано с большими трудностями и не представляет особого интереса, так как при  $\beta_0^2 \gg 1$  все члены бесконечного ряда (5) становятся существенными.

Для сильных флуктуаций интенсивности  $\beta_0^2 \gg 1$  получены следующие асимптотические выражения для корреляционной функции флуктуаций интенсивности [8-10]:

$$B(\rho) \simeq \exp[-2(\rho/\rho_K)^{5/3}], \quad \rho \leq \rho_K; \quad (6)$$

$$B(\rho) \simeq -0,122 (k\rho^2/x)^{-7/6} \beta_0^2, \quad \rho \gg \rho_K, \quad (7)$$

где

$$\rho_K = (0,365 C_i^2 k^2 x)^{-3/5} = \alpha_1 (x/k)^{1/2} (\beta_0^2)^{-3/5}, \quad \alpha_1 = 0,91, \quad (8)$$

$\rho_K$  — радиус когерентности, и для значений  $\beta^2$

$$\beta^2 = 1 + 0,861 \beta_0^{-4/5} + \dots \quad (9)$$

Кроме того, для  $\beta_0^2 \gg 1$  корреляционная функция имеет два характерных масштаба — один  $\rho_K$ , а другой  $\rho_0 = x/\rho_K k$ , так что

$$\rho_0 \rho_K = \kappa_F^{-2}. \quad (10)$$

Если воспользоваться асимптотическими выражениями (6), (7) и оценить поведение спектра (2), то можно убедиться, что как для низких частот  $\kappa \rho_0 \ll 1$ , так и для высоких частот  $\kappa \rho_K \gg 1$  при  $\beta_0^2 \gg 1$  зависимость  $F(\kappa)$  от частоты степенная с показателями  $1/3$  и  $-11/3$  соответственно. Легко убедиться, что поведение спектра (3) на высоких и низких частотах  $\kappa \ll \kappa_F$  и  $\kappa \gg \kappa_F$  аналогично. Поэтому естественно попытаться использовать выражение (3) в качестве основы для построения приближенной формулы расчета спектров флуктуаций интенсивности при любых значениях параметра  $\beta_0^2$ . При этом должны быть удовлетворены условия (4)–(10), а при  $\beta_0^2 \ll 1$  должен получиться результат, совпадающий с (3).

Мы предлагаем записать выражение для спектра  $F(\kappa)$  в виде линейной комбинации функций  $F_0$ :

$$F(\kappa) = A(\gamma_A) F_0(\kappa/\gamma_A) + B(\gamma_B) F_0(\kappa/\gamma_B), \quad (11)$$

где пока неизвестные функции  $A(\gamma_A)$  и  $B(\gamma_B)$  зависят от параметров  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$ , в свою очередь зависящих от  $\beta_0^2$ . Закон сохранения энергии (4)

для (11) выполняется автоматически. Для того, чтобы при  $\beta_0^2 \ll 1$  (11) переходило в (3), необходимо, чтобы

$$\gamma_A \rightarrow 1, \gamma_B \rightarrow 1, A(\gamma_A) + B(\gamma_B) \rightarrow 1 \text{ при } \beta_0^2 \ll 1. \quad (12)$$

Положим для определенности, что  $\gamma_A \geq 1$  и  $\gamma_B \geq 1$ . Введение множителей  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$  под знаком функции  $F_0$  приводит к появлению двух характерных частот: верхней  $\kappa_F \gamma_A$  и нижней  $\kappa_F \gamma_B^{-1}$ , которые, как следствие (10), должны удовлетворять условию

$$\gamma_B / \gamma_A \rightarrow \mu \text{ при } \beta_0^2 \gg 1, \quad (13)$$

где  $\kappa$  — некоторая, пока неопределенная константа. Как видно из определения радиуса когерентности (8), характерная частота должна возрастать как

$$\kappa_F \gamma_A \rightarrow \nu (2\beta_0^2)^{3/5}, \quad \beta_0^2 \ll 1, \quad (14)$$

где  $\nu$  — тоже пока неопределенная константа, а множитель 2 введен для удобства дальнейших выкладок.

Определим теперь асимптотическое поведение  $A(\gamma_A)$  и  $B(\gamma_B)$  при  $\beta_0^2 \gg 1$ . Сравнение высокочастотных  $\kappa \gamma_A \gg (k/x)^{1/2}$  асимптотик спектра (11) и спектра корреляционной функции (6)

$$F(x) \rightarrow \frac{5 \cdot 2^{2/3}}{9\pi} \frac{\Gamma(11/6)}{\Gamma(7/6)} \rho_k^{-5/3} x^{-11/3}, \quad \kappa \rho_k^{-11/3} \gg 1$$

при  $\beta_0^2 \gg 1$  и, соответственно,  $\gamma_A \gg 1$ ,  $\gamma_B \gg 1$  приводит к тому, что асимптотическое поведение функции  $A(\gamma_A)$  при  $\gamma_A \gg 1$  определяется следующей формулой:

$$A(\gamma_A) \rightarrow 2\gamma_A^{-11/3}, \quad \beta_0^2 \gg 1. \quad (15)$$

Аналогично сравнивая низкочастотные  $\kappa_F \gamma_B \ll 1$  асимптотики спектра (11) и спектра, соответствующего асимптотике (7) корреляционной функции при  $\beta_0^2 \gg 1$ , получаем с учетом (13)

$$B(\gamma_B) \rightarrow (\gamma_A \mu)^{-1/3}. \quad (16)$$

Для спектра (11) дисперсия  $\beta^2$  равна

$$\beta^2 = [\gamma_A^2 A(\gamma_A) + \gamma_B^{-2} B(\gamma_B)] \beta_0^2. \quad (17)$$

Подставляя в (17) асимптотические выражения (14)–(16) и учитывая (13), получаем

$$\beta^2 = \nu^{-5/3} (1 + 2^{-7/5} \nu^{-2/3} \mu^{-7/3} \beta_0^{-4/5}), \quad \beta_0^2 \gg 1,$$

и если положить  $\nu = 1$ ,  $\mu = 2^{-3/5} (0,861)^{-3/7} = 0,703$ , то вычисленная по спектру (11) дисперсия будет приводить к асимптотической формуле (9).

Установленные асимптотические зависимости  $\gamma_A(\beta_0^2)$ ,  $\gamma_B(\beta_0^2)$ ,  $A(\gamma_A)$  и  $B(\gamma_B)$  при  $\beta_0^2 \gg 1$  не позволяют, конечно, полностью определить вид этих функций при любых  $\beta_0^2$ . Однако, учитывая главную цель: получить простые формулы для расчета  $F(x)$ , запишем для них следующие алгебраические выражения:

$$\gamma_A = (1 + 2\beta_0^2)^{3/5}, \quad \gamma_B = (1 + 2\mu^{5/3} \beta_0^2)^{3/5},$$

$$A(\gamma_A) = \alpha [1 + (2/\alpha)^{-5/11} (\gamma_A^{5/3} - 1)]^{-11/5},$$

$$B(\gamma_B) = (1 - \alpha) [1 + \eta (\gamma_B - 1)^{1/2} + (1 - \alpha)^5 (\gamma_B^{5/3} - 1)]^{-1/5}. \quad (18)$$

Показатели степени в (18) выбраны так, чтобы выполнялись асимптотические формулы при  $\beta_0^2 \gg 1$ , а при малых  $\beta_0^2 \ll 1$  получался результат, согласующийся с (5), и одновременно удовлетворялось бы условие (12). Параметр  $\alpha$ , значения которого  $0 < \alpha < 1$ , определяет относительный вклад первого и второго слагаемых в спектре (11).

Выбор функций (18) содержит известный элемент произвола. Возможным критерием их пригодности может быть согласие спектра (11) с точным расчетом [4] и экспериментом [11, 12]. Это сравнение позволит также уточнить коэффициенты  $\alpha$ ,  $\eta$ .

Одномерный частотный спектр относительных флуктуаций интенсивности  $W(f)$ , который исследовался в [4, 11, 12], связан с двумерным пространственным спектром  $F(x)$  следующим соотношением [1]:

$$W(f) = \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F\left(\sqrt{x^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}\right) dx, \quad (19)$$

где  $v_{\perp}$  — нормальная к лучу компонента скорости ветра. При сравнении теории с экспериментальными данными удобно рассматривать произведение спектральной плотности  $W(f)$  на частоту. Подставляя в (19) выражение для  $F(x)$  в виде (11) и используя (3), получаем

$$W(f, \beta_0) = \gamma_A A(\gamma_A) W_0(f/\gamma_A) + \gamma_B^{-1} B(\gamma_B) W_0(f\gamma_B), \quad (20)$$

где

$$W_0(f) = 0,334 f_0^{-1} \int_0^{\infty} [1 - \text{sinc}(y^2 + \Omega^2)] (y^2 + \Omega^2)^{-11/6} dy,$$

$$\Omega = f/f_0, \quad f_0 = (v_{\perp}/2\pi) \sqrt{k/x},$$

$W_0(f)$  — одномерный частотный спектр флуктуаций интенсивности в приближении МПВ.

Для удобства сравнения полученных нами результатов с расчетом [4] используем безразмерные переменные, введенные в [4]. В качестве продольного безразмерного расстояния берется отношение  $\xi = x/L$ , где  $x$  — длина пути луча в турбулентной среде,  $L$  — расстояние, на котором вычисленная в приближении МПВ величина относительных флуктуаций интенсивности равна единице:

$$0,31 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} = 1.$$

Так как  $\beta_0^2(x) = 0,31 C_e^2 k^{7/6} x^{11/6}$ , то безразмерное расстояние  $\xi = x/L$  связано с  $\beta_0^2(x)$  соотношением

$$\xi = x/L = [\beta_0^2(x)]^{6/11}. \quad (21)$$

Нами были рассчитаны частотные спектры  $W(f, \beta_0)$  для нескольких значений параметра  $\xi$  и дисперсия флуктуаций интенсивности  $\beta^2$  как функция  $\xi$ .

Как уже указывалось выше, параметр  $\alpha$  в формулах для  $A(\gamma_A)$  и  $B(\gamma_B)$  определяет относительный вклад первого и второго слагаемых в спектр  $W(f, \beta_0)$ . В результате сравнения расчетных спектров и дисперсий по формулам (17), (18), (20) с расчетом на ЭВМ из [4] мы остановились на значении  $\alpha = 0,5$ .

При вычислении  $\beta(\beta_0)$  и частотных спектров флуктуаций интенсивности  $W(f, \beta_0)$  было проверено несколько выражений для  $\gamma_A$ ,  $\gamma_B$ ,  $A(\gamma_A)$  и  $B(\gamma_B)$ , но наилучшее согласие с расчетом [4] дали формулы (18) для

случая, когда  $\alpha=0,5$ ,  $\mu=0,703$  и  $\nu=-0,58$ . На рис. 1 представлена зависимость  $\beta(\beta_0)$ , полученная в результате расчетов по формуле (17) (штрихпунктирная линия), расчетная кривая из [4] (сплошная линия) и асимптотическая зависимость (9) (пунктирная кривая). Как видно из приведенных результатов, функция  $\beta(\beta_0)$ , вычисленная по предложенной приближенной формуле (17), удовлетворительно согласуется с расчетом из [4] и асимптотической зависимостью из [8-10].

На рис. 2 (кривые 1, 2, 3) приводятся частотные спектры флуктуаций интенсивности, рассчитанные нами с использованием модели (11) для пространственного двумерного спектра флуктуаций. По оси ординат отложена величина  $fW(f, \beta_0)/\beta^2 = U(\Omega)$ , по оси абсцисс —  $\ln \Omega$ . В этих координатах площадь под кривой частотного спектра равна единице. На этом же графике (кривые 4, 5, 6) приведены полученные в результате численных расчетов величины, полученные в [4] при тех же значениях  $\xi$  ( $\xi = 1, 8, 20$ ). Как видно из рисунка, совпадение расчетов по нашей модели и расчетов из [4] вполне удовлетворительное, за исключением области крупных масштабов (малых частот).

На рис. 3 (кривые 1, 2, 3) приводятся для сравнения рассчитанные нами частотные спектры для  $\xi = 1, 8, 20$  ( $\beta_0 = 1; 6,73; 15,6$ ) и экспериментальные спектры (кривые 4, 5, 6) из [11, 12], полученные на трассах длиной от 1,75 км до 13,5 км для значений  $\beta_0 = 1, 6, 18$ . По сравнению с расчетными экспериментальные кривые несколько размазаны и соответственно этому в силу нормировки имеют меньшие значения

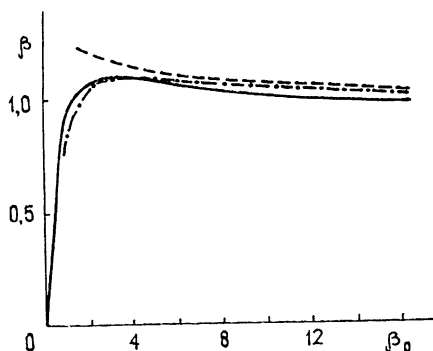


Рис. 1.

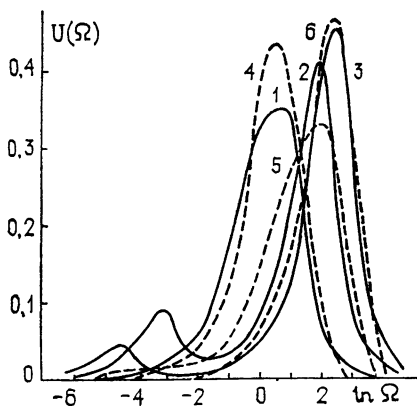


Рис. 2.

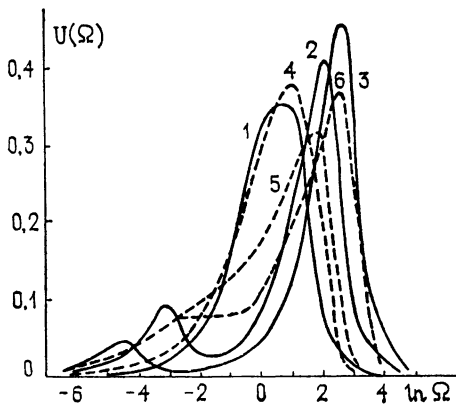


Рис. 3.

в максимуме. Как отмечается в [4], аналогично обстоит дело как при сравнении расчетов из [4] с экспериментом при больших  $\beta_0$ , так и в области слабых флуктуаций. Это обстоятельство, по-видимому, можно объяснить флуктуациями скорости дрейфа дифракционной картины. В остальном же соответствие расчетных и экспериментальных значений

удовлетворительное, положения максимумов на шкале частот очень близки, общее взаимное расположение кривых имеет один и тот же характер. При  $\xi \leq 1$  расчет по приближенным формулам практически совпадает с [4]. При  $\xi > 1$  имеется расхождение в области малых частот, вклад которых в дисперсию флуктуаций составляет не более 10% для  $\xi = 20$  (кривая 3) и 20% для  $\xi = 8$  (кривая 2). Экспериментальные значения [11, 12] в этой области частот менее надежны.

В заключение приведем основные результаты, изложенные в настоящей статье.

а) Предложены простые формулы для приближенного расчета дисперсий и спектра флуктуаций интенсивности в плоской монохроматической волне, распространяющейся в турбулентной среде с колмогоровским спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости.

б) Расчет относительной дисперсии и частотных спектров по предлагаемым формулам согласуется с расчетом из [4] и экспериментальными данными из [11, 12].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
2. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И.— УФН, 1974, 114, вып. 3, с. 415.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
4. Гурвич А. С., Елепов Б. С., Покасов Вл. В., Сабельфельд К. К., Татарский В. И.— Изв. вузов— Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 198.
5. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1976.
6. Лотова Н. А.— УФН, 1975, 115, вып. 4, с. 603.
7. Колосов М. Я., Яковлев О. И., Яковлева Г. Д., Ефимов А. И.— Космические исследования, 1970, 8, № 6, с. 882.
8. Гочелашвили К. С., Шишов В. И.— ЖЭТФ, 1974, 66, вып. 4, с. 1237.
9. Якушкин Г. И.— Изв. вузов— Радиофизика, 1975, 18, № 11, с. 1660.
10. Заворотный В. У., Кляцкин В. Н., Татарский В. И.— ЖЭТФ, 1977, 73, вып. 2, с. 481.
11. Гурвич А. С., Казарян Р. А., Ломадзе С. О., Погосян К. П., Покасов В. В.— Изв. вузов— Радиофизика, 1975, 18, № 4, с. 610.
12. Грачева М. Е., Гурвич А. С., Кашкаров С. С., Покасов В. В. В кн.: Распространение лазерного пучка в атмосфере./Под ред. Дж. Штробена.— М.: Мир, 1981.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
10 июля 1981 г.

## APPROXIMATE FORMULAS FOR FLUCTUATION SPECTRA OF WAVES PROPAGATING IN A TURBULENT MEDIUM

*M. E. Gracheva, A. S. Gurvich*

Simple formulas are suggested for an approximate calculation of the spectrum and dispersion of the intensity fluctuations in a plane monochromatic wave propagating in a turbulent medium with Kolmogor spectrum of fluctuations of dielectric permittivity.

A numerical calculation using formulas suggested is satisfactorily agreed with the accurate calculation [4] and experimental data [11, 12].