

УДК 533.9 : 530

СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

С. Я. Вышкинд, Е. А. Дубинина, С. Л. Саковская, С. М. Файнштейн

Рассматривается взрывная неустойчивость продольных волн в системе поток—плазма. Выяснено, что при определенных условиях в указанной системе возможна стохастическая стабилизация «взрыва», при этом в фазовом пространстве образуются сложные притягивающие области со случайными характеристиками. Приведены оценки для лабораторной плазмы.

Известно (см., например, [1–4]), что в неравновесной плазме возможна взрывная неустойчивость, которая характеризуется резким ростом амплитуд взаимодействующих волн. В ряде работ [5–7] проанализированы возможные механизмы стабилизации этой неустойчивости за счет нелинейного сдвига частоты или нелинейного затухания колебаний. Заметим, что во всех цитируемых работах отмечается динамический режим насыщения неустойчивости, т. е. амплитуды и фазы колебаний строго детерминированы и зависят от нелинейной расстройки от синхронизма или нелинейного затухания. Однако в последнее время в литературе интенсивно обсуждаются стохастические режимы параметрических неустойчивостей, характерной особенностью которых является запутывание фазовых траекторий системы и возникновение мало-модовой турбулентности (см., например, [8–10]).

В данной работе обсуждается принципиально новый механизм стабилизации «взрыва», связанный с возникновением сложных движений, которым в фазовом пространстве системы соответствуют притягивающие множества, близкие к странному аттрактору. Хотя наличие странного аттрактора строго не доказывается, однако показано, что характеристики этих движений, в частности, период — время движения по виткам фазовых траекторий, являются случайной функцией, распределенной по нормальному закону. Полученные результаты иллюстрируются на примере неравновесной системы поток—плазма. Приведены условия возникновения стохастических движений в плазме и даны оценки амплитуд возбуждаемых колебаний. Эти выводы представляют общезначимый интерес, а также являются полезными для плазменных приложений, так как показывают условия генерации шумовых колебаний в пучковых плазменных системах.

1. Рассмотрим неизотермическую плазму, пронизываемую потоком заряженных частиц. На границе плазмы ($x = 0$) заданы возмущения продольного электрического поля, т. е. в дальнейшем находится стационарное распределение амплитуд поля в полубезграничной плазме. Исходная одномерная система уравнений имеет вид*

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(p_e - p_i + p_s),$$

* Считаем, что $T_e \gg T_i$ ($T_{e,i}$ — температуры электронов и ионов). В дальнейшем для простоты $T_i \sim 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{e,i}}{\partial t} + v_{e,i} \frac{\partial v_{e,i}}{\partial x} &= \frac{e}{m_{e,i}} E - \frac{\kappa T_{e,i}}{m_{e,i}} \frac{\partial \rho_{e,i} / \partial x}{(N_{e,i} + \rho_{e,i})} - \nu_{\text{эфф}} v_{e,i}, \\ \frac{\partial \rho_{e,i}}{\partial t} + N_{e,i} \frac{\partial v_{e,i}}{\partial x} + v_{e,i} &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{e,i} + v_{e,i}), \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E &= - v_s \frac{\partial v_s}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + N_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s v_s),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\rho_{e,i}$, $v_{e,i,s}$ — отклонения концентрации электронов и ионов плазмы и частиц пучка и соответствующих скоростей от равновесных значений. (Последние обозначены соответственно $N_e = N_i$, N_s , $v_{e0} = 0$, $v_{i0} = 0$, $v_{s0} = V_0$.) Далее, $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений.

Система (1) в линейном приближении описывается дисперсионным уравнением*

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu) - v_{Te}^2 k^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega(\omega - i\nu)^2} - \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}, \quad \omega_{0i}^2 = \frac{4\pi N_i e^2}{m_i}, \quad \omega_{0s}^2 = \frac{4\pi N_s e^2}{m_e}, \quad v_{Te}^2 = \frac{\kappa T_e}{m_e}. \quad (3)$$

При условиях

$$\frac{\nu}{\omega} \ll 1, \quad \frac{\omega}{k} \ll v_{Te}, \quad V_0 \gg v_{Te}, \quad V_0 \gg c_s, \quad c_s^2 = \frac{\kappa T_e}{m_i}, \quad \frac{N_s}{N} \ll 1$$

уравнение (2) описывает ВЧ пучковые волны и ионно-звуковые волны в неизотермической плазме:

$$\omega_1 \sim k_1 c_s (1 + k_1 c_s^2 / \omega_{0i}^2)^{-1/2} + i\nu, \quad \nu \ll \omega_1; \quad (4)$$

$$\omega_{2,3} - k_{2,3} V_0 \sim \pm \omega_{0s} \pm i\gamma_{2,3}, \quad \gamma \ll \omega_{0s}, \quad (5)$$

γ , ν — малые инкременты и декременты соответствующих мод; их значения вычислялись с помощью ЭВМ.

Для волн (4), (5) могут быть выполнены условия синхронизма

$$\omega_3 = \omega_2 + \omega_1, \quad k_3 = k_2 + k_1 + \delta \quad (6)$$

(δ — расстройка от синхронизма). Легко найти, что

$$\omega_1 \sim 2\omega_{0s} c_s V_0^{-1} \quad (7)$$

(напомним, что $V_0 \gg c_s$, поэтому обычную ионно-звуковую неустойчивость можно не учитывать), а

$$k_2 \sim k_3 \sim \omega_{2,3} / V_0. \quad (8)$$

Используя стандартную методику [11, 12], получим стационарные уравнения для безразмерных комплексных амплитуд волн**:

* Предполагаем, что волны распространяются вдоль потока частиц.

** Отметим, что слабый инкремент γ появляется из-за взаимодействия волн отрицательной энергии с диссипативной средой.

$$\partial a_{1,2}/\partial x_\delta = a_{2,1}^* a_3 e^{-i\delta x} - v_{1,2} a_{1,2} + i [\tilde{m}(|a_2|^2 + |a_1|^2) + l|a_3|^2] a_{1,2}, \quad (9)$$

$$\partial a_3/\partial x_\delta = a_1 a_2 e^{-i\delta x} + \gamma_3 a_3 - i [m(\tilde{a}_2^2 + |a_1|^2) + l|a_3|^2] a_3,$$

где

$$|a_i| = [|E_i|^2 (2\pi m N_{0s} V_0^2)^{-1}]^{1/2} (\sigma_r \sigma_n)^{1/2}, \quad i \neq r \neq n,$$

$$\sigma_{2,3} \sim e (4m_e V_0^2)^{-1} N_s N_e^{-1} (\omega_{2,3} \omega_1)^2 (\omega_0 \omega_{0l})^{-2},$$

$$\sigma_1 \sim \frac{1}{8} \frac{e}{m_i c_s} N_s N_e^{-1} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{2,3}} \right)^4 \left(\frac{\omega_{0s} \omega_{0l}}{\omega_{2,3} \omega_1} \right)^2, \quad v_{1,2} \sim \frac{v}{\omega_{0l}},$$

$$l \sim \frac{5}{4} \frac{k_1^2 c_s^2 \omega_1^3}{\omega_{0l}^5}, \quad \tilde{m} \sim l \frac{N_e}{N_s}, \quad x_\delta = \frac{\omega_{0l}}{c_s} x.$$

Перейдем к новым переменным:

$$X = |a_3| \cos(\arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1 + \delta x),$$

$$Y = |a_3| \sin(\arg a_3 - \arg a_2 - \arg a_1 + \delta x), \quad (10)$$

$$Z = |a_1| |a_2|, \quad V = |a_1| / |a_2|.$$

Тогда система (9) перепишется в виде

$$\dot{X} = Z + \gamma X - \delta Y + Y^2 (V + V^{-1}) + 3\tilde{m}ZY (V + V^{-1}) + 3lY (X^2 + Y^2),$$

$$\dot{Y} = \gamma Y + \delta X - XY (V + V^{-1}) - 3\tilde{m}ZX (V + V^{-1}) - 3lX (X^2 + Y^2), \quad (11)$$

$$\dot{Z} = ZX (V + V^{-1}) - Z(v_1 + v_2),$$

$$\dot{V} = X(1 - V^2) + V(v_2 - v_1).$$

Точка сверху обозначает дифференцирование d/dx_δ .

Система (11) помимо нулевого имеет еще 2 состояния равновесия:

$$X_{1,2}^0 = V \sqrt{v_1 v_2}, \quad Y_{1,2}^0 = -\frac{v_1 + v_2}{6l \sqrt{v_1 v_2}} \pm \left[\frac{(v_1 + v_2)^2}{36l v_1 v_2} - v_1 v_2 + \frac{\delta}{3l} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

$$Z_{1,2}^0 = 0, \quad V_{1,2}^0 = V_{v_2/v_1}.$$

Легко определить, что при $\gamma \neq 0$ нулевое состояние равновесия всегда неустойчиво. Ненулевые состояния равновесия (12) также неустойчивы.

На рис. 1. приведены «траектории» корней характеристического уравнения, вычисленные с помощью ЭВМ, в зависимости от параметра нелинейной расстройки l при различных γ . Видно, что при некотором значении l два действительных корня, сливаясь, образуют пару комплексно-сопряженных корней. Коэффициент γ качественно не влияет на поведение корней характеристического уравнения, а лишь сдвигает точку бифуркации. Очевидно, что комплексность корней свидетельствует об осцилляторном характере процесса, т. е. предполагает «возвращаемость» траекторий в фазовом пространстве системы, а это обстоятельство с учетом неустойчивости дает основание предполагать возникновение сложных движений. Дальнейшее исследование проводилось вблизи точек бифуркации, причем, поскольку аналитическое исследование (11) не представляется возможным, было проведено моделирование (11) на аналого-вычислительном комплексе АВК-2.

2. Численное интегрирование системы показало, что при небольшой линейной расстройке δ ограничение неустойчивости наступает лишь при больших значениях нелинейной расстройки, при этом устанавливается либо равновесный стационарный режим (в фазовом пространстве устойчивое состояние равновесия), либо динамический режим стабилизации (в фазовом пространстве — предельный цикл). При больших линейных расстройках ограничение «взрыва» происходит даже при небольших значениях нелинейной расстройки. Таким образом, уменьшение линейной расстройки аналогично увеличению нелинейной и наоборот. С ростом l в фазовом пространстве возникает предельный цикл, который вначале увеличивается в размерах, затем из однократного цикла рождается двукратный, при дальнейшем увеличении l рождается четырехкратный, который, в свою очередь, теряет устойчивость, и в фазовом пространстве возникает область со сложным поведением. Отметим, что полученные в численном эксперименте значения параметра бифуркации l удовлетворяют закону универсальности [13]:

$$l_{кр} - l_n = \delta_0^{-n} \text{const}, \quad (13)$$

где l_n — значение параметра, при котором рождается цикл периода 2^n , $\delta_0 = 4,6692$ — универсальная постоянная Фейгенбаума, $l_{кр}$ — значение параметра, вслед за которым в системе возникает хаос.

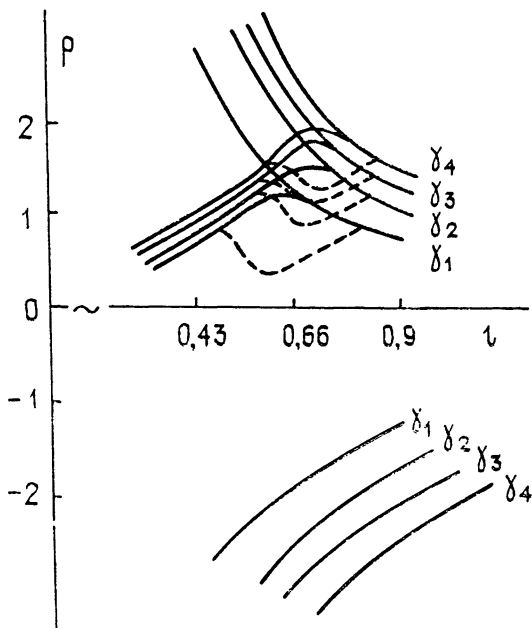


Рис 1. Зависимость «траекторий» корней характеристического уравнения P от коэффициента l при $\gamma_1 = 10^{-5}$, $\gamma_3 = 3 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_4 = 4 \cdot 10^{-5}$, $\nu_1 \sim \nu_2 \sim 10^{-3}$, $\delta = 0$, $n = 0$.

На рис. 2 представлено несколько последовательных бифуркаций, приводящих в дальнейшем, при непрерывном изменении параметра нелинейной расстройки, к возникновению стохастического аттрактора. Так, в случае $\gamma = 0,4 \cdot 10^{-4}$, $\delta = 1$, $\nu_1 = 0,0012$, $\nu_2 = 0,0015$ однократный цикл ($n = 1$) рождается при $l_1 = 0,13$, двукратный ($n = 2$) — при $l_2 = 0,65$, четырехкратный ($n = 4$) — при $l_4 = 0,78$. Воспользовавшись соотношением (13), легко подсчитать значение параметра $l_{кр}$, при котором должен возникнуть хаос: $l_{кр} \sim 0,79$ (здесь $\text{const} \approx 3,06$). В чис-

ленном эксперименте аттрактор наблюдался при $l = 0,8$. Аналогичные бифуркации были получены и для других комбинаций параметров, в частности, при уменьшении линейной расстройки ($\delta = 0,9$) и тех же, что и выше, значениях декрементов и инкремента однократный цикл возникает при $l_1 = 0,3$, двукратный — при $l_2 = 0,67$, четырехкратный — при $l_4 = 0,75$. Теперь уже $\text{const} = 2,01$, а $l_{\text{кр}} = 0,75$. В эксперименте в этом случае аттрактор был получен при $l = 0,76$. Таким образом, режим стохастической стабилизации взрывной неустойчивости возникает при значении параметра нелинейной расстройки $l_{\text{кр}} \simeq 0,75 \div 0,79$ и существует до значений $l_{\text{кр}} \simeq 1,05$. При дальнейшем увеличении нелинейной расстройки стабилизация в системе оказывается невозможной — волны выходят из синхронизма и медленная пучковая волна в рамках данной модели неограниченно возрастает. Влияние параметра m на динамику процесса аналогично l .

Таким образом, наряду с известными режимами стабилизации взрыва при определенных условиях наблюдается и стохастическое ограничение неустойчивости. Анализ подобных режимов показал расширение спектра взаимодействующих волн.

Отметим, однако, что, хотя в работе не доказывается свойство гиперболичности, нет полного расцепления корреляций (корреляционная функция не спадает до нуля), с уверенностью можно говорить о наличии устойчивого притягивающего множества, время существования которого (по результатам счета на ЭВМ) по крайней мере не менее $10^3 \omega_{0i}^{-1}$ и поведение фазовых траекторий на котором — случайно. Области сложных режимов стабилизации не являются экзотическим исключением в пространстве параметров. Непрерывное изменение (которое производилось как в сторону увеличения, так и уменьшения их значения) позволило обнаружить последовательность прохождения бифуркаций удвоения, соответствующих качественно различным режимам, проследить за их сменой. При этом был обнаружен гистерезисный эффект «затягивания» режимов — возникновение того или иного режима стабилизации и потеря им устойчивости происходили при разных (для прямого и обратного хода) значениях параметра, т. е. ограничение «взрыва» происходит жестко.

Области притяжения различных режимов стабилизации для ряда комбинаций значений параметров системы определялись на плоскости начальных условий (НУ), т. е. переходные процессы рассматривались для НУ, взятых внутри области, ограниченной аттрактором, и снаружи. При малых начальных возмущениях стабилизация носит динамический характер (в фазовом пространстве — предельные циклы); если же начальные интенсивности волн превышают некоторый порог, развивается стохастический режим стабилизации. В частности, при $\delta = 1$, $\gamma = 0,4 \cdot 10^{-4}$, $\nu_1 = 0,0012$, $\nu_2 = 0,0015$ стохастический режим возникает при $X_{\text{нач}} = -0,05$, $Y_{\text{нач}} = 0,335$, $Z_{\text{нач}} = 0,01$, $V_{\text{нач}} = 0,99$.

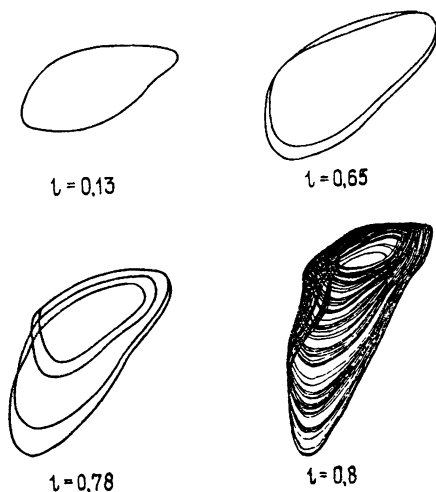


Рис. 2. Проекция 4-мерного фазового пространства на трехмерное пространство (XYZ).

3. В заключение оценим характерные параметры возбуждаемых волн в системе электронный поток — плазма со следующими параметрами:

$$N_e \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}, \quad \omega_0 \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}, \quad N_{os}/N_0 \sim 10^{-4},$$

$$V_0 \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см/с}, \quad v_{эфф}/\omega_{oi} \sim 10^{-3}, \quad \gamma \sim 10^{-4} \omega_{oi},$$

$$\kappa T_e \sim 10 \text{ эВ}.$$

При начальных условиях $a_{01} \sim 0,36 \text{ В/см}$, $a_{02} \sim 0,28 \text{ В/см}$, $a_{03} \sim 0,27 \text{ В/см}$ за время $\tau \sim 10^{-8} \text{ с}$ происходит установление сложного движения с амплитудами волн $a_1 \sim 8,5 \text{ В/см}$, $a_2 \sim 9,2 \text{ В/см}$, $a_3 \sim 3,2 \text{ В/см}$ и шириной спектра $\Delta\omega/\omega \sim 0,2$.

Таким образом, при определенных условиях в неравновесной плазме возможна стохастическая стабилизация взрывной неустойчивости, которая характеризуется расширением спектра взаимодействующих волн и обладает свойствами случайных процессов, образом которых в фазовом пространстве является притягивающее множество типа странного аттрактора, устойчиво существующее достаточно длительное время.

Авторы признательны О. А. Делекторской за помощь в счете на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Wilhelmsson H.— J Plasma Phys, 1969, 3, p. 215.
2. Файнштейн С. М.— ЖТФ, 1975, 45, с. 1334; — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, с. 1059.
3. Плоткин Е. Е., Файнштейн С. М.— Изв. вузов—Радиофизика, 1974, 17, с. 62.
4. Тамойкин В. В., Файнштейн С. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, с. 1134.
5. Fukai J, Krishan S, Harris E.— Phys. Rev. Lett., 1969, 23, p. 910.
6. Рабинович М. И., Реутов В. П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 6, с. 815.
7. Файнштейн С. М.— ЖЭТФ, 1969, 71, с. 1021.
8. Рабинович М. И.— УФН, 1978, 125, с. 123.
9. Вышкинд С. Я., Рабинович М. И.— ЖЭТФ, 1976, 72, с. 557.
10. Вышкинд С. Я., Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 2, с. 318.
11. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
12. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 2, с. 163; Реутов В. П. Диссертация. Горький, ГГУ, 1976.
13. Синай Я. Г.— Нелинейные волны. Ч. II. Горький: ИПФ АН СССР, 1980, с. 24.

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
27 мая 1981 г.

STOCHASTIC REGIME OF STABILIZATION OF THE BURST INSTABILITY IN AN NONEQUILIBRIUM PLASMA

S. Ya. Vyshkind, E. A. Dubinina, S. L. Sakovskaya, S. M. Fainshtein

A burst instability of longitudinal waves is considered in the flux-plasma system. It is found out that under certain conditions in the given system a stochastic stabilization of the «burst» is possible. In this case complex attraction regions with random characteristics are formed in the phase space. Estimations are given for a laboratory plasma.