

УДК 530.12

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН С ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА, ДВИЖУЩЕЙСЯ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Д. Канарейкин, В. Н. Красильников

Рассмотрено отражение плоских волн от сетчатого зеркала в бесстолкновительной плазме. Закон движения зеркала задан единичной функцией, что позволяет рассмотреть сверхгрупповые скорости движения и объяснить закономерности изменения частоты отраженного поля. Приведена формула, характеризующая дисперсионное распывание фронтов в переходной области.

Взаимодействие волн с движущимися границами подчас приводит к парадоксальным результатам, для физической расшифровки которых необходимо более полное рассмотрение структуры граничной области [1]. Неясности могут возникать и из-за чрезмерной идеализации других сторон задачи. Ниже анализируется движение сетчатого зеркала (в идеале прозрачного для среды и непрозрачного для поля) в однородной изотропной бесстолкновительной плазме. Плазменная частота ω_p , частота падающего поля ω_0 и скорость движения зеркала βc могут принимать значения, обеспечивающие движение нашего «электромагнитного невода» со скоростью, превышающей групповую скорость волн; скорость света в пустоте c , естественно, не превышает.

Задача об отражении плоской электромагнитной волны от зеркала, движущегося с постоянной скоростью, формально решается элементарно. В частности, частота отраженного поля для удаляющегося зеркала ω_1 оказывается равной

$$\omega_1 = \frac{\omega_0(1 + \beta^2) - 2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}}{1 - \beta^2}. \quad (1)$$

Частота отраженного поля для встречного движения зеркала ω_2 отличается только знаком β . Ради краткости остановимся на случае нормального падения — при наклонном падении волны принципиально новых моментов не возникает.

Величина волнового вектора отраженного поля имеет вид

$$k_1 = \frac{2\beta\omega_0 - (1 + \beta^2)\sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}}{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

На рис. 1 представлена зависимость $\omega_1(\omega_0)$. Формально любому $\omega_0 \geq \omega_p$ может быть сопоставлена некоторая частота отраженного поля $\omega_1 \geq \omega_p$, т. е. отвечающая распространяющейся волне. При этом в области II понижение частоты ω_0 сопровождается повышением частоты ω_1 , а в области I ω_1 даже больше ω_0 . Реальны ли такие эффекты — можно выяснять путем перехода к более сложной модели.

В частности, мы разрешим возникающие парадоксы, если будем считать, что сетчатое зеркало первоначально покоилось и пришло в дви-

жение с постоянной скоростью βc в момент времени $t = 0$. Поляризационные закономерности не так интересны, как фазовые, и мы ограничимся скалярной задачей, решение которой проведем с помощью процедуры, описанной в [2].

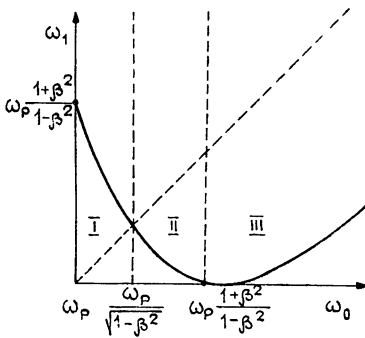


Рис. 1.

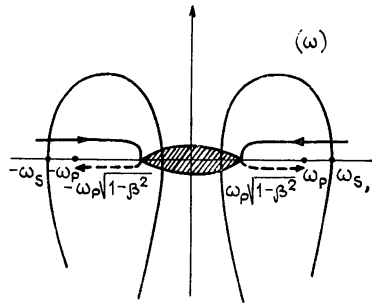


Рис. 2.

1. Постановка и решение задачи. Из скалярного поля в плазме, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \psi = 0, \quad (3)$$

выделим падающую монохроматическую волну ψ_0 и отраженное от покоящегося в плоскости $z = 0$ зеркала поля ψ_e :

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \exp[-i\omega_0 t - iS(\omega_0)(z/c)], \\ \psi_e &= -\exp[-i\omega_0 t + iS(\omega_0)(z/c)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $S(\omega_0) = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}$. В момент времени $t = 0$ зеркало начинает двигаться с постоянной скоростью βc , и наряду с (4) возникает дополнительное поле $\psi_1 = \psi - \psi_0 - \psi_e$, для отыскания которого используем граничное условие в простейшей форме:

$$\psi|_{z=\beta ct \eta(t)} = 0, \quad (5)$$

где $\eta(t)$ — единичная функция. Следуя [2], будем ψ_1 искать в виде интеграла Фурье:

$$\psi_1(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega') \exp[-i\omega' t + iS(\omega')\tau] d\omega', \quad \tau = z/c. \quad (6)$$

Нулевые начальные условия для ψ_1 будут обеспечены, если контур интегрирования в (6) обходит все особенности подынтегрального выражения сверху. При этом разрез для радикала $S(\omega')$ проведем по вещественной оси между точками ветвления $\omega'_s = \pm\omega_p$ и зафиксируем верхний лист, по которому и идет интегрирование, условием $\arg S(\omega') = 0$ при $\omega' > \omega_p$. Для отыскания функции $C(\omega')$ используем граничное условие (5). Возникающее при этом интегральное уравнение, как и в [2], сводится к равенству интегралов Фурье и легко решается с помощью замены

$$\omega = \omega' - \beta S(\omega'). \quad (7)$$

Обратное соотношение имеет вид

$$\omega' = \frac{\omega + \beta R(\omega)}{1 - \beta^2}, \quad R(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2(1 - \beta^2)}. \quad (8)$$

Заметим, что путь интегрирования на новой комплексной плоскости (ω) также обходит все особенности подынтегральной функции сверху на верхнем листе римановой поверхности. Окончательно дополнительное поле можно записать в виде

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t - \beta\tau}{1 - \beta^2} \omega + \frac{\tau - \beta t}{1 - \beta^2} R(\omega)\right) C(\omega) d\omega, \quad (9)$$

где

$$C(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0 - \beta S(\omega_0)} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + \beta S(\omega_0)}.$$

На плоскости (ω) функция $R(\omega)$ имеет разрез, соединяющий точки $\pm \omega_p \sqrt{1 - \beta^2}$ по вещественной оси, а верхний лист фиксируем условием

$$\arg R(\omega) = 0 \quad \text{при } \omega > \omega_p \sqrt{1 - \beta^2}.$$

2. Исследование решения. Рассмотрим подробнее случай встречного движения зеркала ($\beta > 0$). При этом в фиксированной точке наблюдения $z = c\tau$ дополнительное поле будет существовать от момента времени $t = \tau$ до момента $t = \tau/\beta$, соответствующего проходу зеркала через точку z .

К интегралу (7) естественно применить метод стационарной фазы в форме, учитывающей наличие полюсов вблизи седловой точки; уравнение для отыскания последней имеет вид

$$(t - \beta\tau)R(\omega) = (\tau - \beta t)\omega. \quad (10)$$

При положительных β и τ имеются две симметричные по отношению к началу координат седловые точки $\pm \omega_s$, которые находятся при $t = \tau$ на бесконечности, а затем движутся по вещественной оси ω к точкам ветвления функции $R(\omega)$, достигая их при $t = \tau/\beta$. Дальнейшее движение седловая точка совершает по нижнему листу к точке ω_p , которую достигает в бесконечный момент времени.

Топология контуров наивысшего спуска представлена на рис. 2, из которого видно, что контур интегрирования в (9) сводится к сумме контуров спуска.

На каждом из листов римановой поверхности $R(\omega)$ лежат по два простых полюса:

$$\omega' = \omega_0 + \beta S(\omega_0), \quad \omega'' = \omega_0 - \beta S(\omega_0).$$

Связь между положением полюса и частотой падающего поля задается парой преобразований (7). На верхнем листе $R(\omega)$ полюс ω' не может принимать значений, меньших ω_p , а ω'' при понижении частоты ω_0 движется к точке ветвления, которую достигает при $\omega_0 = \omega_p/\sqrt{1 - \beta^2}$, что соответствует равенству скоростей зеркала и группы падающих волн. Для более низких частот полюс ω'' переходит на нижний лист римановой поверхности $R(\omega)$, а на верхнем листе возникает полюс, лежавший при $\omega_0 > \omega_p/\sqrt{1 - \beta^2}$ на нижнем листе.

Дальнейшее движение полюсы совершают из точки ветвления к $\omega = \omega_p$, куда они приходят при $\omega_0 = \omega_p$.

Следует отметить, что переход полюса ω'' с верхнего листа на нижний соответствует переходу к сверхгрупповому режиму движения зер-

кала. В догрупповом режиме в момент времени $t_2 = z/u(\omega_2)$, указывающий момент прихода в точку наблюдения волны с групповой скоростью $u(\omega_2) = c\sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega_2^2)}$, контур наиболее быстрого спуска пересекает полюс ω' , вычет в котором равен

$$\psi' = -\exp[-i\omega_2 t + iS(\omega_2)(z/c)]. \quad (11)$$

В момент времени $t_0 = z/u(\omega_0)$ седловая точка пересечет полюс ω'' , вычет в котором

$$\psi_0 = -\exp[-i\omega_0 t + iS(\omega_0)(z/c)] \quad (12)$$

убирает из решения волну, отраженную от неподвижного зеркала.

При сверхгрупповом режиме движения в решении для зеркала, бегущего навстречу волне, появляется поле доплеровской частоты для удаляющегося источника:

$$-\exp[-i\omega_1 t + iS(\omega_1)(z/c)].$$

Это несложно объяснить, если учесть, что при $\omega_0 < \omega_p/\sqrt{1 - \beta^2}$ зеркало движется быстрее заднего фронта волны, отраженной от неподвижного зеркала, и переизлучает эту волну. Скорости зеркала и поля ψ_0 по направлению совпадают, а частоты связаны кинематически — переизлученное поле будет иметь смещенную по Доплеру частоту для удаляющегося источника. Описанный случай соответствует области I на рис. 1. Следует также отметить, что зависимость между ω_2 и ω_0 такова, что отраженное поле при встречном движении зеркала движется всегда быстрее самого зеркала ($u(\omega_2) > \beta c$). Математически это выражается в том, что полюс ω' не может принимать значений, меньших ω_p .

Интеграл (9) описывается вычетами не полностью, а имеет более сложную структуру. После применения метода стационарной фазы главная часть дополнительного поля ψ_1 , описывающая поле в переходной области, будет иметь вид

$$\psi_1 = \pi^{-1/2} \exp[-iP(t)] [F_1(\tau, \beta, t) \exp(-d_{p1}^2) \Phi(-id_{p1}) - F_2(\beta, \tau, t) \exp(-d_{p2}^2) \Phi(-id_{p2})], \quad (13)$$

где

$$d_{p1,2}^2 = i \frac{\sqrt{t^2 - \tau^2}}{\omega_p(\tau - \beta t)^2} [(\omega_0 \mp \beta S(\omega_0)) \sqrt{t^2 - \tau^2} - \omega_p(t - \beta\tau)]^2,$$

$$F_{1,2}(\tau, \beta, t) = 1 \pm \beta(t - \beta\tau)(\tau - \beta t)^{-1}$$

и $\Phi(-id_{p1,2})$ — интегралы вероятности, а $P(t)$ — это бегущая фаза, определенная выражением

$$P(t) = \omega(t)(t - \tau \cos \theta(t)),$$

где

$$\omega(t) = \frac{\omega_p}{\sin \theta(t)}, \quad \sin \theta(t) = \frac{\sqrt{t^2 - \tau^2}}{t}.$$

Интегралы вероятности описывают плавное включение вычетов — граница тени вследствие дисперсионных свойств среды размыта. Для времен, близких к t_0 , выражение (13) можно упростить:

$$\psi_1 \simeq A(t) \sqrt{\frac{t_0}{2\pi\omega_0}} \frac{\omega_p}{\omega_0} \frac{1 - \beta^2}{c(u(\omega_0) - \beta c)(t - t_0)}, \quad (14)$$

где $A(t)$ — коэффициент, содержащий бегущую фазу. Дополнительное поле убывает с ростом частоты — для высоких частот нет дисперсии — и неограниченно возрастает, если скорость группы волн близка к скорости зеркала; но этот случай запрещен условиями применимости метода стационарной фазы. Последние имеют вид

$$\omega_p \tau = \omega_p \frac{z}{c} \gg \frac{(\omega_k - \beta S(\omega_k))^2 S(\omega_k)}{(S(\omega_k) - \beta \omega_k)^2 \omega_p}, \quad k = 0, 1 \quad (15)$$

и, как правило, выполняются при наличии большого безразмерного параметра $\omega_p \tau$.

3. Пространственно-временная структура поля. Мы рассмотрели случай движения зеркала навстречу падающему полю. Решение для удаляющегося зеркала можно также получить, анализируя динамику полюсов и седловых точек. При этом нужно построить решение и для нижнего полупространства, которое зеркало освобождает по мере движения. Нас будет интересовать основная часть поля, описываемая вычетом, а не дисперсионное расплывание фронтов. Не останавливаясь на подробностях вычислений, приведем окончательные результаты.

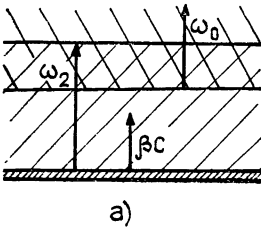


Рис. 3.

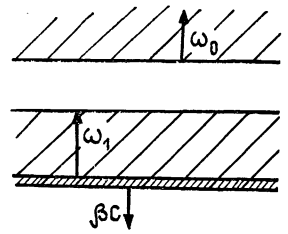
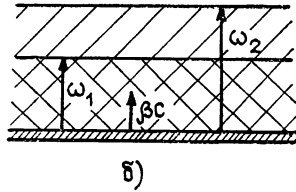


Рис. 4.

Вариант 1а. На рис. 3а показана пространственная картина поля для встречного движения зеркала и падающей волны в догрупповом режиме. В пространстве линейно расширяется со временем область двойной освещенности, образованной передним фронтом поля доплеровской частоты ω_2 и задним фронтом поля частоты ω_0 , отраженного от неподвижной границы. Для фиксированной точки наблюдения с уменьшением частоты падающего поля эта область будет расширяться, и при $\omega_0 \rightarrow \omega_p / \sqrt{1 - \beta^2}$ зеркало догонит поле частоты ω_0 .

Вариант 1б. Рассмотрим движение зеркала со скоростью, превышающей групповую скорость падающих волн.

Перед зеркалом движется область тройной освещенности, образованной полями с частотами ω_2 , ω_1 и ω_0 . При дальнейшем уменьшении частоты падающего поля фронт волны с частотой ω_1 (рис. 3б) догонит фронт волны, отраженной от движущейся границы.

Вариант 2. Построим картину поля для зеркала, удаляющегося от падающей волны. В верхнем полупространстве (рис. 4) задний фронт ω_0 и передний фронт ω_1 образуют область тени, расширяющуюся при понижении частоты падающего поля. Интересно, что при частотах ниже $\omega_0^* = \omega_p (1 + \beta^2) (1 - \beta^2)^{-1}$ фронт волны с доплеровской частотой ω_1 не приходит в точку наблюдения, расположенную выше $z > 0$, хотя групповая скорость падающего поля больше скорости зеркала.

Вариант 3а. На рис. 5а показан случай $\omega_0 > \omega_0^*$ для нижнего полупространства.

В точке наблюдения сразу после прохода зеркала, т. е. при $t \geq \tau / \beta$ возникает отраженное поле частоты ω_1 , которое существует сколь угодно долго.

Вариант 3б. Если частота падающего поля лежит в интервале $\omega_p/\sqrt{1-\beta^2} < \omega_0 < \omega_0^*$, то пространственная картина поля изменится.

Через точку наблюдения в момент времени $t = z/u(\omega_1)$ пройдет задний фронт волны с частотой ω_1 — групповая скорость волны, отраженной от зеркала по геометрикооптическим законам, изменяет знак при $\omega_0 = \omega_0^*$. Эта ситуация физически непротиворечива, поскольку $u(\omega_1) < \beta c$, и отраженная волна отводит энергию от границы [4].

Зависимость ω_1 от ω_0 для рассматриваемой области частот показана в области II на рис. 1. При понижении ω_0 частота отраженного поля должна возрастать, так как область, занятая отраженной волной, сужается при $\omega_0 \rightarrow \omega_p/\sqrt{1-\beta^2}$.

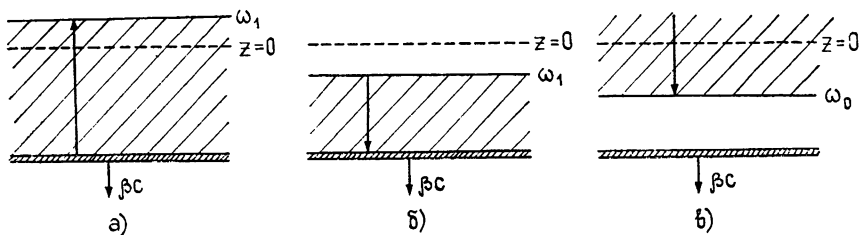


Рис. 5.

Вариант 3в. В сверхгрупповом режиме удаления зеркала по отношению к первоначально падающей волне отраженного поля нет (рис. 5в). Передний фронт падающего поля и поверхность зеркала образуют линейно расширяющуюся область тени.

Вернемся к рис. 1. Нам удалось установить, что привычный эффект Доплера наблюдается только в области III, в области II групповая скорость отраженной волны меняет знак — это сказывается на соотношении между отраженной и падающей частотами (эффект Доплера обратного знака). Зависимость частот в области I говорит о том, по какому закону зеркало будет переизлучать поле частоты ω_0 , если догонит его.

Трудности в физическом истолковании решения для непрерывно движущегося зеркала можно легко обойти, если учесть предысторию — при этом математический аппарат отражает эффекты, связанные с переходом к сверхгрупповым скоростям. Постановка задачи, принятая в настоящей статье, — не единственный путь устранения указанных трудностей.

Аналогичные результаты можно получить, рассмотрев постоянное движение зеркала и импульсное включение падающего поля. Однако в этом случае невозможна ситуация, когда зеркало переизлучает отраженное поле частоты ω_0 (обл. I на рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л. А. — УФН, 1975, 116, вып 2, с. 315.
 2. Красильников В. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, 18, № 6, с. 894
 3. Бреховских Л. М. Волны в слонстых средах — М: Наука, 1973
 4. Столяров С. Н. — Эйнштейновский сборник 1975—1976. — М: Наука, 1978
- Ленинградский государственный университет
Поступила в редакцию
12 мая 1981 г.

INTERACTION BETWEEN WAVES AND THE DIVISION BOUNDARY MOVING IN A COLISIONLESS PLASMA

A. D. Kanareikin, V. N. Krasil'nikov

Reflection of plane waves from a netlike mirror in a colisionless plasma is considered. A law of the mirror motion is given by a single function that permits to consider supergroup velocities of motion and to explain regularities of the frequency variations of the reflected. A formula is given which characterizes the dispersion diffusion of fronts in the transition region.