УДК 538.756.519.25

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ГРАДИЕНТОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Ф. Х. Абдуллаев

При изучении распространения сильно нелинейной волны в случайно-неоднородной среде возникает ряд нерешенных проблем. Одной из наиболее важных является задача размыкания системы уравнений для моментов поля. Стандартные методы расцепления, разработанные в статистической теории нелинейных волн (в том числе метод среднего поля), не являются адекватными в нелинейной задаче, как это показано в работах [1, 2]. Поэтому представляет интерес исследование нелинейных волновых стохастических моделей, разрешаемых вне рамок теории возмущений. В работе [2] рассмотрена задача применимости метода среднего поля для стохастических уравнений типа Бюргерса и Кортевега де Вриза (КдВ). В настоящей работе мы рассмотрим поведение моментов поля статистически возмущенного нелинейного уравнения Шредингера

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2q^* = 2\alpha(t)\, xq. \tag{1}$$

Здесь $\alpha(t)$ — случайный гауссов процесс

$$\langle \alpha \rangle = 0, \qquad \langle \alpha(t+\tau)\,\alpha(t) \rangle = 2\sigma^2\delta(\tau). \tag{2}$$

Уравнение (1) описывает ряд интересных физических ситуаций: распространение плоского электромагнитного пучка в неоднородной среде с флуктуирующим градиентом диэлектрической проницаемости, распространение солитонов в турбулентной плазме и др. Будем искать $q(x,\ t)$, следуя [3], в виде

$$q(x,\ t) = \varphi(x - D(t))\exp[iB(t)x + iC(t)]. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и потребовав, чтобы φ удовлетворяло невозмущенному нелинейному уравнению Шредингера, получаем

$$D_t(t) = -2B(t), \qquad C_t = -B^2, \qquad B_t = -2\alpha(t) \tag{3}$$

Решение невозмущенного нелинейного уравнения Шредингера хорошо известно. Учитывая (3), находим

$$q(x,\ t) = 2iq_0 \operatorname{sech} 2q_0(x - x_0 + 4\xi t - D(t)) \exp[iBx + iC(t) - 4i(\xi^2 - q_0^2)\, t - 2i\xi(x - D(t))]. \tag{3б}$$

Здесь $v = -4\xi$, где v — скорость солитона (если рассматривается задача распространения плоского пучка, то это угол между направлением распространения и осью пучка). Интегрируя (3а) и подставляя результаты в (3б), получаем для односолитонного решения

$$\begin{gathered} q(x,\ t) = 2iq_0 \operatorname{sech} 2q_0\left(x - x_0 + 4\xi t + 4\int\int_0^t \alpha(t')\,dt'\right)\exp\left[-2i\left(\int_0^t \alpha(t')\,dt'\right)x + \right. \\ \left. + 4i\left(\int_0^t \alpha(t')\,dt'\right)^2 - 4i(\xi^2 - q_0^2)\,t - 2i\xi\left(x + 4\int\int_0^t \alpha(t')\,dt'\right)\right]. \end{gathered} \tag{4}$$

Перейдем к вычислению моментов поля. Найдем среднюю интенсивность

$$\langle |q|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\eta,\ t)\,|\varphi|^2\,d\eta, \tag{5}$$

где $P(\eta,\ t)$ — распределение вероятностей η, имеющее вид

$$P(\eta,\ t) = \left(\sqrt{4\pi\sigma^2 t^3}\right)^{-1}\exp[-\eta^2/4\sigma^2t^3], \qquad \eta = \int\int_0^t \alpha(t')\,dt'. \tag{6}$$

Это выражение для $P(\eta,\ t)$ справедливо в случае гауссовости и стационарности случайной функции $\alpha(t)$.

Пусть

$$2^6 q_0^2\sigma^2 t^3 \gg 1. \tag{6а}$$

Тогда, вычисляя (5), получаем

$$\langle |q|^2 \rangle = \frac{q_0}{\sqrt{4\pi\sigma^2 t^3}}\exp\left[-\frac{(x - x_0 + 4\xi t)^2}{64\sigma^2 t^3}\right], \tag{7}$$

т. е. на больших временах пробега, удовлетворяющих условию (6а), солитоны переходят в гауссовы волновые пакеты, расплывающиеся по закону $t^{-3/2}$. Отметим, что в случае КдВ закон расплывания $t^{-1/2}$. Вычислим далее среднеквадратичную поправку к скорости солитона:

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2 + 32\sigma^2 t \tag{8}$$

Таким образом, скорость увеличивается по закону $t^{1/2}$. Диффузный характер решения (8) можно понять из следующих соображений. Эффективная сила, действующая на солитон нелинейного уравнения Шредингера вследствие возмущения $\alpha(t)xq(x, t)$, есть

$$F_{\text{эфф}} = 8q_0^3 \alpha(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sech}^2 2q_0(x - x_0) \operatorname{th} 2q_0(x - x_0)\, dx, \tag{8a}$$

и мы имеем дело с задачей движения частицы под действием δ-коррелированной во времени случайной силы. Представляет интерес проследить границы применимости метода среднего поля также для модели

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2q^* = \varepsilon(t)q. \tag{9}$$

Точное решение (9) можно записать в виде

$$q = q' \exp\left[-i\int\limits_0^t \varepsilon(t)\, dt\right].$$

Здесь q' удовлетворяет невозмущенному нелинейному уравнению Шредингера. Усредняя, находим, что

$$\langle q \rangle = q' \exp\left[-\sigma_\varepsilon^2 t/2\right]. \tag{10}$$

Применяя стандартный метод среднего поля к (9) (см., например, [4]), получаем уравнение

$$i\langle q \rangle_t + \langle q \rangle_{xx} + 2\langle q \rangle^2 \langle q^* \rangle = -(i\sigma_\varepsilon^2/4)\langle q \rangle.$$

С помощью модифицированного интеграла движения

$$(\partial/\partial t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle q \rangle|^2\, dx = -(\sigma_\varepsilon^2/2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\langle q \rangle|^2 dx,$$

находим

$$|\langle q \rangle|^2_{\text{пр}} = \frac{4q_0^2 \exp(-\sigma_\varepsilon^2 t)}{\operatorname{ch}^2[2q_0 \exp(-\sigma_\varepsilon^2 t/2)(x - v_0 t)]},$$

в то время как точное среднее описывается соотношением

$$|\langle q \rangle|^2_{\text{т}} = \frac{4q_0^2 \exp(-\sigma_\varepsilon^2 t)}{\operatorname{ch}^2[2q_0(x - v_0 t)]}.$$

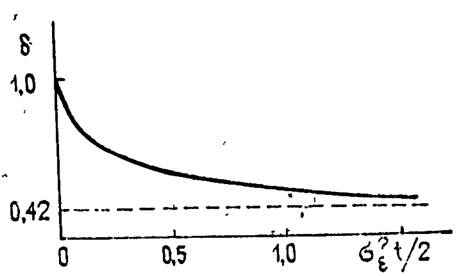

Рис. 1.

Результаты расчета соотношения $\delta = I_{\text{т}}/I_{\text{пр}}$ в зависимости от $\sigma_\varepsilon^2 t/2$ приведены на графике. Видно, что метод среднего поля дает результаты, близкие к точным при $t \ll \sigma_\varepsilon^{-2}$, при больших t он дает завышенное значение. Последний факт согласуется с анализом [1] для статистической модели Бюргерса.

Автор признателен А. А. Абдумаликову и С. С. Абдуллаеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелиновский Е. Н.— В сб. Нелинейные волны.— М.: Наука, 1979, с. 331.
2. Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Пелиновский Е. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 10, с. 1485.
3. Kaup D. J., Newell A. C.— Proc. Roy. Soc., 1978, A361, p. 413.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.

Отдел теплофизики
АН УзССР

Поступила в редакцию
16 июня 1981 г.