ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 621.372.8.001.24

ПРЯМОЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ДВУМЕРНОГО ГОФРИРОВАННОГО ВОЛНОВОДА

А. А. Быков

Предложен новый метод расчета собственных волн гофрированных волноводов, основанный на использовании неполного метода Галеркина. Получена краевая задача на собственные значения, для решения которой применен метод направленной ортогонализации, позволивший получить численный алгоритм, устойчивый к ошибкам округления ЭВМ.

1. Задача расчета собственных волн гофрированных волноводов привлекает большое внимание ввиду наличия некоторых полезных особенностей гофрированных волноводов по сравнению с волноводами с регулярной цилиндрической боковой поверхностью [1]. Расчет гофрированных волноводов вместе с тем значительно сложнее расчета регулярных волноводов, и универсальный алгоритм определения собственных волн, пригодный во всех случаях, пока не создан.

Постановка задачи о распространении собственных волн гофрированного волновода такова. Рассмотрим область D с периодической границей Σ, внутри которой среда является однородной, изотропной и не обладает поглощающими свойствами. Направим ось ζ вдоль оси волновода, оси ξ и η — перпендикулярно оси. Тогда область D можно записать в виде

$$(\xi, \eta) \in S(\zeta),$$

где $S(\zeta)$ — ограниченная односвязная плоская фигура, причем

$$S(\zeta + T) = S(\zeta).$$

Ограничимся случаем ляпуновской границы области $S(\zeta)$ и непрерывной зависимости S от ζ. Требуется найти решения уравнений Максвелла в области D, зависящие от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, удовлетворяющие стандартным граничным условиям на Σ и условию Флоке:

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (\zeta + T, \xi, \eta) = \exp(it) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (\zeta, \xi, \eta).$$

Эта задача решается обычно в два этапа [1–4]. Во-первых, с помощью некоторой соответствующим образом выбранной замены переменных (ζ, ξ, η) область D переводится в круговой цилиндр единично радиуса G:

$$-\infty < z < \infty, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

При этом уравнения Максвелла переходят в эллиптическую систему уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. На втором этапе строится приближенное решение этой системы. В качестве базисных функций выбирают векторные функции

$$e_\tau^n(\rho, \varphi), \quad h_\tau^n(\rho, \varphi),$$

пропорциональные поперечным частям электрического и магнитного полей в нормальной волне волновода G с однородным заполнением [1]. Приближенное решение ищется в виде

$$E_\tau^{(N)}(x, y, z) = \sum_{1}^{N} A_m(z)\, e_\tau^{(m)}(x, y),$$
$$H_\tau^{(N)}(x, y, z) = \sum_{1}^{N} B_m(z)\, h_\tau^{(m)}(x, y). \tag{1}$$

С помощью неполного метода Галеркина для неизвестных функций A_m, B_m, зависящих от продольной координаты, получается линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Характеристические показатели этой системы являются постоянными распространения (т. е. параметрами Флоке t_k) для собственных волн гофрированного волновода.

Численное определение характеристических показателей встречает большие трудности. Дело в том, что среди характеристических показателей имеется конечное (обычно небольшое) число действительных показателей, остальные — мнимые, в том числе большие по абсолютной величине. Следовательно, среди частных решений имеются быстровозрастающие и быстроубывающие по экспоненциальному закону, что приводит к сильному влиянию ошибок округления. Обычно этот метод используется в случае небольшого возмущения формы границ, когда можно использовать для определения характеристических показателей метод последовательных приближений, отправляясь от нормальных волн регулярного цилиндра. Таким образом, трудность состоит в отсутствии эффективного численного метода определения характеристических показателей периодических линейных систем, устойчивого к ошибкам округления.

Недавно был разработан [5] и обоснован [6] устойчивый к ошибкам округления численный метод решения краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений — метод направленной ортогонализации. Естественно использовать этот метод и в задачах на собственные назначения. Необходимо принципиально изменить второй этап решения задачи о собственных волнах, так, чтобы он приводил не к задаче о характеристических показателях, а к краевой задаче на собственные значения для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместо (1) будем искать приближеное решение в виде

$$E_\tau^{(N)}(x, y, z) = \sum_{-N}^{N} \Psi_n(t, z)\, C_n^{(N)}(x, y),$$
$$H_\tau^{(N)}(x, y, z) = \sum_{-N}^{N} \Psi_n(t, z)\, D_n^{(N)}(x, y), \tag{2}$$

где $\Psi_n(t, z) = T^{-1/2}\exp[i(t + 2\pi n)z/T]$, C_n и D_n — неизвестные вектор-функции. Разложим их в конечный отрезок ряда Фурье по угловой переменной φ и затем с помощью неполного метода Галеркина получим краевую задачу на собственные значения (t — спектральный параметр). Дифференциальные уравнения на отрезке $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ будут дополнены граничными условиями: в точке $\rho = 0$ поставим условие ограниченности, а в точке $\rho = 1$ — граничные условия, соответствующие идеально проводящей боковой поверхности.

Рассмотрим процесс отыскания спектрального параметра t. Будем решать полученную краевую задачу с помощью метода направленной ортогонализации. Этот метод принадлежит к классу методов типа стрельбы [7] и приводит к семейству задач Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и к системе линейных алгебраических уравнений. Легко показать, что значение t является собственным значением тогда и только тогда, когда упомянутая алгебраическая система является вырожденной, ее детерминант равен нулю. Следовательно, для определения t можно использовать один из одномерных методов минимизации [8], причем нужно искать минимум модуля детерминанта алгебраической системы. Устойчивость к ошибкам округления доказывается так же, как в [6].

В следующем пункте рассмотрен описанный алгоритм в двумерном случае. Для простоты предполагаем, что известно конформное отображение боковой поверхности в прямую линию. На вопросах численного построения этого отображения в данной работе мы останавливаться не будем. Использование конформного отображения упрощает алгоритм, но аналогичный алгоритм можно построить с помощью замены переменной [9].

2. Опишем алгоритм определения собственных волн двумерного гофрированного волновода с помощью неполного метода Галеркина с использованием конформного отображения. Пусть все поля зависят от двух декартовых координат u и v, причем ось u направим вдоль оси волновода. Пусть внутренность волновода описывается неравенствами

$$-F(u) < v < F(u), \tag{3}$$

где $F(u)$ — периодическая бесконечно-дифференцируемая функция. Без ограничения общности считаем, что период функции F равен 2π. Дополнительно предположим, что начало координат оси u выбрано так, что $F'(0)=0$. Предположим также, что $F(u)$ — четная функция. В [10] показано, что найдется такое $h>0$, что прямоугольник

$$0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < h \tag{4}$$

может быть конформно отображен на область

$$0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < F(u) \tag{5}$$

с соответствием четырех вершин

$$\begin{aligned} (0, 0) &\to (0, 0), \\ (2\pi, 0) &\to (2\pi, 0), \\ (2\pi, h) &\to (2\pi, F(2\pi)), \\ (0, h) &\to (0, F(0)) \end{aligned} \tag{6}$$

с помощью аналитической функции $w(z)$:

$$u = \operatorname{Re} w, \quad v = \operatorname{Im} w, \quad z = x + iy.$$

Поставим задачу определения собственных волн волновода (3), ограничившись для простоты H-поляризацией:

$$\boldsymbol{E} = (0, 0, E_\zeta(u, v)), \quad \boldsymbol{H} = (H_u, H_v, 0)$$

и случаем идеально проводящих стенок:

$$E_\zeta(u, v) = 0 \quad \text{при} \quad |v| = F(u).$$

Получим следующую задачу:

$$\partial^2 E_\zeta/\partial u^2 + \partial^2 E_\zeta/\partial v^2 + k_0^2 E_\zeta = 0,$$

$$-\infty < u < \infty, \quad -F(u) < v < F(u),$$

$$E_\zeta(u, \pm F(u)) = 0,$$

$$E_\zeta(u + 2\pi, v) = \exp(it)\, E_\zeta(u, v),$$

где параметр Флоке t подлежит определению. Применяя конформное отображение с помощью функции $w^{-1}(u, v)$, получим следующую задачу:

$$\partial^2 Q/\partial x^2 + \partial^2 Q/\partial y^2 + k_0^2 \varepsilon(x, y)\, Q = 0,$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -h < y < h; \tag{7}$$

$$Q(x, \pm h) = 0; \tag{8}$$

$$Q(x + 2\pi, y) = \exp(it)\, Q(x, y), \tag{9}$$

где $\varepsilon(x, y) = |w'(z)|$, $z = x + iy$, $Q(x, y) = E_\zeta(w(z))$.

Требуется определить такие значения t, что однородная задача (7)—(9) имеет нетривиальное дважды непрерывно-дифференцируемое, непрерывное вплоть до границ решение. Приближенное решение ищем в виде

$$Q^N(x, y) = \sum_{n=-N}^{N} \Psi_n(t, x)\, B_n(y), \tag{10}$$

где

$$\Psi_n(t, x) = (2\pi)^{-1/2} \exp[i(t + 2\pi n)\, x/2\pi],$$

$B_n(y)$ — дважды непрерывно-дифференцируемые функции. Чтобы получить уравнение для определения $B_n(y)$, используем неполный метод Галеркина [9, 11, 12]:

$$\int_0^{2\pi} [\Delta Q^{(N)}(x, y) + k_0^2 \varepsilon(x, y)\, Q^{(N)}(x, y)]\, \Psi_n^*(t, x) = 0, \quad -N \leqslant n \leqslant N,$$

что приводит к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d^2 B_n/dy^2 - \lambda_n^2(t)\, B_n + \sum_{m=-N}^{N} \varepsilon_{mn}(y)\, B_m = 0,$$
$$-N \leqslant n \leqslant N, \quad -h < y < h, \tag{11}$$

где

$$\lambda_n = (t + 2\pi n)/2\pi,$$

$$\varepsilon_{mn}(y) = k_0^2 \int_0^{2\pi} \Psi_m(t, x)\, \Psi_n^*(t, x)\, \varepsilon(x, y)\, dx,$$

граничные условия (8) дадут

$$B_n(-h) = B_n(h) = 0. \tag{12}$$

Система уравнений (11), (12) дает однородную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметр t определяется из условия наличия у задачи (11), (12) нетривиальных решений. Таким образом, получена краевая задача на собственные значения. Для решения этой задачи можно применить метод направленной ортогонализации [5,6], специально разработанный для решения краевых задач, получающихся при использовании неполного метода Галеркина.

3. Продемонстрируем применение метода на примере волновода со слабо возмущенной боковой поверхностью. В предположении малости глубины гофрирования получим разложение собственных функций и собственных значений по степеням параметра, определяющего глубину гофрирования. Рассмотрим следующее конформное отображение:

$$w(z) = z + a \sin z.$$

Прямоугольник (4) переводится в область (5), причем функция $F(u)$ определяется из условия

$$F(\bar{u}) = \bar{v}(x^{-1}(\bar{u})),$$

где

$$\bar{u}(x) = x + a \operatorname{ch}(h) \sin x; \tag{13}$$

$$\bar{v}(x) = h + a \operatorname{sh}(h) \cos x. \tag{14}$$

Решим совместно уравнения (13), (14) с точностью до членов порядка a^2:

$$F(u) = h + 0{,}5a^2 \operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h) + a \operatorname{sh}(h) \cos u -$$
$$- 0{,}5a^2 \operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h) \cos 2u + O(a^3).$$

Таким образом, форма боковой поверхности в первом приближении — синусоидальная. Для простоты рассмотрим волновод с односторонним гофрированием или, что то же самое, рассмотрим нечетные собственные волны волновода с двусторонним гофрированием. Вместо граничных условий (8) получим

$$Q(x, 0) = Q(x, h) = 0.$$

Найдем функции $\varepsilon_{mn}(y)$:

$$\varepsilon_{mn}(y) = \delta_{m,n}(k_0^2 + 0{,}5\, a^2 k_0^2 \operatorname{ch} 2y) + 2ak_0^2 \operatorname{ch} y \times$$
$$\times (\delta_{m-n,1} + \delta_{m-n,-1}) + 0{,}5\, a^2 k_0^2 (\delta_{m-n,2} + \delta_{m-n,-2}).$$

Для определения неизвестных функций $B_n(y)$ и параметров t_m получим краевую задачу на собственные значения:

$$d^2B_n/dy^2 + (k_0^2 + 0{,}5a^2 k_0^2 \operatorname{ch} 2y) B_n - \lambda_n^2 B_n +$$
$$+ 2ak_0^2 \operatorname{ch} y (B_{n-1} + B_{n+1}) + 0{,}5\, a^2 k_0^2 (B_{n-2} + B_{n+2}) = 0, \quad 0 < y < h; \tag{15}$$

$$B_n(0) = B_n(h) = 0, \quad B_{\pm(N+1)} \equiv 0, \quad B_{\pm(N+2)} \equiv 0. \tag{16}$$

Решения задачи (15), (16) ищем в виде разложений по степеням параметра a:

$$B_n(y) = B_n^{(0)}(y) + aB_n^{(1)}(y) + a^2 B_n^{(2)}(y) + \ldots, \qquad t = t_0 + at_1 + a^2 t_2 + \ldots$$

Уравнение (15) запишем в виде степенного ряда:

$$(B_n^{(0)})'' + (\gamma_n^{(0)})^2 B_n^0 + a\left[(B_n^{(1)})'' + (\gamma_n^{(0)})^2 B_n^{(1)} - t_1(2t_0 + 4\pi n)(2\pi)^{-2} B_n^{(0)} +\right.$$

$$+ 2k_0^2 \operatorname{ch} y \left(B_{n-1}^{(0)} + B_{n+1}^{(0)}\right)\Big] + a^2 \Big[\left(B_n^{(2)}\right)'' + \left(\gamma_n^{(0)}\right)^2 B_n^{(2)} -$$

$$- t_1 (2t_0 + 4\pi n)(2\pi)^{-2} B_n^{(1)} + (t_1^2 + 2t_0 t_2 + 4\pi n t_2)(2\pi)^{-2} B_n^{(0)} +$$

$$+ 2k_0^2 \left(B_{n-1}^{(1)} + B_{n+1}^{(1)}\right) + 0{,}5\, k_0^2 \operatorname{ch} 2y\, B_n^{(0)} + 0{,}5\, k_0^2 \left(B_{n-2}^{(0)} + B_{n+2}^{(0)}\right)\Big] + \ldots = 0,$$

$$0 < y < h, \quad \gamma_n^{(0)} = [k_0^2 - (\lambda_n^{(0)})^2]^{1/2}, \quad \lambda_n^{(0)} = n + t_0/2\pi.$$

1) *Нулевое приближение.* Собственные функции и собственные значения нулевого приближения такие же, как у волновода с невозмущенной границей. Рассмотрим лишь наименьшее собственное значение, которое соответствует волне H_{10} типа:

$$B_0^{(0)}(y) = \sin(\pi y/h), \quad B_n^{(0)}(y) = 0, \quad n \neq 0, \quad t_0 = 2\pi\, [k_0^2 - (\pi/h)^2]^{1/2}.$$

2) *Первое приближение.* Краевая задача первого приближения имеет вид

$$\left(B_n^{(1)}\right)'' + \left(\gamma_n^{(0)}\right)^2 B_n^{(1)} = t_1 (2t_0 + 4\pi n)(2\pi)^{-2} B_n^{(0)} - \\ - 2k_0^2 \operatorname{ch} y \left(B_{n-1}^{(0)} + B_{n+1}^{(0)}\right), \quad 0 < y < h; \tag{17}$$

$$B_n^{(1)}(0) = B_n^{(1)}(h) = 0. \tag{18}$$

Сначала рассмотрим уравнение (17) при $n = 0$. Так как соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\sin(\pi y/h)$, то решение неоднородной задачи (17), (18) существует при выполнении условия ортогональности правой части (17) и собственной функции нулевого приближения. Это условие дает возможность определить t_1. Получим $t_1 = 0$, $B_0^{(1)}(y) = \mathrm{const} \times \sin(\pi y/h)$. Потребовав ортогональности функций $B_0^{(1)}$ и $B_0^{(0)}$, получим $B_0^{(1)}(y) = 0$. Теперь рассмотрим задачу (17), (18) при $n = 1$. Эта задача имеет единственное решение. Рассмотрим случай, когда $\gamma_1^{(0)}$ — чисто мнимая величина. Обозначим $\gamma_1^{(0)} = ip$, $p > 0$. Построим функцию Грина задачи (17), (18) и с ее помощью найдем решение

$$B_1^{(1)}(y) = 2k_0^2 \{4(\pi/h)^2 + [p^2 + (\pi/h)^2 - 1]^2\}^{-1} \{[p^2 + (\pi/h)^2 - 1] \times \\ \times \sin(\pi y/h) \operatorname{ch} y + 2(\pi/h)\cos(\pi y/h) \operatorname{sh} y + \\ + 2(\pi/h)\, [\operatorname{sh}(h)/\operatorname{sh}(ph)] \operatorname{sh}(py)\}, \quad B_{-1}^{(1)}(y) = B_1^{(1)}(y).$$

Таким образом, среди собственных функций первого приближения только две отличны от нуля: $B_1^{(1)}$ и $B_{-1}^{(1)}$, причем $B_{-1}^{(1)}(y) = B_1^{(1)}(y)$, $0 \leqslant y \leqslant h$.

3) *Второе приближение.* Краевая задача второго приближения имеет вид

$$\left(B_n^{(2)}\right)'' + \left(\gamma_n^{(0)}\right)^2 B_n^{(2)} = t_1 (2t_0 + 4\pi n)(2\pi)^{-2} B_n^{(1)} - (t_1^2 + 2t_0 t_2 + \\ + 4\pi n t_2)(2\pi)^{-2} B_n^{(0)} + 2k_0^2 \left(B_{n-1}^{(1)} + B_{n+1}^{(1)}\right) + 0{,}5\, k_0^2 \operatorname{ch}(2y)\, B_n^{(0)} + 0{,}5\, k_0^2 \times \\ \times \left(B_{n+2}^{(0)} + B_{n-2}^{(0)}\right), \quad 0 < y < h, \qquad B_n^{(2)}(0) = B_n^{(2)}(h) = 0.$$

Значение t_2 определяем из условия разрешимости этой задачи при $n = 0$:

$$t_2 = (2\pi)^2 k_0^2 (h t_0)^{-1} \Big[0{,}5 \int_0^h \operatorname{ch}(2y) \sin^2(\pi y/h)\, dy +$$

$$+ 2\int_0^h \mathrm{ch}(y)\sin(\pi y/h)\, B_1^{(1)}(y)\, dy\Bigg]^{-1}. \tag{19}$$

Функция $B_0(y)$ во втором приближении не меняется, функции $B_{-1}^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, $B_{-2}^{(2)}$, $B_2^{(2)}$ легко определяются с помощью функции Грина, причем все интегралы выражаются через элементарные функции. Интеграл (19) легко вычисляется в элементарных функциях, однако его значение не приводим ввиду громоздкости соответствующей формулы.

Таким образом, собственные значения краевой задачи не изменяются в первом приближении, а во втором приближении выражаются через элементарные функции. Аналогично можно вычислить нужное число членов ряда по параметру, все они могут быть получены в виде конечных формул, содержащих только элементарные функции.

Метод, использованный в данной работе для расчета двумерного гофрированного волновода, может применяться и для решения трехмерных задач, например, для расчета цилиндрического волновода с синусоидальным гофром.

Благодарю А. Г. Свешникова и А. С. Ильинского за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альховский Э. А. и др.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. — М.: МГУ, 1975, с. 279.
2. Ильинский А. С., Альховский Э. А., Данилова А. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 10, с. 1583.
3. Альховский Э. А., Ильинский А. С., Трошин Г. И.— Радиотехника и электроника, 1975, 20, № 11, с. 2250.
4. Альховский Э. А., Ильинский А. С.— Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 8, с. 1684.
5. Быков А. А., Ильинский А. С.— ЖВММФ, 1979, 19, № 3, с. 631.
6. Быков А. А.— ДАН СССР, 1980, 251, № 5, с. 1040.
7. Бахвалов Н. С. Численные методы — М.: Наука, 1975.
8. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1980.
9. Свешников А. Г.— ЖВММФ, 1963, 3, № 3, с. 314.
10. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М., Наука, 1979.
11. Свешников А. Г.— ДАН СССР, 1977, 236, № 5, с. 1076.
12. Ильинский А. С.— ЖВММФ, 1974, № 4, с. 1063.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 23 июня 1981 г.

THE DIRECT PROJECTION METHOD FOR DETERMINATION OF EIGENWAVES OF TWODIMENSIONAL PERIODIC WAVEGUIDES

A. A. Bykov

A new method is suggested for the calculation of eigen waves of a corrugated waveguide which is based on the use of the uncomplete Galerkin method. The boundary problem for the eigen values has been obtained for the solution of which a method of directional orthogonality is used which permits to obtain a numerical algorithm stable to errors of the computer approximation.