

УДК 62—523.8 : 534.832

## АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА АКТИВНОГО ГАШЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

*С. Н. Арзамасов, А. А. Мальцев*

Для активного гашения случайных волновых полей предложено использовать адаптивную систему, которая автоматически регулирует амплитуды гасящих излучателей на основе информации, поступающей от измерителей первоначального и нескомпенсированного полей. Найдено выражение для средней мощности остаточного поля. Исследовано влияние волновой обратной связи на устойчивость адаптивной системы и эффективность гашения случайного поля. В качестве примера рассмотрены характеристики адаптивной системы активного гашения поля плоской волны, прошедшей через безграничный хаотический экран.

Среди разнообразных методов ослабления полей с целью вибро- и звукоизоляции или электромагнитной экранизации определенной области пространства в последние годы все большее внимание уделяется так называемому методу активного гашения волн [1–8]. В работах [1, 2] теоретически была показана возможность гашения волновых полей различной физической природы путем создания компенсирующего поля с помощью системы непрерывно размещенных излучателей монопольного и дипольного типов, реализующих поверхности Гюйгенса.

Однако практическое осуществление метода активного гашения волн оказалось достаточно сложным. Так, при решении задачи активного гашения в реальных системах возникают трудности вычислительного характера, связанные с нахождением оператора Грина и его оптимальной аппроксимацией дискретными излучателями [3, 4]. Кроме того, эксперименты по активному гашению поля в акустическом волноводе [5–7] выявили необходимость обеспечения весьма высокой точности настройки системы управления компенсирующими излучателями. Эти обстоятельства свидетельствуют о существенной критичности метода активного гашения к неизбежным различиям между выбранной для расчетов моделью, ее технической реализацией и действительными условиями распространения волн.

С целью преодоления указанных трудностей в настоящей работе предлагается использовать адаптивную (самонастраивающуюся) систему активного гашения волн, работающую следующим образом. На основании информации, поступающей от измерителей первоначального и нескомпенсированного полей, адаптивная система регулирует характеристики излучателей, минимизируя среднюю мощность остаточного поля. При этом адаптивная система гашения автоматически моделирует реальные условия распространения волн и способна «следить» за изменениями характеристик поля и параметров среды.

**1. Уравнение адаптивного алгоритма.** Предположим, что в однородной изотропной среде имеется скалярное монохроматическое поле  $p(r, t)$ ,  $r(x, y, z)$ , созданное ансамблем случайных источников [9]. Рассмотрим задачу активного гашения этого поля для определенности

вне некоторой замкнутой поверхности, содержащей случайные источники внутри себя. Пространственную структуру адаптивной системы активного гашения волн зададим следующим образом.

В  $L + L'$  дискретных точках замкнутой поверхности  $s_1$  поместим первичные монопольные и дипольные измерители, показания которых объединим в вектор

$$\mathbf{u}_{\text{bx}}(s_1) = \{u_1, \dots, u_{L+L'}\}^T, \quad (1)$$

где  $u_l = p(r_l)$ , ( $l = \overline{1, L}$ ) — комплексная амплитуда поля в точке с координатой  $r_l$  на поверхности  $s_1$ ,  $u_l = \partial p(r_l)/\partial n_l$  ( $l = \overline{L+1, L'}$ ) — комплексная амплитуда нормальной производной поля. В  $M + M'$  дискретных точках замкнутой поверхности  $s_2$ , содержащей  $s_1$  внутри себя, расположим монопольные и дипольные излучатели, вектор интенсивностей  $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_{M+M'}\}^T$  которых свяжем с показаниями измерителей следующим соотношением:

$$\mathbf{f} = -W \mathbf{u}_{\text{bx}}(s_1), \quad (2)$$

где  $W = \|W_{ml}\|$  — прямоугольная  $[(M + M') \times (L + L')]$ -матрица регулируемых комплексных весовых коэффициентов.

Будем считать, что гашение первоначального поля происходит эффективно, если сумма средних квадратов значений нескомпенсированного поля и его нормальной производной, измеренных в  $Q + Q'$  точках второй приемной (контрольной) поверхности  $s_3$ , внешней по отношению к  $s_2$ , достигает минимальной величины по всем  $W_{ml}$ . Таким образом, функционал качества задается в виде\*

$$J = \langle \mathbf{e}^+(s_3) \mathbf{e}(s_3) \rangle = \sum_{q=1}^{Q+Q'} \langle |\mathbf{e}(r_q)|^2 \rangle, \quad (3)$$

где  $\mathbf{e}(s_3)$  — вектор ошибки компенсации, определяемый формулой

$$\mathbf{e}(s_3) = \mathbf{u}(s_3) + \mathbf{G}\mathbf{f} = \mathbf{u}(s_3) - \mathbf{G}W\mathbf{u}_{\text{bx}}(s_1). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{u}(s_3) = \{u_1, \dots, u_{Q+Q'}\}^T$  — вектор значений первоначального поля ( $q = \overline{1, Q}$ ) и его нормальной производной ( $q = \overline{Q+1, Q'}$ ) в точках контрольной поверхности  $s_3$ ,  $\mathbf{G}$  — прямоугольная  $[(Q + Q') \times (M + M')]$ -матрица с элементами

$$\mathbf{G}_{qm} = \begin{cases} G(r_q, r_m), & q = \overline{1, Q}, \quad m = \overline{1, M} \\ -\partial G(r_q, r_m)/\partial n_2, & q = \overline{1, Q}, \quad m = \overline{M+1, M'} \\ \partial G(r_q, r_m)/\partial n_3, & q = \overline{Q+1, Q'}, \quad m = \overline{1, M} \\ -\partial^2 G(r_q, r_m)/\partial n_2 \partial n_3, & q = \overline{Q+1, Q'}, \quad m = \overline{M+1, M'} \end{cases}, \quad (5)$$

где  $G(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}$  ( $r \in s_3, r' \in s_2$ ) — функция Грина безграничной однородной среды,  $\partial/\partial n_{2,3}$  — производные по внешним нормалям к соответствующим поверхностям.

Оптимальные значения квадратурных компонент весовых коэффициентов  $W_{ml}$  можно найти как решение системы уравнений, получающихся из необходимых условий минимума функционала (3):

$$\begin{aligned} \partial J / \partial \operatorname{Re} W_{ml} &= 0, \quad m = \overline{1, M+M'}, \\ \partial J / \partial \operatorname{Im} W_{ml} &= 0, \quad l = \overline{1, L+L'}. \end{aligned} \quad (6)$$

\* Знаки +, \* означают эрмитово и комплексное сопряжение соответственно,  $\langle \dots \rangle$  — статистическое усреднение по ансамблю случайных источников.

Для решения уравнений (6) воспользуемся известным адаптивным градиентным алгоритмом [10, 11]:

$$\frac{d \operatorname{Re} W_{ml}}{dt} = -\frac{\gamma}{2} \frac{\partial [\epsilon^+(s_3) \epsilon(s_3)]}{\partial \operatorname{Re} W_{ml}}, \quad m = \overline{1, M + M'},$$

$$i \frac{d \operatorname{Im} W_{ml}}{dt} = -i \frac{\gamma}{2} \frac{\partial [\epsilon^+(s_3) \epsilon(s_3)]}{\partial \operatorname{Im} W_{ml}}, \quad l = \overline{1, L + L'}.$$

Складывая эти уравнения и учитывая (4), нетрудно получить следующее матричное уравнение адаптивного алгоритма в комплексной форме:

$$dW/dt = \gamma G^+ \epsilon(s_3) u_{bx}^+(s_1), \quad (7)$$

где  $\gamma > 0$  — постоянный коэффициент, определяющий скорость сходимости алгоритма. Усредняя это уравнение и пренебрегая корреляцией между матрицами  $W$  и  $[u_{bx}(s_1) u_{bx}^+(s_1)]^*$ , получим следующее уравнение относительно среднего значения матрицы весовых коэффициентов:

$$dW/dt = \gamma G^+ (P_{bx} - GWR_{bx}). \quad (8)$$

Здесь  $P_{bx} = \langle u(s_3) u_{bx}^+(s_1) \rangle$  — корреляционная матрица между показаниями первичных измерителей и значениями первоначального поля на поверхности  $s_3$ ,  $R_{bx} = \langle u_{bx}(s_1) u_{bx}^+(s_1) \rangle$  — автокорреляционная матрица показаний первичных измерителей, знак усреднения у  $W$  для удобства обозначений опущен.

**2. Анализ работы адаптивной системы при отсутствии волновой обратной связи.** Исследуем решение уравнения (8), предполагая, что волновая обратная связь между компенсирующими излучателями и первичными измерителями, помещенными на поверхности  $s_1$ , отсутствует\*\*. Следствием сделанного предположения является равенство показаний первичных измерителей полю случайных источников на поверхности  $s_1$  ( $u_{bx}(s_1) = u(s_1)$ ). В этом случае матрицы  $P_{bx}$  и  $R_{bx}$  не зависят от матрицы  $W$  и уравнение (8) будет линейным:

$$dW/dt = \gamma G^+ (P - GWR). \quad (9)$$

Здесь  $P = \langle u(s_3) u^+(s_1) \rangle$  — корреляционная матрица между значениями случайного поля в точках размещения первичных и вторичных измерителей,  $R = \langle u(s_1) u^+(s_1) \rangle$  — корреляционная матрица значений случайного поля в точках размещения первичных измерителей. Несложно показать, что стационарное решение уравнения (9)

$$W_{opt} = (G^+ G)^{-1} G^+ PR^{-1} \quad (10)$$

является оптимальным, удовлетворяющим условиям (6). Общее решение уравнения (9) удобно представить в следующем виде:

$$W(t) = W_{opt} + \exp(-\gamma R^t \times (G^+ G) t) [W(0) - W_{opt}], \quad (11)$$

где  $W_{opt} = [(R^t)^{-1} \times (G^+ G)^{-1} G^+] P$ . Здесь за  $W$  обозначен вектор-столбец размерности  $(L+L') \times (M+M')$ , составленный из столбцов матрицы  $W$ , вектор  $P$  аналогично составлен из столбцов матрицы  $P$ ,

\* О корректности такого способа усреднения и возможности учета корреляции см., например, [12].

\*\* Это предположение приближенно допустимо в случае, когда измерители и излучатели обладают хорошей направленностью или когда простая геометрия гасящей системы позволяет устранить влияние излучателей на измерители с помощью специального размещения их относительно друг друга (см., например, [13]).

Знак  $\times$  означает прямое (кронекеровское) произведение матриц. Поскольку  $R$  и  $(G^+ G)$  являются эрмитовыми положительно определенными матрицами [10, 14], решение (11) будет устойчивым при любом начальном значении  $\hat{W}(0)$ \*. Скорость сходимости компонент вектора  $W(t)$  к соответствующим компонентам вектора  $W_{\text{opt}}$  определяется произведениями собственных чисел матриц  $R$  и  $(G^+ G)$  [15].

Используя формулы (2), (4), (10), вычислим стационарное значение средней мощности остаточного поля:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}(PGW_{\text{opt}}) = \\ &= \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}[P^+ G (G^+ G)^{-1} G^+ PR^{-1}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Несложно увидеть, что в этом выражении шпур берется от положительно определенной матрицы, поэтому всегда  $J_{\min} < \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle$ , т. е. адаптивная система активного гашения действительно обеспечивает ослабление случайного поля в  $Q+Q'$  точках поверхности  $s_3$ .

Отметим некоторые особенности полученных решений, связанные с соотношением числа гасящих излучателей  $M+M'$  и числа контрольных измерителей  $Q+Q'$ . При  $M+M'=Q+Q'$  матрица Грина  $G$  становится квадратной, и если она невырожденная, то формулы (10), (12) существенно упрощаются:

$$W_{\text{opt}} = G^{-1} PR^{-1}; \quad (13)$$

$$J_{\min} = \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}(PR^{-1}P^+). \quad (14)$$

Отсюда видно, что минимальное значение функционала качества в этом случае не зависит от матрицы Грина. Следовательно, в точках размещения контрольных измерителей (в отличие от точек пространства, где этих измерителей нет) величина мощности остаточного поля не зависит от положения гасящих излучателей при фиксированных координатах первичных и вторичных измерителей. Более того, без ущерба для качества гашения поля в этих точках в квазистационарном режиме работы (когда адаптивная система успевает отслеживать изменения характеристик поля, геометрии поверхностей и др.) матрица  $G$  в уравнении алгоритма (7) может быть заменена произвольной неособой, например, единичной матрицей. Это означает, что при числе излучателей, равном числу контрольных измерителей, отпадает необходимость точного значения функции Грина реальной задачи, что в значительной мере облегчает синтез адаптивной системы.

**3. Анализ работы адаптивной системы при наличии волновой обратной связи.** Будем считать теперь, что часть компенсирующего излучения передается на вход системы гашения (первичные измерители) непосредственно по участку свободного пространства между поверхностями  $s_1$  и  $s_2$ . Исследуем решение уравнения (8) в этом случае.

Обозначая матрицу Грина волновой обратной связи через  $G_{o.c}$  (ее элементы получаются из формулы (4) заменой индекса  $q$  на индекс  $l$ , относящийся к поверхности  $s_1$ ), показания первичных измерителей можно записать в виде

$$u_{\text{вх}}(s_1) = u(s_1) + G_{o.c} f.$$

Используя соотношение (2), можно получить явное выражение для  $u_{\text{вх}}(s_1)$  через значения поля случайных источников  $u(s_1)$ :

\* Заметим, что это утверждение относится лишь к среднему значению вектора весовых коэффициентов. Более общие условия сходимости адаптивных алгоритмов приведены, например, в [10].

$$u_{\text{вх}}(s_1) = Hu(s_1), \quad (15)$$

где

$$H = (I + G_{o,c}W)^{-1}. \quad (16)$$

Уравнение (8) с учетом соотношения (15) преобразуется следующим образом:

$$dW/dt = \gamma G^+ (P - GWHR) H^+. \quad (17)$$

Поскольку  $H$  зависит от  $W$ , это уравнение является нелинейным относительно  $W$ .

Приравнивая нулю правую часть (17), получим в предположении невырожденности матриц  $R$  и  $H$  следующее уравнение для стационарного значения матрицы весовых коэффициентов:

$$W_{ct} = W_{opt} H_{ct}^{-1} = W_{opt} (I + G_{o,c} W_{ct}). \quad (18)$$

Разрешая уравнение (18) относительно  $W_{ct}$ , найдем явное выражение для стационарного значения матрицы весовых коэффициентов с учетом волновой обратной связи:

$$W_{ct} = (I - W_{opt} G_{o,c})^{-1} W_{opt}. \quad (19)$$

Выясним, каким требованиям должны удовлетворять параметры уравнения (17), чтобы его стационарное решение было устойчивым. Введем для этого матрицу  $w$  отклонения от стационарного решения

$$w = W - W_{ct}. \quad (20)$$

Считая норму матрицы  $w$  малой и разлагая выражение (16) для матрицы  $H$  в ряд с точностью до членов первого порядка малости, получим

$$H \approx (I - H_{ct} G_{o,c} w) H_{ct}. \quad (21)$$

Подставляя формулы (20) и (21) в (17) и оставляя только линейные по  $w$  члены, нетрудно прийти к следующему линеаризованному уравнению для отклонения весовых коэффициентов от стационарных значений:

$$dw/dt = -\gamma G^+ G (I - W_{opt} G_{o,c}) w H_{ct} R H_{ct}^+. \quad (22)$$

Так как эрмитовы матрицы  $(G^+ G)$  и  $(H_{ct} R H_{ct}^+)$  положительно определены [14], то можно показать [15], что для устойчивости уравнения (22) необходима положительная определенность матрицы

$$B = I - W_{opt} G_{o,c}. \quad (23)$$

Смысл полученного условия устойчивости поясним на примере простой аддитивной системы с одним весовым коэффициентом, используемой для гашения звукового поля точечного монохроматического источника со случайной амплитудой:

$$p(r) = p_0 e^{kr}/r, \quad r = |r(x, y, z)|. \quad (24)$$

Будем считать, что гасящая система представляет собой последовательно размещенные вдоль радиуса сферические волны (24) первичный монополь-измеритель, монополь-излучатель и вторичный монополь-измеритель, удаленные от случайного источника на расстояния  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  соответственно ( $r_1 < r_2 < r_3$ ). Заменяя в (5), (13) матрицы и векторы скалярными величинами, из формулы (23) несложно получить следующее условие устойчивости:

$$r_1(r_3 - r_2) \cos 2k((r_2 - r_1)) < r_3(r_2 - r_1). \quad (25)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, на устойчивость адаптивной системы гашения оказывает существенное влияние суммарный фазовый набег, приобретаемый сигналом при однократном прохождении кольца обратной связи. Однако даже при наименее благоприятных, с точки зрения устойчивости, фазовых соотношениях ( $k(r_2 - r_1) = n\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ) адаптивная система может быть устойчивой, если расстояния  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  удовлетворяют следующему из (25) неравенству:

$$1/r_1 - 1/r_2 > 1/r_2 - 1/r_3.$$

Это соотношение означает, что для устойчивости адаптивной системы элементы системы гашения необходимо расположить так, чтобы сферическая волна (24) при прохождении участка между первичным измерителем и компенсирующим излучателем затухала сильнее, чем при прохождении расстояния между компенсирующим излучателем и вторичным измерителем.

Для определения эффективности адаптивной системы гашения при наличии волновой обратной связи оценим величину функционала качества (3) в установившемся режиме работы:

$$\langle \varepsilon^+ \varepsilon \rangle = \langle [u^+(s_3) - u_{\text{вх}}^+(s_1) W_{\text{ct}}^+ G^+] [u(s_3) - G W_{\text{ct}} u_{\text{вх}}(s_1)] \rangle.$$

Используя уравнение (18), нетрудно получить отсюда следующую формулу для среднего квадрата ошибки компенсации:

$$\langle \varepsilon^+ \varepsilon \rangle = \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}(P_{\text{вх}}^+ G W_{\text{ct}}).$$

Подставляя вместо матрицы  $W_{\text{ct}}$  ее выражение из формулы (19) и учитывая, что  $P_{\text{вх}} = P H^+$ , получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon^+ \varepsilon \rangle &= \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}(H_{\text{ct}} P^+ G W_{\text{опт}} H_{\text{ct}}^{-1}) = \\ &= \langle u^+(s_3) u(s_3) \rangle - \text{Sp}(P^+ G W_{\text{опт}}). \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнивая это выражение с (14), легко увидеть, что величина средней мощности нескомпенсированного поля при использовании адаптивной системы регулирования весовых коэффициентов не зависит от наличия волновой обратной связи между излучателями и первичными измерителями. При этом интенсивности гасящих излучателей в системах без волновой обратной связи и при ее наличии оказываются одинаковыми, оптимальными в смысле минимума функционала (3):

$$f_{\text{ct}} = -W_{\text{ct}} u_{\text{вх}}(s_1) = -W_{\text{опт}} u(s_1). \quad (27)$$

Из (26) и (27) следует, что адаптивная система автоматически компенсирует влияние обратной связи путем соответствующего изменения весовых коэффициентов.

Таким образом, использование адаптивной системы для регулирования характеристик гасящих излучателей при активном гашении волновых полей позволяет существенно снизить требования к точности настройки и величине волновой обратной связи.

**4. Гашение плоской волны, прошедшей через хаотический экран.** В качестве примера рассмотрим двумерную задачу активного гашения случайных волн за плоским безграничным хаотическим экраном. Пусть на экран, расположенный в плоскости  $z=0$ , нормально падает плоская монохроматическая волна  $p(x, z, t) = \exp(i k z - i \omega t)$ ,  $z < 0$ . Предположим, что первичные измерители (монополи) расположены в плос-

кости  $z=0$  непосредственно за экраном эквидистанто на расстоянии  $d$  друг от друга и измеряют промодулированное поле  $p(x, 0)$  в  $L$  точках. Гасящие излучатели (диполи) для устранения обратной волновой связи, следуя [13], помещены также в плоскости  $z = 0$  в  $M'$ -точках, а  $Q$  вторичных измерителей (монополей) остаточного поля размещены в дальней зоне на плоскости  $z=z_0$ .

Для определенности будем считать, что число излучателей равно числу вторичных измерителей ( $M' = Q$ ). В этом случае выражения для матрицы оптимальных весовых коэффициентов  $W_{opt}$  и суммарной остаточной мощности имеют вид (13), (14). Чтобы получить аналитические выражения и сделать численные оценки эффективности работы адаптивной системы активного гашения, положим, например, что случайное поле в плоскости  $z=0$  (за хаотическим экраном) является статистически однородным с нулевым средним значением  $\langle p(x, 0) \rangle = 0$  и с экспоненциальной корреляционной функцией [9]

$$\Psi(x_1 - x_2; 0, 0) = \langle p(x_1, 0) p^*(x_2, 0) \rangle = \sigma_p^2 \exp(-|x_1 - x_2|/l_p), \quad (28)$$

где  $\sigma_p^2 = \langle |p(x, 0)|^2 \rangle$  — дисперсия, а  $l_p$  — радиус корреляции граничного поля.

Рассмотрим наиболее интересный для приложений случай крупномасштабных неоднородностей граничного поля ( $kl_p \gg 1$ ). Взаимная корреляционная функция между показаниями первичных и вторичных измерителей в этом случае может быть легко найдена в приближении Фраунгофера:

$$\begin{aligned} \Psi(x_1 - x_2; 0, z_0) &= \langle p(x_1, 0) p^*(x_2, z_0) \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi z_0}} \exp\left[-ik\left(z_0 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2z_0}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x'; 0, 0) \times \quad (29) \\ &\times \exp\left[-ik\frac{(x_1 - x_2)^T x'}{z_0}\right] dx' = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z_0}} \exp\left[-ik\left(z_0 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2z_0}\right)\right] \times \\ &\times 2\pi F_p[k(x_1 - x_2)/z_0], \end{aligned}$$

где  $F_p(\kappa_x) = \sigma_p^2 l_p / [\pi(1 + \kappa_x^2 l_p^2)]$  — пространственный спектр поля по координате  $x$  в плоскости  $z = 0$ .

Используя (28), (29), несложно найти выражения для корреляционных матриц  $P$  и  $R^{-1}$  [16]. Подставляя их в (14), можно получить минимальное значение функционала качества  $J_{min}$ , а также выражение для средней остаточной мощности случайного поля  $\langle |\epsilon(x_q, z_0)|^2 \rangle$  в точках расположения вторичных измерителей  $x_q$  ( $q=1, Q$ ) в плоскости  $z = z_0$ . Так, например, для нечетного числа  $L=2N+1$  симметрично расположенных первичных измерителей мощность остаточного поля в центре апертуры ( $x_q=0$ ) оказывается равной

$$\begin{aligned} \langle |\epsilon(0, z_0)|^2 \rangle &= \sigma_p^2 \left\{ 1 - \frac{4}{D_{l_p} \pi (1 - \rho^2)} \left[ \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{[1 + (m\alpha)^2]^2} \right) \times \right. \right. \\ &\times (1 + \rho^2) + \frac{2}{[1 + (m\alpha)^2]^2} - 4\rho \sum_{m=1}^N \frac{\cos[(2m-1)/D_d]}{[1 + (m\alpha)^2]^2} \left. \right] \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Здесь  $\rho = \exp(-\mu)$  — коэффициент корреляции показаний двух соседних первичных измерителей,  $\mu = d/l_p$  — отношение периода решетки первичных измерителей к радиусу корреляции,

$$D_{l_p} = 2z_0(kl_p^2)^{-1} \gg 1, \quad D_d = 2z_0(kl^2)^{-1} \quad (31)$$

— волновые параметры по отношению к радиусу корреляции граничного поля и к расстоянию между соседними измерителями соответственно,  $\alpha = kl_p d/z_0$  — безразмерный параметр, характеризующий относительную частоту заполнения апертуры первичными измерителями. Точная формула (30) для остаточной мощности в центре апертуры может быть существенно упрощена в практически наиболее интересном случае, когда расстояние между первичными измерителями  $d$  достаточно мало, а число их велико, так что\*

$$\alpha = 2d(l_p D_{l_p})^{-1} \ll 1, \quad N \gg 1. \quad (32)$$

В этом случае, заменяя суммы в (30) определенными интегралами, получим

$$\begin{aligned} \langle |\varepsilon(0, z_0)|^2 \rangle &= \sigma_p^2 \left\{ 1 - \frac{4}{\pi \mu (1 - \rho^2)} \left[ (1 + \rho^2) \int_0^\chi \frac{dx}{(1 + x^2)^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\rho \int_0^\chi \frac{\cos(\mu x) dx}{(1 + x^2)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\chi = kl_p D (2z_0)^{-1}$  — безразмерный параметр, а  $D = 2Nd$  — размер апертуры решетки первичных измерителей. В предельном случае достаточно большой апертуры, когда

$$\chi \gg 1, \quad (34)$$

из формулы (33) несложно найти

$$\langle |\varepsilon(0, z_0)|^2 \rangle = \sigma_p^2 [2 - \mu^{-1} + 2(e^{2\mu} - 1)^{-1}]. \quad (35)$$

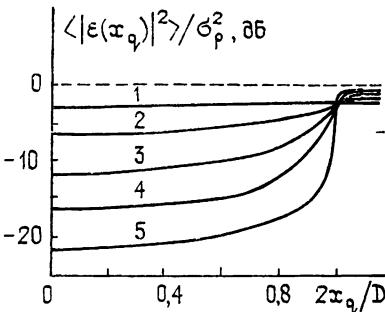
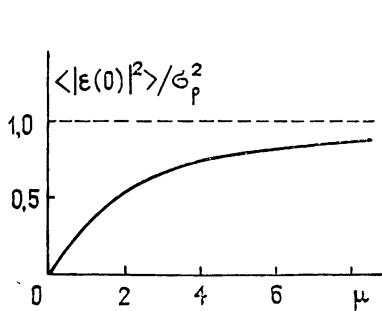


Рис. 1.

Рис. 2. Кривые 1 —  $\chi=1$ , 2 —  $\chi=3$ , 3 —  $\chi=10$ , 4 —  $\chi=30$ , 5 —  $\chi=100$ .

На рис. 1 показана зависимость средней относительной мощности остаточного поля в центре апертуры  $\langle |\varepsilon(0, z_0)|^2 \rangle / \sigma_p^2$  от параметра  $\mu$ . Как видно из графика, в пределе при  $\mu \rightarrow 0$  (частом заполнении решетки измерителей) происходит полная компенсация волнового поля.

Неравенство (34) с учетом (31) можно переписать в таком виде:

$$D/\sqrt{\lambda z_0} \gg \sqrt{\lambda z_0}/l_p \gg 1. \quad (36)$$

\* Поскольку волновой параметр  $D_{l_p} = 2z_0/(kl_p^2) \gg 1$ , то первое неравенство в (32) будет выполнено уже при  $d \leq l_p$ .

Отсюда видно, что рассмотренное приближение (формула (35)) соответствует дистанции  $z_0$ , отвечающей дальней зоне по отношению к размеру неоднородностей  $l_p$  и ближней зоне по отношению к размеру апертуры D, решетки первичных измерителей.

Аналогично, используя приближение (32), несложно найти выражение для остаточной мощности при произвольном значении координаты  $x_q$  вторичного измерителя:

$$\langle |\epsilon(x_q, z_0)|^2 \rangle = \sigma_p^2 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi \mu (1 - \rho^2)} \left[ (1 + \rho^2) \times \right. \right. \\ \times \int_{-\chi(1+2x_q/D)}^{\chi(1-2x_q/D)} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} - 2\rho \int_{-\chi(1+2x_q/D)}^{\chi(1-2x_q/D)} \frac{\cos(\mu x) dx}{(1 + x^2)^2} \left. \right] \left. \right\}. \quad (37)$$

Для аналитического исследования выражения (37) при произвольной апертуре решетки D предположим, что ее период заполнения d много меньше размера неоднородностей  $l_p$ , т. е.  $\mu = d/l_p \ll 1$ . Тогда с точностью до членов второго порядка малости по  $\mu$  получим асимптотическое выражение

$$\langle |\epsilon(x_q, z_0)|^2 \rangle = \sigma_p^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \chi \left( 1 - \frac{2x_q}{D} \right) + \operatorname{arctg} \chi \left( 1 + \frac{2x_q}{D} \right) \right] + \right. \\ + \mu^2 \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{12} \frac{1}{1 + 2x_q^2/D^2} - \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \left[ \operatorname{arctg} \chi \left( 1 - \frac{2x_q}{D} \right) + \operatorname{arctg} \chi \left( 1 + \frac{2x_q}{D} \right) \right] \right] \right\}, \quad (38)$$

справедливое при  $\mu\chi \leqslant \pi$ . На рис. 2 приведены зависимости относительной мощности остаточного поля от поперечной координаты вторичного измерителя  $x_q$ , построенные по формуле (38) в пренебрежении членами порядка  $\mu^2$ . Следуя [9], несложно показать, что формула (38) при  $\mu = 0$  дает интенсивность случайного поля за абсолютно непрозрачным экраном. Таким образом, используя адаптивную систему для управления активной решеткой излучателей, можно добиться в точках расположения вторичных измерителей такой же мощности, как при экранировании абсолютно непрозрачным экраном.

Полученные выше формулы (37), (38) позволяют проанализировать зависимость нескомпенсированного поля в точках расположения вторичных измерителей от параметров поля и адаптивной системы активного гашения. В то же время представляется весьма интересным исследовать структуру остаточного поля  $\epsilon(x, z_0)$  в произвольной точке плоскости  $z=z_0$  между вторичными измерителями. В стационарном режиме работы адаптивной системы выражение для  $\epsilon(x, z_0)$ , используя (4), можно записать, очевидно, в следующем виде:

$$\epsilon(x, z_0) = p(x, z_0) - g^T W_{\text{opt}} p(0),$$

где  $p(0) = \{p(x_1, 0), \dots, p(x_L, 0)\}^T$ ,  $g$  — вектор с компонентами  $g_m = (\partial/\partial z_m)[\exp(ik|r - r_m|)/(4\pi|r - r_m|)]$  (строка матрицы Грина). Отсюда несложно получить общее выражение для мощности остаточного поля в произвольной точке  $x$  в плоскости  $z=z_0$ :

$$\langle |\epsilon(x, z_0)|^2 \rangle = \langle |p(x, z_0)|^2 \rangle - \langle p(x, z_0) p^+(0) \rangle A^* - \\ - A^T \langle p(0) p^*(x, z_0) \rangle + A^T R A^*, \quad (39)$$

где  $A = W_{opt}^T g = (R^T)^{-1} P^T (G^T)^{-1} g$ . Анализ формулы (39) в общем случае произвольного числа  $Q$  вторичных измерителей довольно сложен, поскольку требует обращения как корреляционной матрицы  $R$ , так и матрицы Грина  $G$  размерности  $Q \times Q$ . Поэтому рассмотрим структуру остаточного поля в простейшем случае, когда имеется эквидистантная решетка из произвольного числа  $L$  первичных измерителей, один гасящий излучатель в точке с координатой  $x_1$  и один вторичный измеритель в точке с координатой  $x_2$ . Используя приближения (32), (36) и проводя элементарные, но довольно громоздкие вычисления, можно получить следующую зависимость мощности остаточного поля в плоскости  $z=z_0$  от координаты  $x$ :

$$\langle |\epsilon(x, z_0)|^2 \rangle = \sigma_p^2 \left\{ 1 - \right.$$

$$-\frac{2 \exp(-|x-x_2|/l_p) \cos[(k/2z_0)((x-x_1)^2 - (x_2-x_1)^2)]}{\mu(1-e^{-2\mu})} \times \quad (39a)$$

$$\times [1 - \mu e^{-2\mu} - (1 + \mu) \exp(-2\mu + 2|x-x_2|/l_p)] +$$

$$+ \frac{1 - e^{-2\mu} - 2\mu e^{-2\mu}}{\mu(1-e^{-2\mu})} + \frac{|x-x_2|}{l_p} (1 + \exp(-2\mu + 2|x-x_2|/l_p)) \left. \right\}$$

при  $|x-x_2| < d$ ;

$$\langle |\epsilon(x, z_0)|^2 \rangle = \sigma_p^2 \left\{ 1 - 2 \exp(-|x-x_2|/l_p) \cos \left[ \frac{k}{2z_0} ((x-x_1)^2 - (x_2-x_1)^2) \right] + \frac{1 - e^{-2\mu} - 2\mu e^{-2\mu}}{\mu(1-e^{-2\mu})} \right\} \quad (39b)$$

при  $|x-x_2| > d$ .

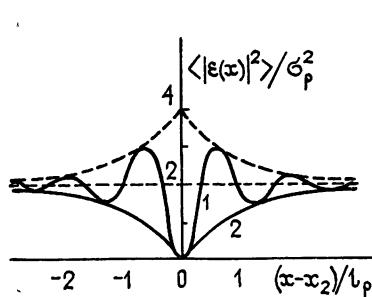


Рис. 3.

Рис. 3. Кривая 1 —  $(x_2 - x_1) = 3z_0\lambda/4l_p$ , 2 —  $x_1 = x_2$ .

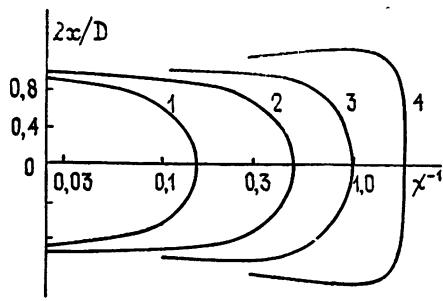


Рис. 4.

Рис. 4. Границы области тени за активной решеткой адаптивно управляемых излучателей (при  $\mu=d/l_p \ll 1$ ) для разных уровней компенсации  $c = \langle |\epsilon(x)|^2 \rangle / \sigma_p^2$ : 1 —  $c=0,1$ , 2 —  $c=0,3$ , 3 —  $c=0,51$ , 4 —  $c=0,7$ .

Легко увидеть, что формула (39a) при  $x=x_2$  переходит в (35). При частом расположении первичных измерителей, когда  $\mu=d/l_p \ll 1$ , из (39) несложно получить

$$\langle |\epsilon(x, z_0)|^2 \rangle = 2\sigma_p^2 \{ 1 - \exp(-|x-x_2|/l_p) \cos[k(x_2 - x_1)x - x_2]/z_0 \}.$$

На рис. 3 приведена зависимость мощности нескомпенсированного поля в плоскости  $z=z_0$  от поперечной координаты  $x$  при различном взаимном расположении вторичного измерителя (помещенного в точке

$(x_2, z_0)$ ) и гасящего излучателя (помещенного в точке  $(x_1, 0)$ ). Из приведенного графика видно, что в точке расположения вторичного измерителя мощность всегда равна нулю, а наибольшая область компенсации ( $\sim 2l_p$ ) получается, если излучатель расположен строго против измерителя ( $x_1 \approx x_2$ ). При  $|x_2 - x_1| > \lambda z_0/(4l_p)$  вблизи вторичного измерителя наблюдаются осцилляции интенсивности нескомпенсированного поля, которые, очевидно, являются следствием интерференции сферической волны гасящего излучателя и квазиплоской волны первичного случайного поля. На больших расстояниях от вторичного измерителя  $|x - x_2| \gg l_p$  поле гасящего излучателя складывается с первоначальным полем некогерентно, и интенсивность суммарного поля, как и следовало ожидать, удваивается.

Таким образом, рассмотренный пример показывает, что для эффективной компенсации случайного поля с помощью решетки аддитивно управляемых излучателей необходимо, чтобы периоды решеток первичных и вторичных измерителей были меньше радиуса корреляции  $l_p$ . Если первичные и вторичные измерители расположены достаточно плотно, то за активной решеткой излучателей образуется (в дальней зоне по отношению к  $l_p$ ) область тени, границы которой (см. рис. 4) для разных уровней компенсации могут быть приближенно определены по формуле (38).

В заключение авторы выражают свою глубокую признательность А. Н. Малахову за внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малюжинец Г. Д. — Труды Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 124.
2. Федорюк М. В. — Труды Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 169.
3. Завадская М. П., Попов А. В., Эгельский Б. Л. — Акуст. журн., 1975, 21, № 6, с. 882.
4. Коняев С. И., Лебедев В. И., Федорюк М. В. — Акуст. журн., 1979, 25, № 6, с. 887.
5. Мазаников А. А., Тюткин В. В. — Акуст. журн., 1976, 22, № 5, с. 729.
6. Мазаников А. А., Тюткин В. В., Уколов А. Т. — Акуст. журн., 1977, 23, № 3, с. 485.
7. Климон С. П. и др. — Акуст. журн., 1980, 26, № 1, с. 149.
8. Тартаковский Б. Д. — В сб.: Колебания, излучение и демпфирование упругих структур. — М.: Наука, 1977, с. 162.
9. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
10. Цыпкин Я. З. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.
11. Уидроу, Маккол. Болл. — ТИИЭР, 1975, 63, № 3, с. 49.
12. Мальцев А. А., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 7, с. 1401.
13. Урусовский И. А. — Акуст. журн., 1977, 23, № 2, с. 304.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1973.
15. Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969.
16. Мальцев А. А., Патронис Е. Т. — Изв. вузов. — Радиофизика, 1981, 24, № 3, с. 326.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
20 марта 1981 г.,  
после объединения  
29 октября 1981 г.

#### ADAPTIVE SYSTEM FOR ACTIVE SUPPRESSION OF RANDOM WAVE FIELDS

S. N. Arzamasov, A. A. Mal'tsev

An adaptive system is suggested for the active suppression of random wave fields. This system regulates automatically amplitudes of suppression radiators based on information from measures of the initial and uncompensated fields. An expression has been found for the mean power of the residual field. An effect is studied of the wave back coupling on the stability of the adaptive system and the efficiency of the random field suppression. As an example characteristics are considered of the adaptive system of the active suppression of a field of the plane wave passing through an infinite chaotic screen.