Том XXV, № 6 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538.56 : 519.25

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕРАСЦЕПЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ДАЙСОНА ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОДНОГРУППОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОНСЕРВАТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин

С помощью обобщенной формулы Фуруцу—Новикова выводится точное соотношение для произвольного статистического момента вектора состояния стохастической линейной динамической системы, имеющее вид нерасцепленного уравнения Дайсона. В предположении консервативности стохастической динамической системы с помощью нерасцепленного уравнения Дайсона получена строгая оценка погрешности уравнения Дайсона в одногрупповом приближении для гауссовых и пуассоновских флуктуаций параметров системы.

Исследованию линейных стохастических динамических систем уделяется в настоящее время значительное внимание. В первую очередь интересуются получением приближенных замкнутых уравнений для статистических моментов вектора состояния системы и выяснением границ применимости этих уравнений. Известно много различных подходов к составлению таких замкнутых уравнений. Среди них приближение Бурре [1] и его нелинейное обобщение Крейчнана [2], одногрупповое приближение [3, 4], усредненное по времени уравнение [5], диффузионное приближение [6, 7], приближения, получаемые обрыванием бесконечных цепочек уравнений [8–11].

При построении приближенных уравнений встает вопрос о погрешности, возникающей при переходе к рассматриваемому приближению. До сих пор строгие оценки такого рода погрешностей, записанные в виде неравенств, получены для одногруппового приближения [12] и усредненного по времени уравнения [13]. При этом, согласно [12], погрешность применения уравнения Дайсона в одногрупповом приближении к вычислению второго статистического момента вектора состояния имеет вид

$$(\tau_0/\tau_M)\, C(t/t_M), \quad C(x) = xe^x. \tag{1}$$

Здесь τ_0 — временной масштаб флуктуаций случайных параметров системы, τ_M и t_M имеют смысл оценок снизу для времени релаксации (или параметрической раскачки) системы. Погрешность (1) стремится к нулю при предельном переходе вида $\tau_0/\tau_M \to 0$, $t/t_M = \mathrm{const}$. Насколько быстро при этом малый параметр τ_0/τ_M должен стремиться к нулю, зависит от вида функции $C(x)$.

В данной работе с помощью обобщенной формулы Фуруцу — Новикова [14] строго показывается, что в случае стохастической консервативной динамической системы функция $C(x)$ в оценке вида (1) погрешности одногруппового приближения может быть заменена на $C(x) = x$.

1. НЕРАСЦЕПЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ДАЙСОНА

Исходим из стохастического уравнения

$$dz(t)/dt = [A + B\theta(t)]\, z(t), \quad t > t_0, \quad z(t_0) = z_0. \tag{1.1}$$

Здесь $z(t)$ — вектор состояния динамической системы с компонентами $z_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, A и B — постоянные неслучайные матрицы, $\theta(t)$ — случайная вещественная функция времени. Обозначим через $\rho(t)$ тензорное произведение вида

$$\rho(t) = \underbrace{z(t) \times \ldots \times z(t)}_{p} \times \underbrace{z^*(t) \times \ldots \times z^*(t)}_{q}, \quad p, q = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженному значению. Среднее $\langle \rho(t) \rangle$ по ансамблю реализаций случайной функции $\theta(t)$ дает статистический момент вектора состояния динамической системы. Дифференцируя (1.2) и используя (1.1), приходим к уравнению

$$d\rho(t)/dt = [\Lambda_0 + \theta(t)\Lambda]\, \rho(t), \quad t > t_0, \quad \rho(t_0) = \rho_0. \tag{1.3}$$

Матричные операторы Λ_0 и Λ, действующие на тензорное произведение (1.2), легко выражаются через матрицы A и B соответственно. Например,

$$\begin{gathered}\Lambda = \sum_{\alpha=1}^{p} \underbrace{I \times \ldots \times I}_{\alpha-1} \times B \times \underbrace{I \times \ldots \times I}_{p-\alpha+q} + \\ + \sum_{\beta=1}^{q} \underbrace{I \times \ldots \times I}_{p+\beta-1} \times B^* \times \underbrace{I \times \ldots \times I}_{q-\beta},\end{gathered} \tag{1.4}$$

где I — единичная матрица в пространстве векторов z.

Усредняем уравнение (1.3) по ансамблю. Возникающее при этом среднее $\langle \theta(t)\rho(t) \rangle$ преобразуем с помощью обобщенной формулы Фуруцу — Новикова [14]:

$$\begin{gathered}\langle \theta(t)\rho(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_k \langle \theta(t), \theta(t_1), \ldots, \theta(t_k) \rangle \times \\ \times \langle \delta^k \rho(t)/\delta\theta(t_1) \ldots \delta\theta(t_k) \rangle,\end{gathered} \tag{1.5}$$

где использованы кумулянтные скобки [15] для обозначения кумулянтных функций случайного процесса $\theta(t)$. Варьируя уравнение (1.3) по $\theta(\tau)$, получаем соотношение [9]

$$\frac{\delta\rho(t)}{\delta\theta(\tau)} = \begin{cases} U(t, \tau)\Lambda\rho(\tau), & t_0 \leqslant \tau \leqslant t \\ 0, & \tau < t_0, \quad \tau > t \end{cases}. \tag{1.6}$$

Здесь через $U(t, t')$ обозначен эволюционный оператор стохастического уравнения (1.3), удовлетворяющий уравнению

$$(d/dt)\, U(t, t') = [\Lambda_0 + \theta(t)\Lambda]\, U(t, t'), \quad U(t', t') = E, \tag{1.7}$$

где E — единичный оператор в пространстве величин (1.2).

Учитывая симметрию кумулянтных скобок и вариационных производных в (1.5) относительно перестановки аргументов $t_1, \ldots, t_k$ и используя соотношение (1.6), получаем

$$\langle \theta(t)\rho(t) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \langle \theta(t), \theta(t_1), \ldots, \theta(t_k) \rangle \times \tag{1.8}$$

$$\times \langle U(t, t_1)\Lambda U(t_1, t_2)\Lambda \dots U(t_{k-1}, t_k)\Lambda\rho(t_k)\rangle.$$

Обозначим *

$$\widetilde{M}(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} dt_1 \dots \int_{t'}^{t_{k-1}} dt_k \Lambda U(t, t_1)\Lambda U(t_1, t_2)\Lambda \dots$$
$$\dots \Lambda U(t_k, t')\Lambda \langle \theta(t), \theta(t_1), \dots, \theta(t_k), \theta(t')\rangle. \quad (1.9)$$

Тогда результат усреднения уравнения (1.3) принимает на основании (1.8), (1.9) вид

$$(d/dt)\langle \rho(t)\rangle = [\Lambda_0 + \langle \theta(t)\rangle\Lambda]\langle \rho(t)\rangle + \int_{t_0}^{t} dt' \langle \widetilde{M}(t, t')\rho(t')\rangle. \quad (1.10)$$

Полученное соотношение (1.10) является точным.

Выражение (1.9) по своей структуре весьма похоже на массовый оператор уравнения Дайсона в одногрупповом приближении [4], являясь, однако, случайным оператором. Соотношение (1.10) будем называть нерасцепленным уравнением Дайсона, имея в виду, что оператор $\widetilde{M}(t, t')$ входит в него под знаком среднего по ансамблю.

Из нерасцепленного уравнения Дайсона (1.10) естественным образом получаются некоторые приближенные уравнения для вычисления среднего $\langle \rho(t)\rangle$. Заменяя, например, в правой части равенства (1.9) эволюционный оператор $U(t, t')$ на значение $U_0(t, t')$, определяемое согласно

$$(d/dt)U_0(t, t') = [\Lambda_0 + \langle \theta(t)\rangle\Lambda]U_0(t, t'), \quad U_0(t', t') = E, \quad (1.11)$$

приходим к уравнению Дайсона в одногрупповом приближении с перенормированным значением массового оператора. Это уравнение имеет вид

$$(d/dt)\rho_{\text{п}}(t) = [\Lambda_0 + \langle \theta(t)\rangle\Lambda]\rho_{\text{п}}(t) + \int_{t_0}^{t} dt' M_{\text{п}}(t, t')\rho_{\text{п}}(t'); \quad (1.12)$$

$$M_{\text{п}}(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t'}^{t} dt_1 \dots \int_{t'}^{t_{k-1}} dt_k \Lambda U_0(t, t_1)\Lambda \dots \Lambda U_0(t_k, t')\Lambda \times$$
$$\times \langle \theta(t), \theta(t_1), \dots, \theta(t_k), \theta(t')\rangle. \quad (1.13)$$

Уравнение Дайсона в одногрупповом приближении из работы [4] для $\langle \rho(t)\rangle$ записывается как**

$$(d/dt)\rho_D(t) = [\Lambda_0 + \langle \theta(t)\rangle\Lambda]\rho_D(t) + \int_{t_0}^{t} dt' M(t, t')\rho_D(t'); \quad (1.14)$$

$$M(t, t') = M_{\text{п}}(t, t')\,|_{U_0(t, t')\to\exp[\Lambda_0(t-t')]}. \quad (1.15)$$

Его массовый оператор $M(t, t')$ получается из перенормированного массового оператора (1.13) заменой $U_0(t, t')$ на $\exp[\Lambda_0(t-t')]$. Уравнения Дайсона (1.12), (1.13) и (1.14), (1.15) служат для вычисления приближенных значений $\rho_{\text{п}}(t)$ и $\rho_D(t)$ статистического момента $\langle \rho(t)\rangle$.

---

* Нетрудно убедиться, что член с $k = 0$ в правой части (1.9) равен $\Lambda U(t, t')\Lambda\langle \theta(t), \theta(t')\rangle$.

** Заметим, что согласно (1.13) и (1.15) член с $\langle \theta(t)\rangle$ не включается в определение массового оператора $M(t, t')$ в отличие от [4, 12].

Пусть, далее, случайная функция $\theta(t)$ представляет собой пуассоновскую последовательность импульсов

$$\theta(t)=\sum_{j=1}^{n}\theta_0(t-\tau_j), \tag{1.16}$$

где центры импульсов τ_j распределены на оси времени статистически независимо со средней плотностью $n_1(\tau)$ и число n импульсов распределено по закону Пуассона. Подставляя в правую часть (1.9) известные кумулянтные функции [16, 17] пуассоновского процесса (1.16), находим

$$\widetilde{M}(t,\ t')=\int d\tau n_1(\tau)\ \widetilde{T}^{(\tau)}(t,\ t'); \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}T^{(\tau)}(t,\ t') &= \theta_0(t-\tau)\Lambda U(t,\ t')\Lambda\theta_0(t'-\tau)+\\ &+\theta_0(t-\tau)\Lambda\int_{t'}^{t}dt''U(t,\ t'')\widetilde{T}^{(\tau)}(t'',\ t').\end{aligned} \tag{1.18}$$

Оператор $\widetilde{T}^{(\tau)}(t,\ t')$ является случайным, так как в правую часть уравнения (1.18) входит случайный эволюционный оператор $U(t,\ t')$. Заменяя в этом уравнении $U(t,\ t')$ на $U_0(t,\ t')$ или $\exp[\Lambda_0(t-t')]$, получаем аналогичные уравнения для неслучайных операторов, которые обозначим $T^{(\tau)}_{\text{п}}(t,\ t')$ или $T^{(\tau)}(t,\ t')$ соответственно. При этом сумма

$$2\theta_0(t-\tau)\Lambda\delta(t-t')+T^{(\tau)}(t,\ t')$$

представляет собой, когда $\rho(t)\equiv z(t)$, оператор параметрического возбуждения динамической системы (1.1) одиночным импульсом $\theta_0(t-\tau)$, введенный в [16, 17] с помощью аналога уравнения Липпмана—Швингера. Массовые операторы в одногрупповом приближении с перенормировкой $M_{\text{п}}(t,\ t')$ или без перенормировки $M(t,\ t')$ выражаются через соответствующие операторы $T^{(\tau)}_{\text{п}}(t,\ t')$ или $T^{(\tau)}(t,\ t')$ соотношениями

$$\begin{bmatrix}M_{\text{п}}(t,\ t')\\ M(t,\ t')\end{bmatrix}=\int d\tau n_1(\tau)\begin{bmatrix}T^{(\tau)}_{\text{п}}(t,\ t')\\ T^{(\tau)}(t,\ t')\end{bmatrix}; \quad \begin{matrix}(1.19\text{а})\\ (1.19\text{б})\end{matrix}$$

аналогичными полученным в [16, 17].

Главное достоинство нерасцепленного уравнения Дайсона (1.10) заключается в том, что оно приводит естественным и коротким путем к строгой оценке в виде неравенства погрешности уравнения Дайсона в одногрупповом приближении при дополнительном условии консервативности стохастической динамической системы (1.1).

Консервативность динамической системы (1.1) означает сохранение со временем нормы $\|z(t)\|$ ее вектора состояния, определяемой с помощью скалярного произведения

$$\|z\|=\sqrt{(z,\ z)},\quad (z,\ z')=\sum_{j=1}^{N}z_jz_j'^{*}. \tag{1.20}$$

Это свойство эквивалентно антиэрмитовости матрицы $A+B\theta(t)$, для чего. в свою очередь, достаточна антиэрмитовость матриц A и B в отдельности:

$$A+A^{+}=0,\quad B+B^{+}=0. \tag{1.21}$$

Здесь знак «+» сверху указывает на переход к эрмитово сопряженной величине относительно скалярного произведения (1.20). По аналогии с (1.20) определяется скалярное произведение (ρ, ρ') и соответствующая ему норма в пространстве значений $\rho(t)$ величин вида (1.2). При этом из (1.21) следуют аналогичные свойства антиэрмитовости

$$\Lambda_0 + \Lambda_0^{+} = 0, \quad \Lambda + \Lambda^{+} = 0. \tag{1.22}$$

В силу консервативности системы (1.1) или, в частности, антиэрмитовости (1.22) случайный эволюционный оператор $U_0(t, t')$, удовлетворяющий уравнению (1.7), образует двухпараметрическое семейство унитарных операторов со свойствами [18] (стр. 311).

$$\begin{gathered} U(t, s)\, U(s, \tau) = U(t, \tau), \\ U(t, \tau) = [U(\tau, t)]^{-1} = U^{+}(\tau, t), \quad \|U(t, \tau)\| = 1. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Такими же свойствами обладают неслучайные эволюционные операторы $\exp[\Lambda_0(t-t')]$ и $U_0(t, t')$.

Получим оценку погрешности одногруппового приближения, считая случайную функцию $\theta(t)$ гауссовым или пуассоновским процессом.

2. ГАУССОВЫ ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Оцениваем погрешность уравнения Дайсона (1.12) с массовым оператором (1.13) в перенормированном приближении Бурре. Записывая на основании (1.7) интегральное уравнение для случайного эволюционного оператора $U(t, t')$ и принимая во внимание уравнение (1.11) для $U_0(t, t')$, получаем для разности между случайным массовым оператором $\widetilde{M}(t, t')$, определенным (1.9), и массовым оператором $M_{\text{п}}(t, t')$ в перенормированном приближении Бурре выражение

$$\begin{gathered} \widetilde{M}(t, t') - M_{\text{п}}(t, t') = \\ = \langle \theta(t), \theta(t') \rangle \Lambda \int_{t'}^{t} dt_1 U_0(t, t_1) \tilde{\theta}(t_1) \Lambda U(t_1, t') \Lambda. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь введено обозначение $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \langle \theta(t) \rangle$. Равенство (2.1) позволяет сравнить между собой решения нерасцепленного уравнения Дайсона (1.10) и уравнения Дайсона (1.12) с массовым оператором (1.13) в перенормированном приближении Бурре. Результат сравнения имеет вид

$$\begin{gathered} \langle \rho(t) \rangle - \rho_{\text{п}}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t'} dt_1 \langle \theta(t'), \theta(t'') \rangle U_{\text{п}}(t, t') \times \\ \times \Lambda U_0(t', t_1) \Lambda \langle \tilde{\theta}(t_1) U(t_1, t'') \Lambda U(t'', t_0) \rangle \rho_0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где через $U_{\text{п}}(t, t')$ обозначен эволюционный оператор уравнения Дайсона (1.12), (1.13). В правой части (2.2) уже выступает явно в подынтегральном выражении одна кумулянтная функция процесса $\theta(t)$. Для получения в явном виде еще одной кумулянтной функции преобразуем среднее, содержащее $\tilde{\theta}(t)$, по формуле Фуруцу—Новикова (1.5) с учетом соотношения (1.6). Тогда найдем

$$\langle \rho(t) \rangle - \rho_{\text{п}}(t) = \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t''}^{t'} dt_1 \langle \theta(t'), \theta(t'') \rangle U_{\text{п}}(t, t') \Lambda U_0(t', t_1) \times$$

$$\times \Lambda \left\{ \int_{t''}^{t_1} dt_2 \langle \theta(t_1), \theta(t_2) \rangle \langle U(t_1, t_2) \Lambda U(t_2, t'') \Lambda U(t'', t_0) \rangle + \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t''} dt_2 \langle \theta(t_1), \theta(t_2) \rangle \langle U(t_1, t'') \Lambda U(t'', t_2) \Lambda U(t_2, t_0) \rangle \right\} \rho_0.$$

Представление (2.3) является окончательным для получения искомой оценки. Вводим функции

$$m(t, t' \mid \alpha) = \alpha^2 \mid \langle \theta(t), \theta(t') \rangle,$$
$$\overline{m}(\tau \mid \alpha) = \sup_{\{t\}} m(t, t - \tau \mid \alpha) \tag{2.4}$$

и полагаем

$$1/\tau_M = \int_0^\infty d\tau \, \overline{m}(\tau \mid \alpha); \tag{2.5}$$

$$\tau_0 = \int_0^\infty d\tau \, \tau \overline{m}(\tau \mid \alpha) \Big/ \int_0^\infty d\tau \, \overline{m}(\tau \mid \alpha). \tag{2.6}$$

При этом постоянная α выбирается согласно неравенству

$$\| \Lambda \| \leqslant \alpha, \quad \alpha = (p + q) \| B \|, \tag{2.7}$$

следующему из (1.4). Норма эволюционного оператора $U_п(t, t')$ уравнения Дайсона (1.12), (1.13) не превосходит, как показывается в Приложении, единицы:

$$\| U_п(t, t') \| \leqslant 1, \quad t \geqslant t'. \tag{2.8}$$

Норма среднего по ансамблю от произведения операторов под знаком, например, первого интеграла в фигурной скобке правой части равенства (2.3) оценивается как

$$\| \langle U(t_1, t_2) \Lambda U(t_2, t'') \Lambda U(t'', t_0) \rangle \| \leqslant \alpha^2. \tag{2.9}$$

Здесь мы воспользовались свойством унитарности (1.23) случайного эволюционного оператора $U(t, t')$, неравенством (2.7) и неравенством общего характера

$$\| \langle f \rangle \| = \| \int P(d\omega) f(\omega) \| \leqslant \int P(d\omega) \| f(\omega) \| = \langle \| f \| \rangle, \tag{2.10}$$

где $f(\omega)$ — векторная или операторная функция случайного аргумента с распределением вероятностей $P(d\omega)$. На основании (2.4)—(2.9), принимая во внимание свойство унитарности оператора $U_0(t, t')$, из (2.3) получаем

$$\| \langle \rho(t) \rangle - \rho_п(t) \| / \| \rho_0 \| \leqslant \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' m(t', t'' \mid \alpha) \times$$
$$\times \int_{t''}^{t'} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 m(t_1, t_2 \mid \alpha) \leqslant (\tau_0/\tau_M)(t - t_0)/\tau_M. \tag{2.11}$$

Погрешность уравнения Дайсона (1.14) в обычном приближении Бурре (1.15) оценивается с помощью аналогичных вычислений, и получаемая при этом оценка имеет вид*

$$\| \langle \rho(t) \rangle - \rho_D(t) \| / \| \rho_0 \| \leqslant (\tau_0/\tau_M)(t - t_0)/t_M, \tag{2.12}$$

---

* Идея о существовании линейной по времени оценки погрешности одногруппового приближения для стохастических консервативных линейных динамических систем принадлежит Г. Н. Бочкову и А. А. Дубкову.

где временной масштаб $t_{\text{М}}$ определяется согласно

$$\frac{1}{t_{\text{М}}} = \frac{1}{t_{\text{М}1}} + \frac{1}{\tau_{\text{М}}}, \qquad \frac{1}{t_{\text{М}1}} = \sup_{\{t\}} m_1(t\,|\,\alpha), \quad m_1(t\,|\,\alpha) = \alpha\,|\langle \theta(t) \rangle|. \tag{2.13}$$

3. ПУАССОНОВСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Оценим погрешность обычного одногруппового приближения (1.14) в случае пуассоновских флуктуаций (1.16) параметров динамической системы (1.1), когда массовый оператор $M(t, t')$ (1.15) преобразуется к виду (1.19б).

Вводим операторы $U^{(\tau)}(t, t')$ и $U_0^{(\tau)}(t, t')$, определяемые уравнениями

$$(d/dt)\,U^{(\tau)}(t, t') = [\Lambda_0 + \theta(t)\Lambda + \theta_0(t-\tau)\Lambda]\,U^{(\tau)}(t, t'), \qquad U^{(\tau)}(t', t') = E; \tag{3.1}$$

$$(d/dt)\,U_0^{(\tau)}(t, t') = [\Lambda_0 + \theta_0(t-\tau)\Lambda]\,U_0^{(\tau)}(t, t'), \qquad U_0^{(\tau)}(t', t') = E. \tag{3.2}$$

С помощью уравнения (1.18) для случайного оператора $\tilde{T}^{(\tau)}(t, t')$ и аналогичного уравнения для $T^{(\tau)}(t, t')$ можно получить следующее представление:

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}^{(\tau)}(t, t') \\ T^{(\tau)}(t, t') \end{bmatrix} = \theta_0(t-\tau)\Lambda \begin{bmatrix} U^{(\tau)}(t, t') \\ U_0^{(\tau)}(t, t') \end{bmatrix} \Lambda\theta_0(t'-\tau). \tag{3.3}$$

Записываем на основании (3.1) и (3.2) интегральное уравнение для $U^{(\tau)}(t, t')$ и принимаем во внимание соотношения (3.3). Это дает для разности между случайным массовым оператором (1.17) и массовым оператором в одногрупповом приближении (1.19б) выражение

$$\tilde{M}(t, t') - M(t, t') = \int d\tau\, n_1(\tau) \int_{t'}^{t} dt_1\, \theta_0(t-\tau)\Lambda U_0^{(\tau)}(t, t_1) \times \Lambda\theta(t_1) U^{(\tau)}(t_1, t')\Lambda\theta_0(t'-\tau). \tag{3.4}$$

Оно позволяет сравнить между собой решения нерасцепленного уравнения Дайсона (1.10) и уравнения Дайсона (1.14) с массовым оператором (1.19б) в одногрупповом приближении. Результат сравнения имеет вид

$$\langle \rho(t) \rangle - \rho_D(t) = \int d\tau\, n_1(\tau) \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t''}^{t'} dt_1 U_D(t, t') \times \theta_0(t'-\tau)\theta_0(t''-\tau)\Lambda U_0^{(\tau)}(t', t_1)\Lambda \langle \theta(t_1) U^{(\tau)}(t_1, t'')\Lambda U(t'', t_0) \rangle \rho_0, \tag{3.5}$$

где через $U_D(t, t')$ обозначен эволюционный оператор уравнения Дайсона (1.14), (1.19б). В правой части равенства (3.5) среднее раскрываем с помощью обобщенной формулы Фуруцу — Новикова (1.5) и соотношения типа (1.6). После преобразований получаем

$$\langle \rho(t) \rangle - \rho_D(t) = \int d\tau\, n_1(\tau) \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t''}^{t'} dt_1 U_D(t, t') \times$$

$$\times\, \theta_0(t'-\tau)\theta_0(t''-\tau)\Lambda U_0^{(\tau)}(t', t_1)\Lambda \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{s} \int_{t''}^{t_1} d\tau_1 \ldots \int_{t''}^{\tau_{k-1}} d\tau_k \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t''} d\tau_{k+1} \ldots \int_{t_0}^{\tau_{s-1}} d\tau_s \langle \theta(t_1),\ \theta(\tau_1), \ldots,\ \theta(\tau_s) \rangle \langle U^{(\tau)}(t_1,\ \tau_1)\Lambda \ldots \tag{3.6}$$

$$\ldots U^{(\tau)}(\tau_k,\ t'')\Lambda U(t'',\ \tau_{k+1})\Lambda \ldots U(\tau_{s-1},\ \tau_s)\Lambda U(\tau_s,\ t_0) \rangle \rho_0.$$

В силу условий антиэрмитовости (1.22) операторы $U^{(\tau)}(t,\ t')$ и $U_0^{(\tau)}(t,\ t')$ образуют двухпараметрические семейства унитарных операторов со свойствами (1.23), и их нормы равны единице. Норма эволюционного оператора $U_D(t,\ t')$ не превосходит единицы (см. Приложение):

$$\| U_D(t,\ t') \| \leqslant 1, \quad t \geqslant t'. \tag{3.7}$$

Возьмем норму от обеих частей равенства (3.6). Используя свойства (2.10), (3.7), условие унитарности (1.23) для $U(t,\ t')$, $U^{(\tau)}(t,\ t')$, $U_0^{(\tau)}(t,\ t')$ неравенство (2.7) и симметричность кумулянтных функций, получаем

$$\begin{gathered} \| \langle \rho(t) \rangle - \rho_D(t) \| / \| \rho_0 \| \leqslant \\ \leqslant \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' m(t',\ t'' \,|\, \alpha) \int_{t''}^{t'} dt_1 \left[m_1(t_1 \,|\, \alpha) + \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, m(t_1,\ t_2 \,|\, \alpha) \right]. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Здесь положено

$$\begin{gathered} m_1(t \,|\, \alpha) = \alpha\, G_1(t), \\ m(t,\ t' \,|\, \alpha) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha^{s+2} \int_{t'}^{t} dt_1 \ldots \int_{t'}^{t_{s-1}} dt_s G_{s+2}(t,\ t_1, \ldots,\ t_s,\ t'), \end{gathered} \tag{3.9}$$

а функции $G_s(t_1,\ \ldots,\ t_s)$ оценивают кумулянтные функции пуассоновского процесса (1.16) согласно

$$|\langle \theta(t_1), \ldots,\ \theta(t_s) \rangle| \leqslant G_s(t_1, \ldots,\ t_s) = \overline{n_1} \int d\tau\, |\theta_0(t_1 - \tau)| \ldots |\theta_0(t_s - \tau)|,$$

$$\overline{n_1} = \sup_{\{t\}} n_1(t).$$

Правая часть (3.8) выглядит аналогично правой части первого неравенства (2.11). Поэтому, определяя величины τ_M, τ_0 и τ_M равенствами вида (2.5), (2.6) и (2.13), окончательно находим

$$\| \langle \rho(t) \rangle - \rho_D(t) \| / \| \rho_0 \| \leqslant (\tau_0/\tau_M)(t - t_0)/t_M, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{gathered} \frac{1}{\tau_M} \leqslant \overline{n_1} \beta^2 e^\beta, \quad \frac{1}{t_M} \leqslant \overline{n_1} \beta e^\beta, \quad \frac{\tau_0}{\tau_M} \leqslant \tau_и \overline{n_1} \beta^2 e^\beta, \\ \beta = \alpha \int d\tau\, |\theta_0(\tau)|, \quad \tau_и = \int d\tau\, |\tau|\, |\theta_0(\tau)| \Big/ \int d\tau\, |\theta_0(\tau)|. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Оценка (3.10) аналогична (2.12). В (3.11) параметр β характеризует величину воздействия одиночного импульса, $\tau_и$ — длительность импульса.

Погрешность уравнения Дайсона (1.12) в одногрупповом приближении с перенормированным значением массового оператора (1.19а) оценивается аналогично, и в итоге получается из оценки (3.10) путем формальной замены t_M на τ_M в ее правой части.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В рассмотренных стохастических динамических системах, удовлетворяющих условиям консервативности (1.21), сохраняется сумма диагональных элементов (след) матрицы плотности $\rho^{(2)}_{kl} = z_k(t) z^*_l(t)$ согласно

$$\sum_{k=1}^{N} \rho^{(2)}_{kk}(t) = \text{const}. \tag{4.1}$$

Это говорит о том, что в подобного рода системах может происходить процесс релаксации к некоторому стационарному состоянию. Такой процесс описывается кинетическим уравнением для величин $w_k = \langle \rho^{(2)}_{kk} \rangle$ и характеризуется временем релаксации τ_r. Рассмотрение конкретных систем показывает, что величина $\tau^{(2)}_{\mathrm{M}}$, определенная (2.5) при $p=q=1$ является оценкой снизу для времени релаксации $\tau_r \geqslant \tau^{(2)}_{\mathrm{M}}$. Существенно, что эта оценка достаточно удовлетворительна в том смысле, что отношение $\tau_r/\tau^{(2)}_{\mathrm{M}}$ не зависит от параметра малости случайной функции $\theta(t)$ или от плотности импульсов в равенстве (1.16)*.

Согласно разд. 2 и 3 погрешность уравнения Дайсона в одногрупповом приближении для матрицы плотности динамической системы растет со временем не быстрее, чем линейно в зависимости от $t/\tau^{(2)}_{\mathrm{M}}$, $t_0 \equiv 0$. Поэтому, если процесс релаксации к стационарному состоянию происходит экспоненциально быстро в зависимости от t/τ_r, то одногрупповое приближение с удовлетворительной точностью может описывать этот процесс.

В качестве иллюстрации к сделанному выводу рассмотрим процесс релаксации к равнораспределению населенностей в двухуровневой молекулярной системе под действием резонансного стохастического электромагнитного излучения, испытывающего стационарные гауссовы флуктуации. В электродипольном приближении в уравнении (1.1) (см., например, [19])

$$\theta(t) = \mathscr{E}(0, t), \quad B_{kl} = (i/\hbar)(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e})_{kl}, \tag{4.2}$$

где $\mathscr{E}(0, t)$ — величина напряженности электрического поля в центре молекулы, $\boldsymbol{d}$ — ее дипольный момент, $\boldsymbol{e}$ — вектор поляризации волны. Исходим из уравнения Дайсона разд. 1 с массовым оператором в перенормированном приближении Бурре. При этом перенормировка означает точный учет сдвига энергетических уровней под действием постоянного электрического поля $\langle \mathscr{E} \rangle$. Полагаем

$$A + \langle \mathscr{E} \rangle B = \begin{pmatrix} i\omega_1 & 0 \\ 0 & i\omega_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_k = -E_k/\hbar, \tag{4.3}$$

где E_k — смещенные уровни энергии. Усредняя по времени исходное уравнение Дайсона в перенормированном приближении Бурре, приходим, согласно [12], к кинетическому уравнению

$$dw_k/dt = \sum_{j=1}^{2} W_{kj}(w_j - w_k), \quad k = 1, 2 \tag{4.4}$$

с вероятностями перехода

$$W_{kj} = 2\,|B_{kj}|^2 \int_0^\infty dt \,\langle \theta(t), \theta(0) \rangle \cos \omega_{kj} t, \tag{4.5}$$

* Заметим здесь, что кинетическое уравнение получается усреднением по времени уравнения Дайсона в одногрупповом приближении [12, 16], что приводит к дополнительной по сравнению с этим приближением погрешности. Мы здесь не оцениваем эту дополнительную погрешность.

$$\omega_{kj} = \omega_k - \omega_j.$$

Решение (4.4) дает

$$[w_1(t) - 0{,}5]/[w_1(0) - 0{,}5] = \exp(-2t/\tau_r),$$
$$w_1(t) + w_2(t) = 1, \quad 1/\tau_r = W_{12}. \tag{4.6}$$

Пусть

$$\langle \theta(t),\ \theta(0) \rangle = \langle \mathscr{E}^2 \rangle \exp(-|t|/\tau_0^*) \cos\omega t, \quad \omega\tau_0^* \gg 1, \tag{4.7}$$

тогда при условии точного резонанса, $\omega = \omega_{12}$, получаем

$$1/\tau_r = |B_{12}|^2 \langle \mathscr{E}^2 \rangle \tau_0^* [1 + (4\omega^2 \tau_0^*)^{-1}],$$
$$1/\tau_M^{(2)} \leqslant 4 \| B \|^2 \langle \mathscr{E}^2 \rangle \tau_0^*, \tag{4.8}$$
$$\tau_0/\tau_M^{(2)} \leqslant 4 \| B \|^2 \langle \mathscr{E}^2 \rangle \tau_0^{*2},$$

$$\Delta_2 \equiv \frac{\tau_0}{\tau_M^{(2)}} \frac{t}{\tau_M^{(2)}} = \frac{\tau_0}{\tau_M^{(2)}} \frac{\tau_r}{\tau_M^{(2)}} \frac{t}{\tau_r}.$$

Как видно из (4.8), погрешность Δ_2 приближения Бурре (2.11) порядка величины $\Delta_2 \sim (d_2 \langle \mathscr{E}^2 \rangle \tau_2^{*2}/\hbar^2)(t/\tau_r)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что норма эволюционного оператора $U_п(t, t')$ уравнения Дайсона (1.12) с массовым оператором в перенормированном приближении Бурре (1.13) и норма оператора $U_D(t, t')$ уравнения Дайсона (1.14) в одногрупповом приближении с массовым оператором (1.19 б) не превосходит единицы.

а) Гауссовы флуктуации параметров. Продифференцируем по t скалярное произведение $(\rho_п(t),\ \rho_п(t))$ и воспользуемся уравнением (1.14) и условиями антиэрмитовости (1.22). Получим

$$(d/dt)(\rho_п(t),\ \rho_п(t)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt' [(M_п(t,\ t')\rho_п(t'),\ \rho_п(t)) + (\rho_п(t),\ M_п(t,\ t')\rho_п(t'))]. \tag{П.1}$$

Массовый оператор (1.13) в приближении Бурре запишем, используя условия (1.22) и (1.23), в следующем виде:

$$M_п(t,\ t') = -\langle \tilde{\theta}(t) \cdot \tilde{\theta}(t') \rangle [U_0(0,\ t)\Lambda]^+ [U_0(0,\ t')\Lambda]. \tag{П.2}$$

Обозначим через $\tilde{S}(t)$ случайный оператор

$$\tilde{S}(t) = \tilde{\theta}(t) U_0(0,\ t)\Lambda. \tag{П.3}$$

Тогда массовый оператор $M_п(t, t')$ записывается в виде

$$M_п(t,\ t') = -\langle \tilde{S}^+(t) \tilde{S}(t') \rangle. \tag{П.4}$$

Теперь интегрируем соотношение (П.1) по времени от t_0 до t и подставляем в него выражение (П.4):

$$\|\rho_п(t)\|^2 - \|\rho_0\|^2 = -\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [\langle (\tilde{S}^+(t')\tilde{S}(t'')\rho_п(t''),\ \rho_п(t')) \rangle +$$

$$+ \langle (\rho_п(t'), \tilde{S}^+(t')\tilde{S}(t'')\rho_п(t'')) \rangle]. \qquad (П.5)$$

Меняя в одном из слагаемых порядок интегрирования и переобозначая в нем переменные интегрирования, получаем соотношение

$$\|\rho_п(t)\|^2 - \|\rho_0\|^2 = -\left\langle \left\| \int_{t_0}^{t} dt' \tilde{S}(t')\rho_п(t') \right\|^2 \right\rangle \leqslant 0. \qquad (П.6)$$

Отсюда, в силу определения нормы оператора, сразу следует искомое неравенство (2.8).

б) Пуассоновские флуктуации параметров. В силу условий унитарности (1.23), справедливых и для оператора $U_0^{(\tau)}(t, t')$, определенного уравнением (3.2), и условия антиэрмитовости (1.22), оператор $T^{(\tau)}(t, t')$, определенный согласно (3.3), обладает свойством

$$[T^{(\tau)}(t, t')]^+ = T^{(\tau)}(t', t). \qquad (П.7)$$

Для производной по t от скалярного произведения $(\rho_D(t), \rho_D(t))$ справедливо равенство вида (П. 1). Интегрируя его по времени, подставляем $M(t, t')$ в форме (1.19б) и, используя свойство (П.7), приходим к равенству

$$\|\rho_D(t)\|^2 - \|\rho_0\|^2 = \int d\tau\, n_1(\tau) \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' (\rho_D(t'), T^{(\tau)}(t', t'')\rho_D(t'')). \qquad (П.8)$$

Используя свойства (1.23) для $U_0^{(\tau)}(t, t')$, приводим оператор $T^{(\tau)}(t, t')$ (3.3) к виду

$$T^{(\tau)}(t, t') = -\theta_0(t-\tau)[U_0^{(\tau)}(0, t)\Lambda]^+ \theta_0(t'-\tau)[U_0^{(\tau)}(0, t')\Lambda]. \qquad (П.9)$$

Используя это соотношение в (П.8), получаем

$$\|\rho_D(t)\|^2 - \|\rho_0\|^2 =$$
$$= -\int d\tau\, n_1(\tau) \left\| \int_{t_0}^{t} dt' \theta_0(t'-\tau) U_0^{(\tau)}(0, t')\Lambda\rho_D(t') \right\|^2 \leqslant 0. \qquad (П.10)$$

Из этого соотношения следует искомое неравенство (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourret R. C. — Canad. J. Phys., 1965, **43**, № 4, p. 619.
2. Kraichnan R. H. — J. Math. Phys., 1961, **2**, № 1, p. 124.
3. Финкельберг В. М.— ЖЭТФ, 1967, **53**, вып. 1(7), с. 401.
4. Барабаненков Ю. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 7, с. 981.
5. Papanicolaou G. C., Keller J. B. — SIAM, J. Appl. Math., 1971, **21**, № 2, p. 287.
6. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — УФН, 1973, **110**, вып. 4, с. 499.
7. Кляцкин В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 10, с. 1454.
8. Малахов А. Н., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 2, с. 202.
9. Музычук О. В. — ТМФ, 1976, **28**, № 3, с. 371.
10. Дубков А. А., Музычук О. В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 6, с. 901.
11. Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1279.
12. Барабаненков Ю. Н., Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 3, с. 373.
13. Papanicolaou G. C., Varadhan S. R. S. — Commun. Pure Appl. Math., 1973, **26**, № 4, p. 497.
14. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — ТМФ, 1973, **17**, № 2, с. 273.

15. Малахов А. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 11, с. 1736.
16. Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 10, с. 1516.
17. Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 3, с. 377.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. — Т. 2. — М.: Наука, 1978.
19. Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 1, с. 116.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 17 марта 1981 г.

THE USE OF NON-UNLINKED EQUATION OF DYSON TYPE FOR ESTIMATION OF THE ACCURACY OF ONE-GROUP APPROXIMATION IN THE THEORY OF STOCHASTIC CONSERVATIVE DYNAMIC SYSTEMS

Yu. N. Barabanenkov, M. I. Kalinin

By the generalized Furuzu — Novikov formula an accurate relation is derived for an arbitrary statistical moment of the statement vector of a stochastic linear dynamic system being of the form of the non-unlinked Dyason equation. In the assumption of conservativity of the stochastic dynamic system, the non-unlinked Dyason equation is used to obtain a strict estimation of the Dyason equation error in one-group approximation for Gaussian and Poisson fluctuations of the system parameters.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Летохов В. С. Нелинейные селективные фотопроцессы в атомах и молекулах.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1982.—20 л.

В книге впервые в литературе систематически изложены основы методов селективного воздействия лазерным излучением на вещество и их основных применений. В первых двух вводных главах рассмотрены принципы селективного воздействия лазерным излучением на атомы и молекулы. Затем в трех главах рассмотрены процессы селективной фотоионизации атомов и молекул, фотодиссоциации молекул при нелинейном (многоступенчатом и/или многофотонном) возбуждении. В последних трех главах рассмотрены применения методов для разделения изотопов, детектирования одиночных атомов и молекул, в химическом лазерном синтезе и фотобиохимии.

Книга для физиков, химиков, биофизиков — научных работников, инженеров, аспирантов, студентов старших курсов.

Виленский И. М., Ямпольский В. С. Распространение средних радиоволн в ионосфере. / Ин-т геол. и геофиз. СО АН СССР.— Новосибирск: Наука, 1982.— 9 л.

В монографии рассматриваются результаты экспериментальных, теоретических исследований «линейного» распространения средних радиоволн в ионосфере; проблемы наклонного зондирования ионосферы в СВ-диапазоне; применения средних радиоволн для диагностики нижней ионосферы. Показывается распространение мощных радиоволн, когда нелинейные эффекты в ионосфере начинают играть существенную роль (кросмодуляция, самовоздействие и т. д.).

Для специалистов — радиофизиков и радиоинженеров.
