

**Российская Советская Федеративная
Социалистическая Республика**



**60
ЛЕТ
СССР**

УДК 537.86 : 530.182; 536—12.

**СЛОЖНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ
В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ***

Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед

(Обзор)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

2. Автоколебательные волны

2.1. Выбор модели

2.2. Одномерные автоколебательные волны

2.3. Двумерные автоколебательные волны

2.4. Нестационарные автоколебательные режимы

3. Стационарные диссипативные структуры

4. Распределенная триггерная система

5. Топологические инварианты

Приложение 1

Простая динамическая система со стохастическим поведением.

Приложение 2

Теория возмущений для нелинейного уравнения Шредингера в бессолитонном секторе

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время быстро развивается теория нелинейных процессов в существенно неравновесных системах [1]. В качестве примеров можно указать автоволновые химические реакции Белоусова — Жаботинского [2], радиофизические системы с распределенными параметрами [3], различные гидродинамические режимы, например течение Куэтта [4], расслоенную твердотельную плазму [5], математические модели биофизики [6, 7], процессы нестационарного безгазового [8, 9] и газового [10] горения, нестационарное лазерное испарение [11]. При всем разнообразии конкретных физических систем, в которых наблюдаются эти процессы, их теоретическое описание имеет ряд важных общих свойств. Каждая из систем обладает тривиальным равновесным состоянием, которое при некоторых условиях теряет свою устойчивость. Известно, что в замкнутой системе, где могут происходить какие-либо превращения, например химические реакции, но в остальном молекулы не взаимодействуют между собой, равновесное состояние единственно и устойчиво [12]. Таким образом, причиной неустойчивости может быть незамкнутость системы и (или) ее неидеальность (взаимодействие определенного типа молекул или отдельных элементов системы). В результате потери устойчивости равновесного состояния система переходит в некоторое неравновесное состояние, устойчивость которого поддерживается за счет непрерывно протекающих диссипатив-

* Материалы обзорной статьи доложены на VI Всесоюзной школе по нелинейным волнам, Горький, 1980.

ных процессов, в связи с чем структуры, которыми обладают неравновесные состояния, называются обычно диссипативными структурами. Типичным примером того, как причиной потери устойчивости может быть взаимодействие, является превращение однородного вещества в смесь двух фаз. Вспомним уравнение Ван-дер-Ваальса. При температуре ниже критической в определенном интервале плотности однородное вещество становится неустойчивым.

При этом можно выделить область состояний, неустойчивых относительно малых возмущений, и области метастабильных состояний. Позже феноменологическую теорию фазовых переходов второго рода развил Л. Д. Ландау. Ниже в статье будет показана глубокая аналогия между термодинамической теорией равновесных неидеальных систем и кинетической теорией идеальных неравновесных (диссипативных) систем. Итак, обратимся к последним.

Типичной является ситуация, когда тривиальное равновесное состояние распределенной системы однородно, т. е. обладает наиболее

высокой симметрией, а устойчивая диссипативная структура (ДС) неоднородна. Зачастую переход в устойчивое неравновесное состояние сопровождается спонтанным нарушением симметрии. Симметрия уравнений обеспечивает симметрию решения лишь в том случае, когда решение единственное. Если число решений больше одного, то симметрия уравнений обеспечивает лишь наличие группы преобразований симметрии, переводящих решения друг в друга, и система может выбрать одно из них (и тем

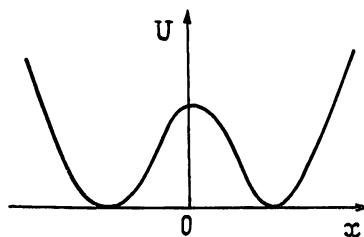


Рис. 1. Типичная потенциальная кривая, приводящая к спонтанному нарушению симметрии.

самым стать несимметричной) в зависимости от предыстории. Типичная ситуация спонтанного нарушения симметрии показана на рис. 1.

Однако теория неравновесных систем богаче теории неидеальных равновесных систем. В неравновесной ситуации с постоянным подводом энергии могут осуществляться состояния, стационарные лишь в среднем, меняющиеся периодически или даже стохастически (странный аттрактор) со временем. Стационарное, не зависящее от времени состояние может оказаться неустойчивым.

Очевидно, что в равновесной системе такое поведение невозможно. Впрочем, в построении аналогии можно сделать еще один шаг. Пусть мы имеем дело с неравновесной системой, в которой происходят строго периодические колебания. Состояние в каждой точке и в каждый момент времени характеризуется амплитудой и фазой. Но в теории конденсированного состояния мы встречаемся с веществами, локальное состояние которых характеризуется векторной (а не скалярной) величиной. Примером являются жидкие кристаллы. Направление вектора в двумерном жидкокристалле можно уподобить фазе колебаний. Так возникает аналогия между дисклинациями в жидких кристаллах и поведением некоторых распределенных динамических систем. Однако эта аналогия ограничена. Мы не видим равновесных неидеальных систем, которые были бы аналогичны динамическим системам со странным аттрактором.

В заключение этих общих соображений остановимся на вопросе о флуктуациях. Теория флуктуаций в равновесных системах привлекала самое пристальное внимание блестящих экспериментаторов и теоретиков. Было показано, что вблизи критической точки возникает область очень своеобразных зависимостей с дробными показателями в уравне-

ний состояния. По аналогии можно ожидать подобную ситуацию и в диссипативных системах, однако теория таких флуктуаций почти не разработана.

Общими математическими моделями нелинейных неравновесных процессов служат распределенные динамические системы, т. е. системы нелинейных параболических уравнений в частных производных. Тривиальному равновесному состоянию отвечает тривиальное решение этой системы со всеми параметрами, не зависящими ни от времени, ни от пространственных координат. Его можно принять за начало отсчета в фазовом пространстве. При некотором значении внешнего параметра, называемом бифуркационным, тривиальное решение теряет устойчивость, и в системе происходит бифуркация — переход к нетривиальному неоднородному (и в общем случае нестационарному) решению. Важно, что при большом разнообразии распределенных динамических систем, описывающих конкретные ДС, существует относительно небольшое число различных типов бифуркаций. Тип бифуркации определяется основной линейной характеристикой рассматриваемой системы, а именно спектром инкрементов, т. е. зависимостью инкремента неустойчивости тривиального решения от пространственного волнового числа малого возмущения. Для описания режима, возникающего после бифуркации, достаточно фактически знать лишь качественные свойства спектра инкрементов, прежде всего, является ли он вещественным или комплексным (т. е. является ли соответствующая неустойчивость апериодической или колебательной). В первом случае следует ожидать появления после бифуркации стационарного, а во втором — нестационарного (периодического) режима. Что касается вещественной части инкремента, то при больших значениях волновых чисел она, как правило, падает и становится отрицательной. Это связано с тем, что в каждой конкретной физической задаче существует механизм, подавляющий коротковолновые возмущения, например, теплопроводность в случае безгазового горения, диффузия в химических реакциях в газовой фазе и поверхностное натяжение в случае лазерного испарения. Весьма важно знать, ограничена ли область неустойчивости на шкале волновых чисел также и со стороны длинноволновых возмущений. Кроме того, в случае колебательной неустойчивости, не ограниченной со стороны малых волновых чисел, важно также знать, является ли вещественная часть инкремента монотонно падающей функцией волнового числа. Последнее свойство существенно для изучения устойчивости ДС, возникающих в результате бифуркаций [9]. Стабилизация неустойчивости, развивающейся в линейном приближении, обеспечивается нелинейностью (физически очевидно, что амплитуда температуры, концентраций и т. п. величин ограничена). Если мы имеем дело с небольшим углублением в область неустойчивости, то можно выполнить так называемый бифуркационный анализ, ограничиваясь первыми членами разложения нелинейности по степеням отклонения динамических переменных от их равновесных значений, отвечающих тривиальному решению. Первый нелинейный член в таком разложении, как правило, определяет тип бифуркации. Интересно, что аналогичная ситуация наблюдается в теории консервативных волн, где, как и в случае диссипативных систем, имеется небольшое число основных нелинейных уравнений, полностью описывающих возможные типы поведения слабонелинейных гамильтоновских волновых систем с различными дисперсионными характеристиками [16]. Кроме того, следует заметить, что существуют неустойчивости, например тейлоровская гидродинамическая неустойчивость [13] и неустойчивость, связанная с дендритным режимом кристаллизации переохлажденной жидкости [14], которые вообще не стабилизируются и к которым поэтому неприложим бифуркационный анализ.

Помимо вида линейной неустойчивости и способа ее нелинейной стабилизации на характер бифуркации может влиять также геометрия системы, в которой происходит образование ДС, или, с формальной точки зрения, размерность пространства, в котором записывается соответствующая система параболических уравнений, а также дополняющие их граничные условия. В частности, для ДС в одномерной задаче с периодическими граничными условиями и в двумерной задаче с аксиальной симметрией важную роль играют топологические характеристики, определяющие глобальные свойства решений.

Данная работа посвящена описанию некоторых весьма общих типов бифуркаций, наблюдаемых в распределенных динамических системах (в основном колебательных, т. е. с комплексным инкрементом, но не стохастических), и нелинейных пространственных волновых режимов, возникающих в результате этих бифуркаций. Во втором разделе рассмотрен случай колебательной неустойчивости, стабилизируемой кубичной нелинейностью, причем учитывается немонотонная зависимость вещественной части инкремента неустойчивости от волнового числа. Данная ситуация типична, например, для нестационарного безгазового горения [8, 9]. Третий раздел посвящен случаю так называемой тюринговской неустойчивости [15], т. е. апериодической неустойчивости, область которой ограничена со стороны как длинноволновых, так и коротковолновых возмущений. В этой ситуации мы рассмотрим два различных простейших механизма стабилизации. В четвертом разделе изучается распределенная триггерная система с апериодически неустойчивым промежуточным состоянием. Пятый раздел содержит рассмотрение роли топологических инвариантов в некоторых одномерных и двумерных задачах. Два Приложения, написанные одним из авторов (Б. А. Маломедом), посвящены двум специфическим вопросам, связанным с теорией распределенных динамических систем: стохастичности и изучению систем, близких к нелинейным уравнениям, точно интегрируемым методом обратной задачи рассеяния [16]. В первом Приложении описана простая нетривиальная динамическая система со стохастическим поведением, во втором Приложении сформулирована теория возмущений для нелинейного уравнения Шрёдингера в бессолитонном секторе.

2. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ВОЛНЫ

2.1. Выбор модели

Рассмотрим систему, описываемую нелинейным уравнением

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi} = 2\varphi [\dot{\xi}(1 - (4/3)\dot{\xi}^2) + (\lambda^2/4\pi^2)\Delta\xi], \quad (1)$$

$$\varphi \ll 1,$$

где точка обозначает дифференцирование по времени, а Δ — двумерный лапласиан. Уравнение (1) описывает на феноменологическом уровне эволюцию фронта безгазового горения [8] (т. е. такого горения, при распространении которого можно пренебречь диффузией). Рассматривается распространение экзотермической химической реакции по направлению оси z . При начальной температуре T_0 ($T \rightarrow T_0$ при $z \rightarrow +\infty$) вещество химически инертно. Однако при высокой температуре $T \gg T_0$ реакция идет быстро и выделяется тепло. Реакция заканчивается, когда исчерпаны реагирующие вещества, при этом достигается температура T_m . При температуре, близкой, но меньшей T_m , скорость химической реакции достаточно велика. Теплопроводность вдоль оси z (поток тепла $\sim \partial T / \partial z$) нагревает новые слои реагирующего вещества, после

Чего в них в свою очередь начинаяется химическая реакция. Таким образом, имеет место распространение горения. Невозмущенное решение имеет вид $T = T(z - ut)$, $n = n(z - ut)$, где T — температура, а n — величина, характеризующая состав, например концентрация горючего. Мы можем определить координату фронта пламени, например, как значение z , при котором n уменьшается вдвое, т. е. условием $n(z_f, t) = n_0/2$, где $n = n_0$ при $z = +\infty$. В стационарном режиме для пламени, лежащего в плоскости (x, y) , имеем $z_f^{(0)} = ut + c$, где c — константа, зависящая от начальных условий*.

Мы рассматриваем возможные отклонения режима распространения от стационарного ($dz_f/dt \neq u$) и формы пламени от плоской ($d^2z_f/dx^2, d^2z_f/dy^2, d^2z_f/dxdy \neq 0$). Введем $\xi = z_f - z_f^{(0)} = \xi(x, y, t)$ как меру отклонения фронта горения от положения, предсказанного стационарной теорией.

При коэффициенте диффузии, равном коэффициенту температуропроводности, имеет место постоянство полной энергии (суммы химической и тепловой энергии). В этом случае Баренблatt и Зельдович [53] довольно общим способом доказали устойчивость пламени. Система уравнений для $T(z, t)$ и $n(z, t)$ сводится к одному. Наличие тривиального возмущения, эквивалентного сдвигу по z , с нулевым инкрементом позволяет доказать (используя ортогональность возмущений и теорему Штурма), что все остальные нетривиальные возмущения затухают. Ранее для большого коэффициента Зельдовичем была показана пространственная неустойчивость, подобная дендритному росту кристаллов: вырвавшийся вперед язык пламени оказывается в более благоприятном для реакции положении. Наконец, при нулевом коэффициенте диффузии теплопроводность создает прогретый, но не потерявший горючего слой вещества. В этом слое суммарная, химическая и тепловая энергия больше, чем с обеих сторон от него, т. е. больше, чем в холодном веществе, и больше, чем равная исходной энергия в горячем веществе по окончании реакции (рис. 2).

Льюис и Эльбе еще в 1934 году предсказывали, что наличие такого слоя может привести к неустойчивости стационарного режима. Однако они не дали конкретной картины такой неустойчивости. Одномерная неустойчивость была доказана теоретически впервые в 1942 г. в работе Зельдовича, посвященной горению пороха. В прогретом слое пороха имеет место теплопроводность, но практически нет диффузии! Был найден предел устойчивого режима. Затем независимо, в совсем других условиях, применительно к горению безгазовых составов, теорию одномерной неустойчивости фронта горения развил Мержанов и его сотрудники.

Феноменологическое описание их результатов состоит в том, что величина ξ (отклонение положения фронта от невозмущенного положения, соответствующего стационарному режиму) удовлетворяет ко-

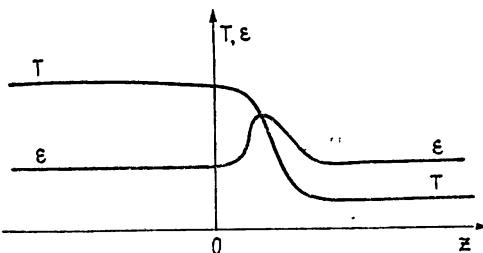


Рис. 2. Зависимость плотности энергии ϵ и температуры T в прогретом слое от координаты z .

* Вычисление u по заданной кинетике химических реакций и теплопроводности является задачей теории распространения пламени. Отметим первую реалистическую работу [54], монографию [55] и работы Мержанова с соавторами по безгазовому горению [19, 20].

лебательному уравнению с определенной частотой и инкрементом, который в линейном приближении меняет знак при переходе через критическое условие неустойчивости. Нелинейность такова, что ограничивает неким предельным циклом колебания в неустойчивом режиме. Скорость горения $u + \dot{\xi}$ зависит от температуры зоны горения, и поэтому представляется естественным ввести взаимодействие соседних элементов теплопроводностью как $\Delta T \sim \Delta \xi$ (двумерный лапласиан $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$).

Все это отражено в феноменологическом уравнении (1), которое мы будем исследовать. В действительности дисперсионная кривая зависимости инкремента от двумерного волнового вектора ведет себя сложнее, о чем см. ниже. Здесь же ограничимся упоминанием о том, что глубоко в надкритической области одномерные расчеты Мержанова и его сотрудников дают стохастическую, а не периодическую зависимость возмущений от времени. Эта ситуация заведомо не описывается предлагаемым феноменологическим уравнением.

Итак, вернемся к уравнению (1); стационарному неустойчивому фронту отвечает тривиальное решение $\xi = 0$. Спектр инкрементов неустойчивости этого решения, изображенный на рис. 3а, имеет вид

$$\operatorname{Re} \Omega(k) = 2\varphi \left(1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} \right), \quad \operatorname{Im} \Omega = 1 - \varphi^2 \left(1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} \right)^2. \quad (2)$$

В то же время известно, что точный спектр инкрементов неустойчивого стационарного безгазового горения [17], в отличие от (2), не является строго монотонным и имеет слабо выраженный максимум в области малых k (рис. 3б). Поэтому более точное феноменологическое описание достигается с помощью следующего уравнения [9]:

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\varphi \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{\xi}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \xi + \frac{\beta \lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right], \quad (3)$$

$$\varphi \ll 1.$$

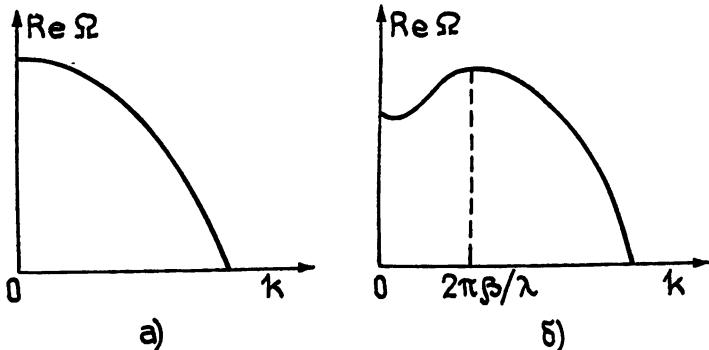


Рис. 3. Спектр инкрементов неустойчивости: а) тривиального решения уравнения (1); б) стационарного плоского фронта безгазового горения.

Оператор $\sqrt{-\Delta}$ является нелокальным оператором, действие которого легче всего определить на его собственных функциях $\sin kx^*$:

$$\sqrt{-\Delta} \sin kx = |k| \sin kx. \quad (4)$$

* Отметим, что при весьма малых $|k|$ разложение инкремента начинается с k^2 , но фактически линейная область оказывается затянутой. Отметим также, что уравнение $\partial^2 \xi / \partial t^2 = -a^2 (\partial^2 \xi / \partial x^2)$ имеет мнимые характеристики и решение его может быть написано в виде $f_1(x - iat) + f_2(x + iat)$.

Для изучения устойчивости различных приближенных решений уравнения (3) нужно знать действие оператора $\sqrt{-\Delta}$ на функции, близкие его собственным. Например,

$$\begin{aligned} \sqrt{-\Delta} [(1 + a(x) \sin(\delta(x) - kx) + b(x) \cos(\delta(x) - kx)] &\approx |k| \left[\left(1 + a - k^{-1} \frac{db}{dx} - k^{-1} \frac{d\delta}{dx} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\delta - kx) + \left(b + k^{-1} \frac{da}{dx} \right) \cos(\delta - kx) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

если $a^2 \ll 1$, $b^2 \ll 1$, $\left(\frac{da}{dx}\right)^2 \ll k^2$, $\left(\frac{db}{dx}\right)^2 \ll k^2$, $\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^2 \ll k^2$. Другое обобщение формулы (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \sqrt{-\Delta} [a(x) \sin(\delta(x) - kx)] &\approx |k| \left[\left(a - k^{-1} a \frac{d\delta}{dx} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\delta - kx) + k^{-1} \frac{da}{dx} \cos(\delta - kx) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Для справедливости формулы (6) требуется, чтобы $k^{-2} a^{-2} (da/dx)^2 \ll 1$ и $k^{-2} (d\delta/dx)^2 \ll 1$, но, в отличие от (5), величина $a(x)$ не должна быть близка к единице.

2.2. Одномерные автоколебательные волны

Уравнение распределенных автоколебаний (3) имеет приближенные решения в виде плоских волн, амплитуда которых определяется нелинейными членами уравнения:

$$\xi = \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \frac{\beta k \lambda}{2\pi}} \cos(t - kx), \quad k > 0. \quad (7)$$

Для исследования решения (7) на устойчивость подставим в (3) возмущенное решение

$$\tilde{\xi} = \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \frac{\beta k \lambda}{2\pi}} [1 + \sigma(t, x)] \cos[t - kx + \delta(t, x)], \quad (8)$$

где σ и δ — возмущения амплитуды и фазы. Используя (5), (6), можно получить систему линеаризованных уравнений для σ и δ :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \dot{\sigma} - \sigma + 3 \left(1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \frac{\beta k \lambda}{2\pi} \right) \sigma - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - k^2 \sigma + \right. \\ \left. + 2k \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) - \frac{\beta k \lambda}{2\pi} \left(\sigma - k^{-1} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\varphi^{-1} \dot{\delta} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - 2k \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) - \frac{\beta \lambda}{2\pi} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Для получения дисперсионного уравнения, определяющего устойчивость решения (7), подставим в (9) $\sigma = \sigma_0 \exp(ipx + \varphi \Omega t)$, $\delta = \delta_0 \exp(ipx + \varphi \Omega t)$:

$$\Omega^2 + 2 \left(1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \frac{\beta k \lambda}{2\pi} + p^2 \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right) \Omega + \\ + \frac{p^2 \lambda^2}{2\pi^2} \left(1 - \frac{3k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + 3 \frac{\beta k \lambda}{2\pi} - \frac{1}{2} \beta^2 \right) = 0. \quad (10)$$

Условие устойчивости $\operatorname{Re} \Omega < 0$, как следует из (10), имеет вид

$$1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \frac{\beta k \lambda}{2\pi} > \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \right). \quad (11)$$

Поскольку в левой части условия (11) стоит квадрат амплитуды решения (7), а максимальное значение этого квадрата, достигаемое при $k = 2\pi\beta/\lambda$, равно $1 + \beta^2/4$, то устойчивыми являются волны, квадрат амплитуды которых больше двух третей максимального значения. Отметим, что аналогичный результат был получен в [18].

Значительный интерес представляет исследование решений уравнения (3) на окружности радиуса R (т. е. на отрезке длины $2\pi R$ с периодическими граничными условиями), поскольку эти решения соответствуют экспериментально обнаруженным спиновым режимам горения тонкостенного цилиндра [19]:

$$\xi = \sqrt{1 - N^2 \lambda^2 / 4\pi^2 R^2 + \beta N \lambda / 2\pi R} \cos(t - Nx/R), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Целое число N имеет смысл топологического инварианта: при обходе замкнутой окружности изменение фазы локальных колебаний равно $2\pi N$. В эксперименте N равно числу «голов» спинового режима горения, т. е. числу максимумов функции $\xi(x)$. Исследование устойчивости спиновых решений (12), выполненное в [9], несколько отличается от исследования, изложенного выше для решения (7), поскольку надо рассматривать лишь возмущения, периодические по x , что удобнее всего сделать в рамках приближения Галёркина [9]. В частности, оказывается, что первая спиновая мода ($N = 1$) становится устойчивой, если $1 - \lambda^2 / 4\pi^2 R^2 + \beta \lambda / 2\pi R > 1/2$, а синфазная мода ($N = 0$) теряет устойчивость при

$$1 - \lambda^2 / 4\pi^2 R^2 + \beta \lambda / 2\pi R > 1. \quad (13)$$

Общий результат состоит в том, что номер N устойчивой моды растет с ростом R [9]. В связи с этим можно указать на важность учета немонотонности спектра $\operatorname{Re} \Omega(k)$ при построении уравнения (3): при $\beta = 0$ синфазная мода, как видно из (13), никогда не станет неустойчивой, что противоречит экспериментальным результатам [20]. Анализ устойчивости указывает на наличие гистерезиса. При плавном увеличении параметра надкритичности моды с малым N остаются устойчивыми относительно малых возмущений даже тогда, когда существуют устойчивые моды с большим N .

2.3. Двумерные автоколебательные волны

Переходя к описанию автоколебательных волн более сложного вида, мы ограничимся уравнением (1). Безгазовое горение сплошного цилиндра описывается решениями в виде двумерных спиновых (вихревых) волн [21]: $\xi = a_N(\rho) \cos(t - N\theta)$, $\rho = 2\pi r/\lambda$, θ — угловая координата. Радиальная амплитуда $a_N(\rho)$ определяется нелинейным аналогом уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 a_N}{d \rho^2} + \rho^{-1} \frac{d a_N}{d \rho} - N^2 \rho^{-2} a_N + a_N(1 - a_N^2) = 0 \quad (14)$$

с условием теплоизоляции на границе сплошного цилиндра радиуса R : $\frac{\partial \xi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$ или

$$\left. \frac{da_N}{d \rho} \right|_{\rho=2\pi R/\lambda} = 0. \quad (15)$$

Задача (14), (15) решалась численно [21], причем был также разработан приближенный аналитический метод ее решения [21], приведший к тем же результатам, что и численный. Этот метод основан на поиске решения в виде

$$a_N(\rho) = c_N(\rho) J_N(\rho + \delta_N(\rho)), \quad (16)$$

где $J_N(\rho)$ — функция Бесселя, а функции $c_N(\rho)$ и $\delta_N(\rho)$ предполагаются медленно изменяющимися по сравнению с $J_N(\rho)$. Используя это предположение, можно найти приближенные выражения для этих функций:

$$\delta_N(\rho) = -2 \int_0^\rho \left(\frac{d}{d \rho'} \ln c_N(\rho') \right) \rho' d\rho', \quad (17)$$

$$c_N(\rho) = c_0 / \sqrt{1 - (3/4) F_N(\rho) c_0^2},$$

где c_0 — произвольная константа и

$$F_N(\rho) = \int_0^\rho \rho'^{2N} \left(2 + \frac{\pi}{2} \rho'^{2N+1} \right)^{-3/2} \left(\frac{\rho'^{-1}}{\sqrt{2 + (\pi/2) \rho'^{2N-3}}} + \right. \\ \left. + \frac{2 \rho' + 1}{\sqrt{2 + (\pi/2) \rho'^{2N+1}} + \rho'^{-3} \sqrt{2 + (\pi/2) \rho'^{2N+5}}} \right) d\rho'. \quad (18)$$

Функция $F_N(\rho)$ монотонная, и $F_N(\infty) < \infty$. Формулы (16) — (18) позволяют установить следующее важное свойство решений уравнения (14): регулярное решение существует, если $c_0 < \tilde{c}_0^{(N)} \equiv (4/3) F_N(\infty)$.

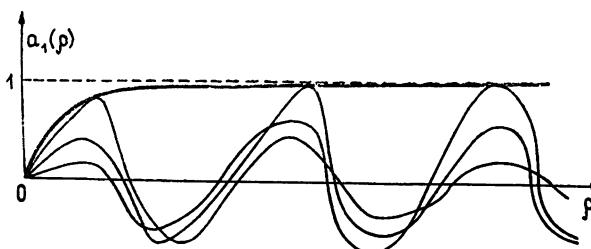


Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (14) ($N=1$).

Если $c_0 > \tilde{c}_0^{(N)}$, то мы получим сингулярное решение; наконец, при $c_0 = \tilde{c}_0^{(N)}$ получается особое регулярное решение, которое в отличие от других регулярных решений является монотонным и имеет предел $\lim_{\rho \rightarrow \infty} a_N(\rho) = 1$ (в то время как другие решения обращаются на бесконечность).

нечности в нуль). Отметим, что это свойство (без получения явных формул (16)–(18)) было независимо от [21] доказано в [22] для случая $N = 1$. Особая интегральная кривая является огибающей семейства других кривых (рис. 4). Особое решение, описывающее автоколебательный вихрь, вследствие своей монотонности не удовлетворяет граничному условию (15) ни при каком конечном R . Свойства этого решения в связи с наличием у него топологического инварианта будут обсуждаться в пятом разделе,

2.4. Нестационарные автоколебательные режимы

До сих пор мы рассматривали стационарные плоские и вихревые волны. Простейшим из нестационарных режимов является так называемая амплитудная волна [23], описывающая процесс перехода неустойчивого начального состояния в режим синфазных колебаний. Соответствующее решение уравнения (1) ищется в виде $\xi = a(t, x) \cos t$, где $a(t, x)$ — медленно изменяющаяся амплитуда, определяемая уравнением

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \varphi(\lambda^2/4\pi^2) (\partial^2 a / \partial x^2) + \varphi a (1 - a^2).$$

Это уравнение типа КПП — Фишера [24, 25]. Известно, что его единственное устойчивое решение в виде бегущей волны $a(t - kx)$ получается при $k = \pi/\varphi\lambda$. Соответствующая скорость распространения волны перехода $v = \varphi\lambda/\pi$. Этот результат можно обобщить на случай уравнения (3): скорость оказывается равной $v = (\beta + 2)\varphi\lambda/2\pi$.

Другие нестационарные режимы связаны с решением уравнения (1) на отрезке длины l с неймановскими граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (19)$$

или с граничными условиями типа Дирихле:

$$\xi|_{x=0} = \xi|_{x=l} = 0. \quad (20)$$

Хорошо известно, [6], что задача (1)–(19) (напомним, что сейчас рассматривается уравнение без члена $\gamma - \Delta$) имеет решения в виде стоячих волн. Все эти решения неустойчивы, за исключением того, которое описывает однородные синфазные колебания (в случае задачи на окружности, т. е. с периодическими граничными условиями, вместо (19) или (20), устойчивость несинфазных волн даже без члена $\gamma - \Delta$ может обеспечиваться за счет топологического инварианта). Что касается задачи (1)–(20), то ее простейшее приближенное решение в виде стоячей волны имеет вид

$$\xi = \sqrt{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4l^2}\right)} \sin t \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (21)$$

Исследование устойчивости в приближении Галёркина показывает, что решение (21) устойчиво при $l < \lambda$. Важно, однако, что помимо стоячих волн существуют также существенно нестационарные решения в виде волн, бегущих от края к краю. Например, для задачи (1)–(20) такое решение можно искать в виде [26, 27]

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x/l) (A_n \sin t \cos kx + B_n \cos t \sin kx). \quad (22)$$

Условие

$$|A_n| = |B_n| \quad (23)$$

для всех n обеспечивает, как видно из (22), существование амплитудно-модулированной бегущей волны. При решении данной задачи наибольший интерес представляет вопрос о спектре волновых чисел k . Этот спектр может быть определен при подстановке (22) с учетом (23) в (3) как условие совместности получающейся алгебраической системы уравнений для амплитуд A_n, B_n [26, 27]:

$$kl = (\pi/2)(1+n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, [2l/\lambda]. \quad (24)$$

Условие совместности дополняет также формулу (23) следующим соотношением: $B_n = \pm(-1)^n A_n$. Спектр (24) имеет простой физический смысл: автоколебательная волна изменяет фазу на $\pi/2$ при отражении от края. Этот спектр является универсальным и будет иметь тот же вид в случае неймановских граничных условий (19), а также для уравнения (3). Разумеется, амплитуды зависят от конкретного вида уравнения. Например, если $n=0$, приближенные выражения для первых двух амплитуд имеют вид [26]

$$A_1^{(0)} \approx (5\sqrt{3}\pi^2/16l) \sqrt{1 - (\lambda^2/4l^2)},$$

$$A_2^{(0)} \approx -0,3 A_1^{(0)}.$$

Аналогично может быть рассмотрена задача о бегущих радиальных волнах на круге радиуса R с граничным условием типа Дирихле или Неймана. В случае условия Дирихле решение по аналогии с (22) ищется в виде [27]

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) [A_n \sin t J_0(kr) + B_n \cos t N_0(kr)], \quad B_n = \pm (-1)^n A_n,$$

μ_n обозначает n -й корень функции $J_1(\mu)$. Спектр имеет вид [27] $kR = \pi n/2$, $1 \ll n < [R/\lambda]$.

В качестве последнего примера нестационарного волнового режима мы рассмотрим вопрос о спиральной волне в безграничной среде [27]. Асимптотика этой волны на больших расстояниях имеет вид

$$\xi = \sqrt{1 - (k^2\lambda^2/4\pi^2)} \cos(t - kr - N\theta). \quad (25)$$

Известно, что такие волны существуют в реакции Белоусова—Жаботинского [2] и в возбудимых биофизических средах [7]. Для исследования эволюции волны будем искать решение в виде

$$\xi(t, r, \theta) = f(\tau, r) \sin[t + g(\tau, r) - N\theta], \quad (26)$$

где $\tau = \varphi t$ — «медленное время». Подстановка (26) в (1) с учетом $\varphi \ll 1$ приводит к системе укороченных уравнений [8, 18, 21]:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + 2f^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + r^{-1} \frac{\partial g}{\partial r}; \quad (27)$$

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} - N^2 r^{-2} f + \left[\frac{4\pi^2}{\lambda^2} (1 - f^2) - \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 \right] f. \quad (28)$$

Система уравнений (27), (28), как нетрудно видеть, имеет решение с асимптотикой при $r \rightarrow \infty$:

$$g \approx c \ln \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad f \approx 1 - \frac{(c^2 + N^2)\lambda^2}{4\pi^2 r^2}. \quad (29)$$

Однако (29) описывает, в отличие от (25), волну в форме логарифмической, а не архimedовой, спирали. Находя с помощью (27), (28) поправки к асимптотике (25), мы убеждаемся, что они растут со временем:

$$g \approx kr + \frac{k\lambda^2 \tau}{4\pi^2 r}, \quad f(\tau, r) \approx \sqrt{1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2} + \left(1 - \frac{k^2 \lambda^2}{4\pi^2}\right)^{-1/4}} \frac{\lambda^4 k^2 \tau}{16\pi^4 r^2}.$$

Последующие поправки имеют форму сумм членов $\tau^m r^{-n}$. Интересуясь формой решения при $\tau \rightarrow \infty$, мы можем сохранить для каждого n лишь член с максимальным m . В этом приближении (28) сводится к

$$1 - f^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)^2. \quad (30)$$

Система (27) — (30) имеет автомодельное решение

$$g(\tau, r) = \frac{\pi r}{\lambda} G(z), \quad f(\tau, r) = F(z), \quad z = \frac{\lambda^2 \tau}{\pi^2 r^2}, \quad (31)$$

причем асимптотическое условие (25) сводится к начальному условию $G(0) = \pi^{-1} \lambda k$. Асимптотика $G(z)$ и $F(z)$ при $z \rightarrow \infty$ легко находится подстановкой (31) в (27) — (30):

$$\begin{aligned} G &\approx G_0 z^{1/2} + (1/2) G_0 z^{-1/2} + \dots, \\ F &= 1 - (1/8) G_0^2 z^{-1} + \dots, \end{aligned} \quad (32)$$

где G_0 — константа. Сравнивая (31) и (32), мы видим, что в любой точке с большим, но фиксированным r спиральная волна при $\tau \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$) сменяется стационарным вихрем (спиновой волной), который можно рассматривать как спиральную волну с $k = 0$. Волна перехода распространяется от центра к периферии со скоростью $v \sim \phi \lambda^2 / r$. Интересно отметить, что уравнение (3), в отличие от (1), может иметь спирально-волновое решение. С помощью формулы

$$\sqrt{-\Delta} \sin(t - kr) \approx |k| [\sin(t - kr) + (1/2) k^{-1} r^{-1} \cos(t - kr)],$$

справедливой при $r \gg k^{-1}$, можно убедиться, что уравнение (3) имеет решение с асимптотикой

$$\xi \approx \sqrt{1 - (k^2 \lambda^2 / 4\pi^2) + (\beta k \lambda / 2\pi)} \sin(t - kr - N\theta)$$

при единственном значении радиального волнового числа $k = \pi\beta/\lambda$.

Остановимся в заключение на особенностях реализации автоколебательных режимов в экспериментальных системах. Очевидно, что колебания в реакции Белоусова—Жаботинского описываются автоколебательными уравнениями лишь в смысле промежуточной асимптотики, поскольку реагирующие вещества расходуются. В этом смысле теория является приближенной, так же как теория Н. Н. Семенова теплового взрыва в замкнутом сосуде. Для того, чтобы автоколебания (или, в случае теплового взрыва, бифуркация) осуществлялись точно, нужно рассматривать проточную систему с непрерывной подачей реагирующих веществ и отводом продуктов реакции. Такое рассмотрение проведено, как известно, Зельдовичем и Зысинским в 1941 г. Однако в проточной системе имеет место гидродинамическое

перемешивание, и поэтому пространственная структура не может образоваться. В принципе, можно представить себе систему с объемной подачей энергии светом. Однако останется проблема пространственно-неоднородного распределения температуры, необходимого для отвода тепла.

В свете этих трудностей в осуществлении трехмерной автоколебательной химической системы становится понятным обращение к двумерной задаче о структуре поверхности пламени или детонационной волны. Третья координата используется для питания пламени энергией и отвода продуктов реакции, в двумерном пространстве возникает характерная структура.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

В процессе распространения пламени в газе, в отличие от безгазового горения, наряду с теплопроводностью существенную роль имеют диффузия и движение газа. Известно [28], что неустойчивость стационарного пламени в этом случае является апериодической и ее спектр имеет вид, изображенный на рис. 5 а [10, 28]. Распространение газового пламени описывается уравнением, которое было выведено из основных уравнений теплопроводности, диффузии и гидродинамики [10]:

$$\dot{\xi} - \beta \sqrt{-\Delta} \xi + 2\alpha \Delta \xi + \Delta^2 \xi + (\nabla \xi)^2 = 0. \quad (33)$$

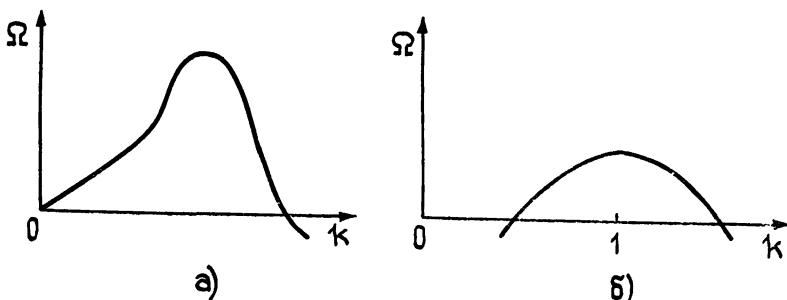


Рис. 5. Спектр неустойчивости стационарного газового пламени: а) плоское пламя; б) пламя, обладающее средней кривизной.

Оператор $\sqrt{-\Delta}$ описывает здесь гидродинамическую неустойчивость Ландау [29], а комбинация $2\alpha \Delta + \Delta^2$ — теплодиффузионную неустойчивость [10, 28]; член $(\nabla \xi)^2$ (введенный впервые в работе [30]) обеспечивает нелинейную стабилизацию. Уравнение (33) относится к случаю в среднем плоского пламени. Если мы рассматриваем распространение цилиндрического или сферического пламени со средней кривизной R^{-1} , то уравнение (33) принимает вид [10]

$$\dot{\xi} - \beta \sqrt{-\Delta} \xi + 2\alpha \Delta \xi + \Delta^2 \xi + R^{-1} \xi + (\nabla \xi)^2 = 0. \quad (34)$$

Соответствующий спектр инкрементов неустойчивости тривиального решения $\xi \equiv 0$ изображен на рис. 5 б. Если мы рассматриваем слабонадквадратический случай $0 < R - R_0 \ll R_0$, где R_0^{-1} — значение кривизны, при которой тривиальное решение теряет устойчивость, то лежащую в неустойчивой области $\Omega > 0$ часть графика на рис. 5 б можно аппроксимировать параболой и рассмотреть вместо (34) уравнение

$$\dot{\xi} + 2\alpha \Delta \xi + \Delta^2 \xi + \xi' + (\nabla \xi)^2 = 0, \quad 0 < \alpha - 1 \ll 1. \quad (35)$$

Аналогичное уравнение описывает также распространение в среднем плоского газового пламени в однородном гравитационном поле [44].

Стационарные решения уравнения (35) имеют квазигармоническую структуру:

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \sin kx + A_0 + A_2 \cos 2kx + \dots, \\ A_1^2 &= 9\Lambda^2, \quad A_0 = -(9/2)\Lambda_2, \quad A_2 = -(1/2)\Lambda^2,\end{aligned}\tag{36}$$

где $\Lambda^2 = 2\alpha k^2 - k^4 - 1$ — малая величина, имеющая смысл надкритичности. С учетом $\alpha - 1 \ll 1$

$$\Lambda^2(k) \approx 2[(\alpha - 1) - 2(k - 1)^2].\tag{37}$$

Очевидно, решение (36) существует в области $\Lambda^2(k) > 0$, т. е.

$$1 - \sqrt{(\alpha - 1)/2} < k < 1 + \sqrt{(\alpha - 1)/2}.\tag{38}$$

Для исследования устойчивости решения (36) подставим в (35) возмущенное решение

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= (A_1 + a_2(x)e^{2t}) \sin(kx + \delta(x)e^{2t}) + \\ &+ (A_0 + a_0(x)e^{2t}) + (A_2 + a_{21}(x)e^{2t}) \cos(2kx + 2\delta(x)e^{2t}) + \\ &+ a_{22}(x)e^{2t} \sin(2kx + 2\delta(x)e^{2t}).\end{aligned}\tag{39}$$

Используя предположение о малой надкритичности, можно показать, что собственными модами амплитудных и фазовых возмущений, введенных в (39), будут плоские волны $\sim \exp(ipx)$, и условие устойчивости $\operatorname{Re} \Omega(p) \leq 0$ сводится к

$$\Lambda^2(k) \geq (4/3)(\alpha - 1).\tag{40}$$

Отметим, что, в соответствии с (37), максимальное значение $\Lambda^2(k)$, равное $\Lambda_{\max}^2 = 2(\alpha - 1)$, достигается при $k = 1$. Таким образом, как видно из (40), область устойчивости стационарных ДС внутри области их существования (38) определяется условием $A_1^2(k) \geq (2/3)(A_1^2)_{\max}$, где $(A_1^2)_{\max} = 18(\alpha - 1)$ — максимальное значение квадрата амплитуды, достигаемое при $k = 1$. Это условие устойчивости полностью аналогично условию (11) устойчивости квазигармонических автоколебательных волн. В действительности условие (40) имеет еще более универсальный смысл. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим ДС, описываемую вместо (35) уравнением с кубичной нелинейностью

$$\dot{\xi} + 2\alpha\Delta\xi + \Delta^2\xi + \xi + 4\xi^3/3 = 0.\tag{41}$$

Квазигармоническая ДС имеет вид

$$\xi = A_1 \sin kx + \dots, \quad A_1^2 = \Lambda^2(k).\tag{42}$$

Исследование решения (42) на устойчивость проводится аналогично предыдущему и снова приводит к условию устойчивости (40).

Перейдем теперь к исследованию уравнения (33). Легко видеть, что оно вообще не имеет стационарных решений, однако можно рассмотреть решение вида [10, 31]

$$\xi(t, x) = Vt + \chi(x).\tag{43}$$

Подставляя (43) в (33), мы найдем

$$\begin{aligned}\chi(x) &= A_1 \sin kx + A_2 \cos 2kx + \dots, \\ A_1^2 &= 8(2k^2 - \alpha)(2\alpha - k^2), \quad A_2 = -1/2(2\alpha - k^2), \\ V &= -4k^2(2k^2 - \alpha)(2\alpha - k^2).\end{aligned}\tag{44}$$

Решение (43), (44), как видно из (44), формально существует при $a/2 < k^2 < 2a$ и является квазигармоническим при $A_1^2 \gg A_2^2$, т. е. вблизи точки $k^2 = 2a$. Стандартное исследование квазигармонического решения обнаруживает его полную неустойчивость. Однако на этот раз, в отличие от случая уравнений (35) и (41), замена квадратичной нелинейности на кубическую изменяет ситуацию. Действительно, уравнение [23]

$$\ddot{\xi} - \beta \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} - \Delta \xi + 4\xi^3/3 = 0 \quad (45)$$

имеет стационарные решения

$$\xi = A_1 \sin kx + A_3 \sin 3kx + \dots, \quad (46)$$

$$A_1^2 = k(\beta - k), \quad A_3 = -(1/3) \sqrt{k(3-k)^3} (\beta - 7k)^{-1}$$

в области $0 < k < \beta$. Эти решения можно считать квазигармоническими при условии $A_1^2 \gg A_3^2$, т. е. при достаточной малости величины $\beta - k$. Возмущенное решение возьмем в виде

$$\tilde{\xi} = A_1(1 + \sigma(t, x)) \sin(\delta(t, x) - kx) + \dots \quad (47)$$

Подстановка (47) в (45) приводит к системе линеаризованных уравнений, аналогичной (9):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -3A_1^2\sigma + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - k^2\sigma + 2k\frac{\partial\delta}{\partial x} + \beta\left(k\sigma - \frac{\partial\delta}{\partial x}\right), \\ \dot{\delta} &= \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} - 2k\frac{\partial\delta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\sigma}{\partial x}. \end{aligned} \quad (48)$$

Система (48) имеет решение в виде плоских волн

$$\sigma = \sigma_0 \exp(\Omega t + ipx), \quad \delta = \delta_0 \exp(\Omega t + ipx). \quad (49)$$

Подстановка (49) в (48) определяет дисперсионное уравнение, аналогичное (10):

$$\Omega^2 + 2(\beta k - k^2 + p^2)\Omega + p^2(3\beta k - 3k^2 - 0,5\beta^2) = 0. \quad (50)$$

Условие устойчивости $\operatorname{Re} \Omega < 0$, как видно из (50), сводится к неравенству

$$A_1^2 = \beta k - k^2 > \beta^2/6. \quad (51)$$

Поскольку максимальное значение амплитуды $A_1^2(k)$, достигаемое при $k = 0,5\beta$, равно $(A_1^2)_{\max} = \beta^2/4$, то условие (51), так же как (11) и (40), означает $A_1^2(k) > (2/3)(A_1^2)_{\max}$. Неравенство (51) можно также переписать в виде

$$0,5\beta(1 - 1/\sqrt{3}) < k < 0,5\beta(1 + 1/\sqrt{3}). \quad (52)$$

Вычисляя с помощью (46) отношение $x \equiv A_3^2/A_1^2$, мы убеждаемся, что $x_L \approx 0,30$ на левом краю области (52), $x_0 = 1/225$ в центре этой области и $x_R \approx (1/65)^2$ на ее правом краю. Таким образом, ДС (46) в области устойчивости (52) действительно можно считать квазигармонической.

При исследовании устойчивости, изложенном выше, существенно использовалось предположение о том, что первая кратная гармоника в разложении решения в ряд Фурье (гармоника $2k$ в случае уравнений

(33) и (35) с квадратичной нелинейностью и гармоника $3k$ в случае уравнений (41) и (45) с кубической нелинейностью) имеет малую амплитуду и лежит далеко от границы области линейной неустойчивости на шкале волновых чисел. Если это условие не выполняется, то мы ограничимся случаем ДС на окружности (т. е. ДС с периодическими граничными условиями), когда применимо галёркинское приближение. Например, наиболее простой вариант этого приближения для уравнения (35) основан на поиске решения в виде

$$\xi(x, t) = A_0(t) + A_1(t) \sin kx + A_2(t) \cos 2kx. \quad (53)$$

Подстановка (53) в (35) дает при отбрасывании высших гармоник двумерную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \omega_1 A_1 + 2k^2 A_1 A_2, \\ \dot{A}_2 &= \omega_2 A_2 - 0,5k^2 A_1^2, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\omega_1 = 2\alpha k^2 - 1 - k^4$ и $\omega_2 = 4\alpha k^2 - 1 - 16k^4$ — линейные инкременты первой и второй гармоник, а A_0 выражается через A_1 и A_2 :

$$\dot{A}_0 = -A_0 - 0,5k^2 A_1^2 - 2k^2 A_2^2. \quad (55)$$

Фазовый портрет системы (54) изображен на рис. 6. В точке $A_1 = A_2 = 0$ находится седло. Другие особые точки существуют, если $\omega_1 \omega_2 < 0$; в точках

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{-\omega_1 \omega_2}}{k^2}, \quad A_2 = -\frac{\omega_1}{2k^2} \quad (56)$$

имеются фокусы, устойчивые при $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ и неустойчивые в обратном случае. Исходя прямо из (54), нетрудно доказать, что в случае

$\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ две ветви неустойчивой сепаратрисы, выходящие из седла, идут в фокусы (56), как изображено на рис. 6. Таким образом, в системе (54) отсутствуют предельные циклы, и при $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$ все траектории идут в устойчивые фокусы, что говорит об устойчивости стационарной ДС (53) — (56) в рамках приближения (53). Более точным является следующее приближение:

$$\begin{aligned} \xi &= A_0(t) + A_1(t) \sin [kx + \delta(t)] + A_2(t) \cos 2[kx + \\ &\quad + \delta(t)] + A_3(t) \sin 2[kx + \delta(t)]. \end{aligned} \quad (57)$$

Соответствующая динамическая система оказывается трехмерной:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \omega_1 A_1 + 2k^2 A_1 A_2, \\ \dot{A}_2 &= \omega_2 A_2 - 0,5k^2 A_1^2 + 4k^2 A_3^2, \\ \dot{A}_3 &= \omega_2 A_3 - 4k^2 A_2 A_3, \end{aligned} \quad (58)$$

а уравнения для A_0 и δ отщепляются аналогично (55):

$$\dot{A}_0 = -A_0 - 0,5k^2 A_1^2 - 2k^2 A_2^2 - 2k^2 A_3^2,$$

$$\dot{\delta} = -2k^2 A_3.$$

Система (58) имеет те же особые точки, что и (54) (лежащие на плоскости $A_3 = 0$), но фокусы (56) теряют устойчивость по направлению A_3 в трехмерном фазовом пространстве при условии

$$2\omega_1 + \omega_2 > 0. \quad (59)$$

Исследование асимптотической области фазового пространства в окрестности бесконечности показывает, что при $2\omega_1 + \omega_2 > 0$ в системе появляются траектории, уходящие на бесконечность.

В системе (58), так же как в (54), по-видимому, отсутствуют предельные циклы, поскольку в ней нет хопфовских бифуркаций. Таким образом, в случае $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 0$ и при выполнении условия (59) в исследуемой системе нет устойчивых особых точек и, по-видимому, нет предельных циклов. Если траектории системы уходят на бесконечность, то это означает, что в приближение Галёркина надо включить следующую гармонику (третью):

$$\xi = A_0 + A_1 \sin kx + A_2 \cos 2kx + A_3 \sin 3kx.$$

В случае $\omega_1, \omega_2 > 0$, $\omega_3 < 0$, когда в системе Галёркина без учета третьей гармоники отсутствуют стационарные состояния, ее учет приводит к появлению такого состояния:

$$A_1^2 = -\frac{\omega_2 \omega_3}{6k^4} \frac{1 + \sqrt{1 - 12\omega_1/\omega_3}}{2 - \sqrt{1 - 12\omega_1/\omega_3}},$$

$$A_2 = -\frac{\omega_3 + \sqrt{\omega_3(\omega_3 - 12\omega_1)}}{12k^4}, \quad A_3 = -\frac{2k^2 A_1 A_2}{\omega_3}.$$

Это решение существует, если $-\omega_1/\omega_3 < 1/4$. Изучение его устойчивости приводит к весьма громоздким вычислениям. Однако в некоторых случаях ответ получается легко. Например, если $\omega_2 = 0$ (в этот момент исчезает стационарное состояние в системе двух гармоник) и $\omega_3 = -4\omega_1$, то наше стационарное решение устойчиво.

4. РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ТРИГГЕРНАЯ СИСТЕМА

В этом разделе мы опишем свойства распределенной бистабильной (триггерной) системы

$$\dot{n} = n - n^3 + 0,5\Delta n + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (60)$$

которая описывает эффекты спонтанного нарушения симметрии в химических реакциях [32, 33], а также связана с биофизическими приложениями [34]. Очевидно, уравнение (60) имеет устойчивые однородные решения $n_1 = 1 + \varepsilon/2$, $n_2 = -1 + \varepsilon/2$ и неустойчивое однородное решение $n_3 = -\varepsilon$. Простейшее устойчивое нетривиальное решение описывает стенку между двумя полубесконечными доменами, заполненными фазами n_1 и n_2 , движущуюся со скоростью v в сторону менее устойчивой фазы n_2 :

$$n(t, x) = 0,5\varepsilon + th(x + vt), \quad v = 1,5\varepsilon. \quad (61)$$

В частности, в случае $\varepsilon = 0$ стенка (61) неподвижна [35]. Две соседние доменные стенки притягиваются друг к другу. В случае $\varepsilon = 0$ расстоя-

ние L между удаленными стенками изменяется со временем вследствие притяжения согласно уравнению

$$\dot{L} = -48 \exp(-2L), \quad (62)$$

если $L \gg 1$. Рассмотрим зародыш фазы n_1 , имеющий толщину L , внутри фазы n_2 . Если L больше критического размера

$$L_0 \approx 0.5 \ln \varepsilon^{-1}, \quad (63)$$

при котором скорости (61) и (62) компенсируются, то зародыш расстет. Если $L < L_0$, то он схлопывается. Неустойчивое стационарное решение уравнения (60), описывающее зародыш критического размера (63), имеет вид

$$n(x) = -1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{8(2-3\varepsilon)}{8 + 4\sqrt{2\varepsilon} \operatorname{ch} \left[2 \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon \right) x \right] - 4\varepsilon}. \quad (64)$$

Притяжение между соседними доменными стенками должно также приводить к неустойчивости периодической многодоменной структуры, имеющей следующий вид в случае $\varepsilon = 0$:

$$n(x) = \sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}} \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{2}{1+k^2}} x, k \right), \quad (65)$$

где $\operatorname{sn}(y, k)$ — эллиптический синус Якоби с модулем k , изменяющимся в пределах $0 < k < 1$. Период решения (65) равен $4K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл. Исследование устойчивости решения (65) показывает, что единственная неустойчивая мода малых возмущений

$$n_1(x) = 1 + \frac{2 - k^2 - 2\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{k^2} \cos \left(2 \operatorname{am} \sqrt{\frac{2}{1+k^2}} x - 1 \right), \quad (66)$$

(где $\operatorname{am} y$ — эллиптическая амплитуда Якоби) имеет половинный период $2K(k)$ и инкремент неустойчивости

$$\Omega = 2 \frac{\sqrt{1 - k^2 + k^4}}{1 + k^2} - 1. \quad (67)$$

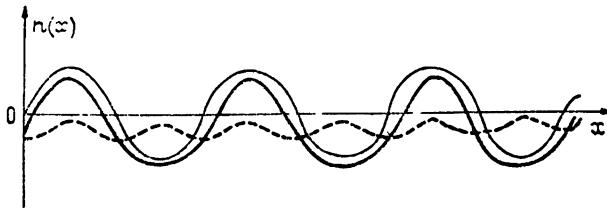


Рис. 7. Эволюция неустойчивого возмущения на фоне многодоменной структуры.

Простое геометрическое построение, выполненное на рис. 7, где невозмущенное решение изображено тонкой линией, возмущение — пунктиром, а полное возмущенное решение — жирной линией, показывает, что развитие возмущения (66) с инкрементом (67) на фоне многодоменной структуры (65) действительно может интерпретироваться как попар-

ное притяжение соседних стенок. Существенную роль играет при этом тот факт, что возмущение имеет половинный период. Кроме того, исходя из вида неустойчивого возмущения (66) и рис. 7, легко понять, что развитие этого возмущения на фоне периодической структуры (65) приводит, помимо попарного сближения стенок, ограничивающих домены, заполненные фазой $n > 0$, также к появлению ненулевого среднего по пространству значения $\langle n(x) \rangle < 0$, в то время как для невозмущенного решения $\langle n(x) \rangle = 0$. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая линейная стадия развития возмущения является начальным этапом процесса перестройки неустойчивой периодической структуры (65) в устойчивое однородное состояние $n(x) = -1$.

В многомерном случае причиной движения доменной стенки может быть также ее кривизна, т. е. поверхностное натяжение. Если R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны стенки в данной точке, то локальная скорость ее движения по нормали к поверхности стенки равна

$$v = 0,5(R_1^{-1} + R_2^{-1}). \quad (68)$$

В частности, неподвижная искривленная стенка $z = z(x, y)$ описывается уравнением $R_1^{-1} + R_2^{-1} = 0$ или

$$(1 + z_x^2)z_{yy} + (1 + z_y^2)z_{xx} = 2z_x z_y z_{xy}. \quad (69)$$

Стационарная неплоская стенка (69) неустойчива. Используя выражения для скоростей (61) и (68) и действуя по аналогии с выводом (63), можно вычислить критические радиусы R_c цилиндрического и R_s сферического зародышей фазы n_1 внутри фазы n_2 :

$$R_c = (3\varepsilon)^{-1}, \quad R_s = 2(3\varepsilon)^{-1}. \quad (70)$$

Существенное увеличение критических размеров (70) многомерных зародышей по сравнению с одномерным случаем (63) связано с влиянием поверхностного натяжения. В заключение этого раздела отметим, что в общем случае из нестационарного периодического либо убывающего на бесконечности решения уравнения (60) можно построить две строго неубывающие величины:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [n^2(x) - (1/4)\dot{n}^4(x) - (1/2)(\partial n/\partial x)^2 + \varepsilon n(x)]; \quad (71)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [(1/2)(\partial n/\partial x)^2 + (3/2)n^4(x) - n^8(x) - 3n^2(x)(\partial n/\partial x)^2 - (1/4)(\partial^2 n/\partial x^2)^2 + 2\varepsilon n^3(x)], \quad (72)$$

которые эволюционируют согласно уравнениям

$$dI_1/dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\dot{n}(x)]^2 dx \geq 0; \quad (73)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial \dot{n}}{\partial x} \right)^2 + 6n^2(x)\dot{n}^2(x) \right] dx \geq 0. \quad (74)$$

В случае $\varepsilon \ll 1$ плотность интегральной величины I_1 принимает большее значение на однородном решении $n \approx 1 + \varepsilon/2$, чем на втором однородном решении $n \approx -1 + \varepsilon/2$. Ввиду того, что $dI_1/dt \geq 0$, это означает, что локальное устойчивое однородное состояние $n \approx -1 + \varepsilon/2$ в действительности является метастабильным.

5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Во втором разделе мы получили двумерное решение уравнения (1) в виде вихрей с топологическим зарядом N . Известно, что вихри с зарядом $N > 1$ в релятивистской теории поля [36] и в сверхпроводниках [37] неустойчивы относительно распада на N единичных вихрей. Аналогичным свойством обладают вихри в распределенных автоколебательных системах [38]. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующую симметричную систему [39], являющуюся асимптотической формой некоторых систем, описывающих химическую кинетику с диффузией [51]:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -q + \varphi [p - (p^2 + q^2)p + \Delta p], \\ \dot{q} &= p + \varphi [q - (p^2 + q^2)q + \Delta q].\end{aligned}\quad (75)$$

Вихревое решение имеет вид

$$\zeta = p + iq = a_N(r) e^{-iN\theta+it}, \quad (76)$$

где функция $a_N(r)$ — особое решение уравнения (14) с асимптотикой при $r \rightarrow \infty$:

$$a_N(r) = 1 - \frac{N^2}{2r^2} - \frac{N^2(N^2 + 8)}{8r^4} + \dots \quad (77)$$

при $r \rightarrow \infty$:

$$a_N(r) = c_N r^N - \frac{c_N}{4(N+1)} r^{N+2} + \dots, \quad (78)$$

где c_N — константа.

Для приближенного описания монотонной функции $a_N(r)$ асимптотики (77) и (78) можно сшить в некоторой точке $r = r_0^{(N)}$, исходя из непрерывности функции $a_N(r)$ и ее производной. В результате получается

$$[r_0^{(N)}]^2 = \frac{N(N+2)}{2}, \quad c_N = \frac{2}{N+2} [r_0^{(N)}]^{-N}. \quad (79)$$

Переходя к исследованию устойчивости вихря (76), рассмотрим на его фоне малое возмущение [27]

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= r^{-1/2} \chi(r) \exp [\Omega t + i(t - n\theta)], \\ n &< N.\end{aligned}\quad (80)$$

Подстановка (80) и (76) в (75) приводит к уравнению Шредингера для функции $\chi(r)$ с потенциалом

$$U(r) = \frac{(n^2 - 1/4)}{r^2} + 2a_N^2(r) - 1 \quad (81)$$

и энергией

$$E = -\varphi^{-1} \Omega. \quad (82)$$

Таким образом, связанные отрицательные уровни энергии в потенциале (81) соответствуют, согласно (82), неустойчивым модам. Используя (77) — (79), легко убедиться, что в случае $N = 1$ отрицательные уровни отсутствуют, а при $N = 2$ есть отрицательный уровень с $n = 1$, причем, согласно (80), соответствующая неустойчивая мода является

дипольной, т. е. соответствует выделению единичного вихря из двойного. Аналогично доказывается неустойчивость вихрей с $N > 2$.

В отличие от безграничного двумерного случая в одномерном случае топологический заряд может изменяться при эволюции системы. Если мы рассмотрим, например, систему (75) на окружности радиуса r , то топологический заряд решения может изменяться скачком на любое целое число в тот момент времени, когда появляются так называемые «точки проскальзывания фазы» [40], в которых $|\zeta| = 0$, а $\arg \zeta$ не определен. Решения системы (75) с топологическим зарядом N на окружности радиуса r имеют вид

$$\zeta_N = \sqrt{1 - (N^2/r^2)} \exp(it - iN\theta). \quad (83)$$

Хорошо известно, что аналогичные решения на безграничной прямой были бы устойчивы при $N^2 < (1/3)r^2$ [52]. В случае окружности это условие несколько ослабляется. В самом деле, собственные моды малых возмущений на фоне решения (83) пропорциональны $\exp[\Omega t + i(N/r + \kappa)x]$, а инкремент Ω и волновое число κ связаны дисперсионным соотношением [52]

$$\Omega = -\kappa^2 - \left(1 - \frac{N^2}{r^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{N^2}{r^2}\right)^2 + \frac{4N^2}{r^2}\kappa^2}. \quad (84)$$

При $\kappa = 0$, как видно из (84), $\Omega \leq 0$. При $\kappa > 0$ условие устойчивости $\Omega \leq 0$ сводится, как видно из (84), к

$$2 + \kappa^2 < 6N^2/r^2. \quad (85)$$

В случае безграничной прямой κ может принимать любые значения и из (85) вытекает $N^2/r^2 < 1/3$. В случае окружности оно принимает дискретные значения $\kappa_n = n/r$, $n = 0, 1, 2, \dots$. С учетом отсутствия неустойчивости при $\kappa = 0$ условие (85) сводится поэтому к следующему окончательному неравенству:

$$N^2 < (1/6)(2r^2 + 1).$$

Таким образом, некоторые решения, неустойчивые на бесконечной прямой, могут оказаться устойчивыми на окружности.

В заключение авторы выражают благодарность А. П. Алдушину, С. И. Анисимову, В. И. Арнольду, Ю. И. Балкарею, А. И. Вольперту, А. М. Жаботинскому, В. И. Кринскому, Е. А. Кузнецовой, С. В. Манакову, Л. А. Островскому, М. И. Рабиновичу, Я. Г. Синаю, М. И. Трибельскому и Д. С. Чернавскому за полезные обсуждения различных вопросов, затронутых в данной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Простая динамическая система со стохастическим поведением

Как известно, в большинстве случаев стохастические свойства конкретных динамических систем могут быть установлены только с существенным использованием численного эксперимента [41]. Однако в трехмерных динамических системах, допускающих разделение быстрых и медленных движений, такое исследование можно, в принципе, выполнить аналитически [42]. Изоклина медленных движений в фазовом пространстве таких систем имеет Z-образную форму (рис. 8), т. е. состоит из двух устойчивых листов, ограниченных линиями срыва AA и BB, между которыми расположен неустойчивый лист. Медленные движения совершаются вдоль устойчивых листов, а быстрые дви-

жения представляют собой перескоки между листами, совершаемые параллельно оси z при достижении изображающей точкой линии срыва. В том случае, когда устойчивые листы являются плоскими, движение на них описывается линейными уравнениями, и стохастичность наблюдается, если на каждом из листов имеется неустойчивый фокус [43]. Если же изоклина обладает кривизной, то эти фокусы, вообще говоря, будут окружены предельными циклами. В данном разделе мы изучим модельную динамическую систему такого типа. Она состоит из двух квазигармонических предельных циклов (рис. 9), пересеченные линиями срыва (сплошные) и возврата (пунктирные).

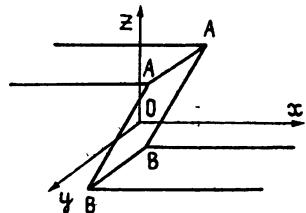


Рис. 8.

Рис. 8. Z-образная изоклина медленных движений.

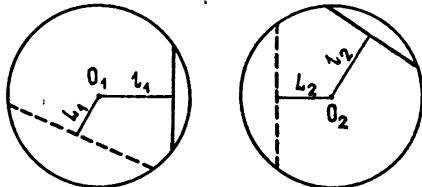


Рис. 9.

Рис. 9. Модельная динамическая система, состоящая из двух предельных циклов, связанных перескоками.

Обозначим радиусы предельных циклов R_1 и R_2 , расстояния от фокусов O_1 и O_2 до линий срыва — l_1 и l_2 , расстояния до линий возврата — L_1 и L_2 . Изображающая точка, достигнув линии срыва внутри одного цикла, перепрыгивает на линию возврата второго цикла. Мы предполагаем, что отрезки линий срыва внутри каждого из циклов целиком проектируются внутрь линий возврата другого цикла, что обеспечивает неравенствами

$$R_1^2 - l_1^2 < R_2^2 - L_2^2, \quad R_2^2 - l_2^2 < R_1^2 - L_1^2. \quad (\text{П.1})$$

Мы будем также предполагать

$$l_i > L_i, \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.2})$$

Движение внутри циклов описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu_i [R_i^2 - (x^2 + y^2)] x, \\ \dot{y} &= -x + \mu_i [R_i^2 - (x^2 + y^2)] y, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\mu_i \ll 1, \quad i = 1, 2.$$

Как следует из (П.3), радиус фазовой траектории $R^2 \equiv x^2 + y^2$ медленно изменяется со временем:

$$\begin{aligned} R^2(t) &= R_i^2 [1 + (R_i^2 - r^2) t^{-2} \exp(-2\mu_i t)]^{-1}, \\ r &= R(0) < R_i. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Стохастичность в динамической системе обеспечивается растягивающим характером отображения Пуанкаре [44]. Для данной системы мы определим это отображение как отображение одной из линий возврата в себя. Растягивающий либо сжимающий характер фазового потока в рассматриваемой системе обусловлен двумя факторами: геометрическим и динамическим. Рассмотрим малый отрезок длины dh

на линии возврата. Если пренебречь медленным изменением радиуса R в соответствии с (П.4), то фазовый поток перенесет этот отрезок в отрезок dh' на линии срыва, причем геометрический фактор

$$x_D \equiv \frac{dh'}{dh} = \sqrt{\frac{R^2 - L_i^2}{R^2 - l_i^2}}. \quad (\text{П.5})$$

Изменение радиуса траектории со временем, т. е. динамика подсистемы медленных движений, приводит к разбеганию соседних траекторий вблизи фокуса и к их сближению вблизи цикла. Для вычисления динамического фактора x_D можно продифференцировать (П.4) по r :

$$x_D \equiv \frac{dR}{dr} = \frac{R_i^3 e^{-2\mu_i t}}{[r^2 + (R_i^2 - r^2) e^{-2\mu_i t}]^{3/2}}. \quad (\text{П.6})$$

Используя (П.5) и (П.6), а также (П.1) и (П.2), можно получить нижнюю оценку x_0 для полного локального коэффициента растяжения x отображения Пуанкаре:

$$\begin{aligned} x \equiv x_D x_0 &\geq x_0 = \sqrt{(R_1^2 - L_1^2)(R_2^2 - L_2^2)/(R_1^2 - l_1^2)(R_2^2 - l_2^2)} \times \\ &\times \exp[-4\pi(\mu_1 + \mu_2)]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Таким образом, условие

$$x_0 > 1 \quad (\text{П.8})$$

обеспечивает растягивающий характер отображения Пуанкаре для траекторий, прыгающих между циклами. Необходимо также рассмотреть траектории, раскручивающиеся внутри циклов без перескоков (в областях $R^2 < l_i^2$). С помощью (П.4) можно убедиться, что растягивающий характер однократного отображения Пуанкаре для этих траекторий обеспечивается неравенствами

$$l_i^2 < R_i^2/3. \quad (\text{П.9})$$

В случае, когда (П.9) не выполняется, вместо однократного следует рассмотреть многократное отображение. Для доказательства стохастичности достаточно убедиться в растягивающем характере такого отображения. Соответствующее условие мы приведем для симметричного случая $R_1 = R_2 \equiv R_0$, $\mu_1 = \mu_2$, $l_1 = l_2 \equiv l$, $L_1 = L_2 \equiv L$:

$$(3l/4R_0^3) \sqrt{(3/\pi\mu)(R_0^2 - 3L^2)(R_0^2 - l^2)} > 1. \quad (\text{П.10})$$

При записи (П.10) предполагалось, что $R_0^2 > 3L^2$; противоположный случай может быть рассмотрен аналогично. Количественной характеристикой стохастичности служит энтропия Колмогорова — Синай σ [45]. Используя оценки (П.7) и (П.10), можно получить оценку снизу для энтропии рассматриваемой системы:

$$\sigma \geq \sigma_0 = \mu \ln \mu^{-1} / \ln [l^2(R_0^2 - L^2)L^{-2}(R_0^2 - l^2)^{-1}].$$

Большой интерес представляет вопрос о волнах в системах диффузионно связанных стохастических осцилляторов. В качестве простейшей модели такого рода можно рассмотреть среду из осцилляторов Пиковского-Рабиновича [43] (которые представляют собой рассмотренную выше динамическую систему в предельном случае $R_0 \rightarrow \infty$). В случае обычной диффузии эта модель описывается уравнениями:

$$\dot{x} = az + y + \mu x + \Delta x,$$

$$\dot{y} = bz - x + \mu y + \Delta y, \quad (\text{П.11})$$

$$\varepsilon \dot{z} = (x - z)(z^2 - 1), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где лапласиан Δ действует на пространственные координаты ξ , а в случае перекрестной диффузии — уравнениями

$$\dot{x} = az + y + \mu x + \Delta y,$$

$$\dot{y} = bz - x + \mu y - \Delta x,$$

$$\varepsilon \dot{z} = (x - z)(z^2 - 1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

На каждом из двух устойчивых листов изоклины медленных движений (рис. 8) удобно ввести координаты

$$x^{(\pm)} = x \mp \frac{b - \mu a}{1 + \mu^2}, \quad y^{(\pm)} = y \pm \frac{a + \mu b}{1 + \mu^2}, \quad (\text{П.13})$$

где индекс «+» относится к верхнему, а «—» — к нижнему листам. На каждом из листов уравнения движения линейны, и их общие решения имеют вид волновых пакетов:

$$x^{(\pm)} - iy^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{(\pm)}(k) \exp [(\mu - k^2)t + it - ik\xi] dk \quad (\text{П.14})$$

в случае (П.11) и

$$x^{(\pm)} - iy^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{(\pm)}(k) \exp [\mu t + i(1 - k^2)t - ik\xi] dk \quad (\text{П.15})$$

в случае (П.12). Здесь $u^{(\pm)}(k)$ — спектральная плотность пакета. Как видно из (П.11) и (П.12), когда в точке с координатой ξ переменная $x(\xi, t)$ достигает значения $u = 1$, в этой точке происходит срыв с одного листа изоклины на другой. Обозначим $\tau(\xi)$ момент срыва в данной точке. Тогда после срыва, например, с верхнего листа на нижний, дальнейшая эволюция решения определяется вместе с самой функцией $\tau(\xi)$ граничным условием, получаемым подстановкой $u = 1$ в (П.13):

$$x^{(-)}(\tau(\xi), \xi) = 1 + (b - \mu a)/(1 + \mu^2), \quad (\text{П.16})$$

$$y^{(-)}(\tau(\xi), \xi) = y^{(+)}(\tau(\xi), \xi) - 2(a + \mu b)/(1 + \mu^2).$$

Основной вопрос состоит в том, как спектр $u^{(+)}(k)$ преобразуется в $u^{(-)}(k)$ в результате перескока. Возьмем $u^{(+)}(k)$ в виде

$$u^{(+)}(k) = u_0^{(+)} \exp (-a^{(+)}k^4 + iL^{(+)}k^2), \quad a^{(+)} > 0 \quad (\text{П.17})$$

в случае (П.11) и

$$u^{(+)}(k) = u_0^{(+)} \exp (ia^{(+)}k^4 - L^{(+)}k^2), \quad L^{(+)} > 0 \quad (\text{П.18})$$

в случае (П.12). Предположим, что после перескока спектр сохраняет форму (П.17), (П.18), с заменой константы $u_0^{(+)}$ на некоторую гладкую предэкспоненциальную функцию $u_0^{(-)}(k)$ и с заменой констант $a^{(+)}, L^{(+)}$ на новые константы $a^{(-)}, L^{(-)}$. Подставляя тогда (П.17) в (П.11) и (П.18) в (П.12), легко убедиться, что соответствующие ин-

тегралы по dk могут быть вычислены при больших t, ξ в перевальном приближении. Используя далее граничные условия (П. 16), можно получить формулы, описывающие преобразование спектра:

$$L^{(-)} = \frac{[L^{(+)}]^3}{9 [2a^{(+)} - L^{(+)}]^2}, \quad a^{(-)} = \frac{1}{3} L^{(-)} \quad (\text{П.19})$$

в случае (П.11) — (П.17) и

$$L^{(-)} = 3\mu a^{(+)}, \quad a^{(-)} = a^{(+)} \quad (\text{П.20})$$

в случае (П. 12) — (П. 18). Формула (П. 19) справедлива, если $3a^{(+)} > L^{(+)} > 0$ и $2a^{(+)} \neq L^{(+)}$, а (П.20) — если $3\mu a^{(+)} > L^{(+)} > 0$. Отметим, что спектры, полученные в (П. 19) и (П.20), инвариантны относительно повторного применения этих спектральных преобразований.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Теория возмущений для нелинейного уравнения Шредингера в бессолитонном секторе

В последнее время быстро развивается теория возмущений, основанная на методе обратной задачи рассеяния [46, 47]. Посвященные этой теме работы содержат задачи о влиянии возмущения на односолитонное [47, 48], либо двухсолитонное [49] состояние, причем многие из этих задач могут быть эффективно решены прямыми методами [50], не использующими техники обратной задачи. В то же время изучение эволюции диспергирующих волновых пакетов с учетом возмущения требует существенного использования этой техники. Рассматривается нелинейное уравнение Шредингера:

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = i\varepsilon R, \quad (\text{П.21})$$

где ε — малый параметр, а R — возмущение, которое мы будем брать в виде

$$R = |u|^{2N}u \quad (\text{П.22})$$

либо

$$R = |u|^{2N}u^*. \quad (\text{П.23})$$

Вводя затем стандартные данные рассеяния из сплошного спектра $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, где λ — спектральный параметр, возмущенное уравнение движения (П.21) можно переписать в виде уравнений движения для этих переменных [46, 47]. Удобно перейти от них к каноническим переменным $n(\lambda) = \pi^{-1} \ln |a(\lambda)|^{-2}$, $\varphi(\lambda) = \arg b(\lambda)$:

$$\begin{aligned} n(\lambda) = & \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{Im} \{b(\lambda)/a(\lambda) [\varepsilon (\psi_2^{(2)*}(x, \lambda))^2 R(x) - \\ & - \varepsilon^* (\psi_2^{(1)*}(x, \lambda))^2 R^*(x)]\}, \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) - 4\lambda^2 = & \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \{a(\lambda)/b(\lambda) [\varepsilon^* (\psi_2^{(2)}(x, \lambda))^2 R^*(x) - \\ & - \varepsilon (\psi_2^{(1)}(x, \lambda))^2 R(x)] - 2\varepsilon \psi_2^{(1)}(x, \lambda) \psi_2^{(2)*}(x, \lambda) R(x)\}, \end{aligned}$$

где $\psi_2^{(1, 2)}(x, \lambda)$ — компоненты йостовской функции [16]. В общем случае уравнения (П.24) бесполезны, так как, помимо данных рассеяния,

они содержат юстовские функции и сам потенциал $u(x)$. Однако в двух случаях уравнения (П.24) могут быть приведены к замкнутому виду.

Первым является тот случай, когда начальное условие $u_0(x) = A_0(x) \exp[i\Phi(x)]$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\Phi_{0xx} \gg \left| \frac{d}{dx} \ln A_0(x) \right|^2, \quad \Phi_{0xx} \gg \left| \frac{d}{dx} \ln \Phi_{0xx} \right|^2 \quad (\text{П.25})$$

(напомним, что достаточный признак отсутствия солитонов в начальном условии сводится к неравенству $\int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x) dx < \ln(2 + \sqrt{3})$).

Как известно [18], в случае (П.25) прямая и обратная задачи рассеяния могут быть явно решены в квазиклассическом приближении. В результате удается получить замкнутые выражения для $n(\lambda)$ и сдвига частот $\Delta\omega(\lambda) = \varphi(\lambda) - 4\lambda^2$ в случае возмущения (П.22):

$$\begin{aligned} n(\lambda) = & 2^{2N+1/2} \pi^{-1/2} \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}^{-N}(\lambda) n^{N+1/2}(\lambda) e^{\pi n(\lambda)} \times \\ & \times \sqrt{1 - e^{-\pi n(\lambda)}} \operatorname{Im} \{ e^{i\chi(\lambda)} [(e/2)(1 + e^{-\pi n(\lambda)})^2 \times \\ & \times \Gamma^2(1 + in(\lambda)) \Gamma^{-2}(1 + (i/2)n(\lambda)) + (\varepsilon^*/\pi) \times \\ & \times (1 - e^{-\pi n(\lambda)/2})^2 n^{-1}(\lambda) \Gamma^2(1 + (i/2)n(\lambda)) e^{2in(\lambda)\ln 2}] \}; \\ \Delta\omega(\lambda) = & 2^{2N-1/2} \pi^{1/2} e^{\pi n(\lambda)/2} \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}^{-N}(\lambda) n^{N+1/2}(\lambda) \times \\ & \times \{ e^{-\pi n(\lambda)} (1 - e^{-\pi n(\lambda)})^{-1/2} \operatorname{Re} \{ e^{i\chi(\lambda)} [(1/2)\varepsilon^*(1 + e^{-\pi n(\lambda)})^2 \times \\ & \times \Gamma^2(1 - in(\lambda)) \Gamma^{-2}(1 - (i/2)n(\lambda)) + (\varepsilon/\pi)(1 - e^{-\pi n(\lambda)})^2 n^{-1}(\lambda) \Gamma^2 \times \\ & \times (1 - (i/2)n(\lambda)) e^{-2in(\lambda)\ln 2}] \} - (\varepsilon/2\pi)[1 - e^{-2\pi n(\lambda)}] \times \\ & \times n^{-1/2}(\lambda) \operatorname{Im} \{ \Gamma[1 + in(\lambda)] e^{-in(\lambda)\ln 2} \times \\ & \times \exp[\arg \Gamma(1 - (i/2)n(\lambda))] \}. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Здесь

$$\chi(\lambda) = -n(\lambda) \ln 2 + \arg a(\lambda) - L_1^{(0)}(\lambda) - L_2^{(0)}(\lambda) + \arg \Gamma[in(\lambda)],$$

$$\arg a(\lambda) = (1/2) \int_{-\infty}^{+\infty} n(\lambda') d\lambda' (\lambda' - \lambda)^{-1},$$

$$\tilde{\theta}(\lambda) = \varphi_0(\lambda) + 4\lambda^2 t + L_1^{(0)}(\lambda) - L_2^{(0)}(\lambda) + (\pi/4) + \arg \Gamma[in(\lambda)],$$

$$L_1^{(0)}(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \ln(\lambda' - \lambda) (d/d\lambda') n(\lambda') d\lambda',$$

$$L_2^{(0)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \ln(\lambda - \lambda') (d/d\lambda') n(\lambda') d\lambda', \quad (\text{П.27})$$

Γ — гамма-функция. Уравнения (П.26) и (П.27) содержат информацию об эволюции величин, имеющих прямой физический смысл, так как $n(\lambda)$ являются числами заполнения нормальных мод, а $\varphi(\lambda)$ — соответствующие фазы. Числа заполнения испытывают под действием возмущения (П.22) медленную систематическую эволюцию; в случае

$N > 1$ за бесконечное время действия возмущения они сдвигаются на конечные малые величины $\Delta n = \int_0^\infty \dot{n}(\lambda, t) dt$. В случае возмущения

(П. 23) также можно получить замкнутые уравнения, которые приводят в этом случае к совершенно иному результату: канонические переменные $n(\lambda)$ и $\phi(\lambda) - 4\lambda^2 t$ испытывают вместо систематической эволюции малые колебания с минимальной частотой $8\lambda^2$ вблизи невозмущенных значений. Условия (П. 25) позволяют также явно вычислить возмущение самого потенциала $u(x, t)$.

Второй случай, когда уравнения (П. 24) могут быть приведены к замкнутому виду, характеризуется начальным условием, сосредоточенным в области спектра $|\lambda| \geq \Lambda$, причем предполагается, что $|\varepsilon|^{-1} \gg (4\Lambda^2)^{-1}$. В этом случае уравнения (П. 24) следует усреднить по быстрым невозмущенным фазовым колебаниям с периодами $T \geq (4\Lambda^2)^{-1}$. В результате удается получить решение задачи Коши для эволюции возмущенных канонических переменных, которое мы не выписываем здесь из-за его громоздкости. Это решение в случае возмущения (П. 22) снова описывает систематическую эволюцию, а в случае возмущения (П. 23) усреднение приводит, естественно, к нулевому результату.

ЛИТЕРАТУРА

1. Springer Series in Synergetics, vols. 1–6, Berlin, Springer Verlag, 1977–1981.
2. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. — М.: Наука, 1974.
3. Рабинович М. И.—Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 477.
4. Львов В. С. и др.—ЖЭТФ, 1981, 80, с. 1099.
5. Кернер Б. С., Осипов В. В.—ЖЭТФ, 1980, 79, с. 2218.
6. Степанова Н. М., Романовский Ю. М., Черновский Д. С. Математическое моделирование в биофизике.—М.: Наука, 1975.
7. Кринский В. И., Яхно В. Г.—В сб. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.—Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
8. Алдущин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.—ДАН СССР, 1980, 251, с. 1102.
9. Алдущин А. П., Маломед Б. А.—Физика горения и взрыва, 1981, 17, № 1, с. 3.
10. Sivashinsky G. I.—Acta Astron., 1977, 4, p. 1177.; SIAM J. Appl. Math., 1980, 39, p. 67.
11. Анисимов С. И., Гольберг С. М., Маломед Б. А., Трибельский М. И., Трофимова О. В. Тезисы VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн.—Львов: 1981.
12. Зельдович Я. Б.—ЖФХ, 1938, 11, с. 685.
13. Гидродинамическая неустойчивость.—М.: Мир, 1963.
14. Langer J. C.—Rev. Mod. Phys., 1980, 52, p. 1.
15. Turing A. M.—Phil. Trans. Roy. Soc., 1952, 237, p. 37.
16. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов.—М.: Наука, 1980.
17. Алдущин А. П., Каспарян С. Г.—ДАН СССР, 1979, 244, с. 67.
18. Балкарэй Ю. И., Никулин М. Г.—ЖТФ, 1979, 49, с. 231.
19. Ивлева Т. Г., Мержанов А. Г., Шкадинский К. Г.—Физика горения и взрыва, 1980, 16, № 2, с. 3.
20. Мержанов А. Г., Филоненко А. К., Боровинская И. П.—ДАН СССР, 1973, 208, с. 892.
21. Алдущин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.—В сб.: Горение гетерогенных и конденсированных систем (труды VI Всесоюзного симпозиума по горению и взрыву).—Черноголовка: 1980, с. 104.
22. Greenberg J. M.—SIAM J. Appl. Math., 1980, 39, p. 301.
23. Алдущин А. П., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Препринт ИКИ АН СССР № 596.—М., 1980;—Comb. Flame, 1981, 42, p. 1.
24. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Бюл. Моск. ун-та, 1933, сер. А, 1; Вопросы кибернетики.—М.: АН СССР, 1975, вып. 12, с. 3. 1953.
25. Fisher L.—Ann. Eugenics, 1937, 7, p. 355.
26. Маломед Б. А.—ДАН СССР, 1981, 256, № 6, с. 1363.
27. Маломед Б. А.—ЖТФ, 1981, 51, с. 2476.
28. Алдущин А. П., Каспарян С. Г., Шкадинский К. Г.—ДАН СССР, 1979, 247, с. 1112.

29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. — Механика сплошных сред. — М.: Наука, 1953.
30. Зельдович Я. Б. — ПМТФ, 1963, № 6.
31. Michelson D. M., Sivashinsky G. I. — Acta Astron., 1977, 4, p. 1207.
32. Nitzan A. et al. — J. Chem. Phys., 1974, 61, p. 1056.
33. Nicolis G., Prigogine I. — Proc. NAS (USA), 1981, 78, p. 659.
34. Lifshitz M. A., Gurija G. T., Belintsev B. N., Volkenstein M. V. — I. Math. Biol., 1981, 11, p. 295.
35. Веггу R. S., Schlogle F. — Phys. Rev., 1980, A18, p. 2078.
36. Поляков А. М. — ЖЭТФ, 1975, 68, с. 1975.
37. Абрикосов А. А. — ЖЭТФ, 1957, 32, с. 1442.
38. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. — ДАН СССР, 1980, 254, с. 92.
39. Howard L. N., Koppen L. — Stud. Appl. Math., 1977, 56, p. 95.
40. Langer J. S., Ambegaokar V. — Phys. Rev., 1967, 164, p. 498.
41. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, с. 123.
42. Rössler O. E. — Zs. Naturforsch., 1976, 31a, p. 259.
43. Пиковский А. С., Рабинович М. И. — ДАН СССР, 1978, 239, с. 301; Physica, 1981, D2, p. 3.
44. Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I. — SIAM J. Appl. Math., 1981, 40, p. 255.
45. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М: Наука, 1980.
46. Каир Д. J. — SIAM J. Appl. Math., 1976, 31, p. 133.
47. Карпман В. И., Маслов Е. М. — ЖЭТФ, 1977, 73, с. 537.
48. Kaup D. J., Newell A. C. — Proc. Roy. Soc., 1978, A301, p. 413.
49. Newell A. C. — J. Math. Phys., 1977, 18, p. 922.
50. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В. — ТИИР, 1974, 62, с. 113.
51. Duffy M. R., Britton N. F., Миггау J. D. — SIAM J. Appl. Math., 1980, 39, p. 8.
52. Кузнецов Е. А. Диссертация. М., 1981.
53. Barenblatt G. I., Zeldovich Ya. B. — Comb. Flame, 1959, 42, № 2.
54. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. — ДАН СССР, 1938, 19, с. 693.
55. Баренблatt Г. И., Зельдович Я. Б., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. — М: Наука, 1980.

Институт химической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
4 января 1982 г.

**Институт прикладной физики АН СССР готовит к печати
сборник**

**«ВОЗДЕЙСТВИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН
НА МОРСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ»**

(Отв. редактор — Е. Н. Пелиновский)

Сборник включает статьи, посвященные теоретическому анализу процессов воздействия внутренних волн на морскую поверхность (взаимодействие внутренних и поверхностных волн, роль пленок поверхностно-активных веществ на морской поверхности, перестройка полей плотности, скорости и турбулентности под действием внутренних волн), формирования оптических, радиолокационных и инфракрасных изображений внутренних волн на морской поверхности. Кроме того, в сборнике подытожены результаты натурных исследований взаимосвязи внутренних и поверхностных волн с помощью контактных и дистанционных систем во время экспедиций на НИС «Академик Вернадский» и «Дмитрий Менделеев», а также лабораторного моделирования процессов взаимодействия внутренних и поверхностных волн.

Сборник предназначен для специалистов в области радиофизических методов исследования океана, а также океанологов, занимающихся верхним слоем океана и взаимодействием океана с атмосферой.

Объем сборника — 10 печ. л., цена — 1 р. 50 к.

Заказы просим направлять по адресу: 603600, г. Горький, ГСП-120, ул. Ульянова, 46, ИПФ АН СССР, редакционно-издательская группа.