

УДК 537.876.23

О НЕПРЕРЫВНОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ОТСУТСТВИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

Ю. Я. Яшин, В. А. Яшнов

Рассматривается линейная трансформация нормальных волн в трехмернеоднородных средах. На основе системы связанных уравнений для амплитуд взаимодействующих волн получен первый интеграл, имеющий смысл закона сохранения полного потока энергии. С помощью асимптотических методов получено решение, справедливое как в области взаимодействия, так и вдали от нее. Записаны критерии, определяющие степень связанности волн и радиус взаимодействия, внутри которого происходит заметная трансформация энергии из одной нормальной волны в другую.

Рассмотрению линейного взаимодействия нормальных волн в неоднородных средах в отсутствие поляризационного вырождения посвящено большое число работ (см., например, [1-15]). В настоящее время эффективным методом, позволяющим решать указанную задачу, является «квазиизотропное» приближение [4]. Однако этот метод, описывая достаточно хорошо поле вблизи точки выхода волн из анизотропной среды в изотропную при $|\Delta n| \ll 1$ ($\Delta n = n_1 - n_2$, n_1 и n_2 — показатели преломления нормальных волн), не позволяет непрерывно продолжить соответствующие решения вглубь анизотропной среды. Процедура сшивания решений в общем случае весьма сложна [5, 6].

В данной работе рассматривается линейная трансформация нормальных волн в трехмернеоднородных средах. Получена система связанных уравнений для амплитуд взаимодействующих волн. На основе этой системы записан первый интеграл, имеющий смысл закона сохранения полного потока энергии взаимодействующих волн. Получены критерии, определяющие степень связанности волн, а также радиус взаимодействия, внутри которого происходит заметная трансформация энергии из одной волны в другую.

Заметим, что ниже рассматривается только случай сильного взаимодействия — когда параметры, характеризующие величину эффекта взаимодействия, больше или порядка $(kL)^{-1}$ ($k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, L — характерный масштаб неоднородности среды). Такое взаимодействие происходит в окрестности точек синхронизма, где $n_1 \approx n_2$. Здесь предполагается, что вдоль исходного луча существует конечное число точек синхронизма.

В качестве примера решены задачи о взаимодействии нормальных волн в среде, свойства которой меняются по косинусоидальному закону. Рассмотрены также математически сходные задачи, которые описываются аналогичными системами уравнений, в частности, нелинейные задачи. В этих случаях построено решение на основе ряда теории возмущений, определен радиус взаимодействия.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛН

В качестве исходных уравнений рассмотрим уравнения Максвелла для монохроматических волн

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0 \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0 \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

\mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей волны, $k_0 = \omega/c$, ω — циклическая частота, c — скорость света в вакууме, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ — тензор диэлектрической проницаемости среды. Будем искать решение в виде асимптотического ряда

$$\mathbf{E} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_{\alpha}^{(m)}}{(ik_0)^m} e^{ik_0 \varphi_{\alpha}}, \quad \mathbf{H} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_{\alpha}^{(m)}}{(ik_0)^m} e^{ik_0 \varphi_{\alpha}}, \quad (2)$$

где φ_{α} — собственные решения уравнения эйконала

$$\det \| A_{ij} \| \equiv \det \| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \| = 0 \quad (3)$$

$$(n_{\alpha} \equiv \nabla \varphi_{\alpha}).$$

Из условия совместности систем уравнений первого приближения по параметру $1/ik_0$ получаем систему уравнений для амплитуд нормальных волн в нулевом приближении. Число таких уравнений равно количеству линейно-независимых собственных векторов однородной системы нулевого приближения

$$([n \mathbf{E}^{(0)}]_{\alpha} - \mathbf{H}^{(0)})_{\alpha} = 0, \quad ([n \mathbf{H}^{(0)}] + \hat{\varepsilon} \mathbf{E}^{(0)})_{\alpha} = 0. \quad (4)$$

Условия совместности имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(0)} X_{\alpha}^{(m-1)} - \tilde{\mathbf{H}}_{\alpha}^{(0)} Y_{\alpha}^{(m-1)} + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(0)} X_{\beta}^{(m-1)} - \\ - \tilde{\mathbf{H}}_{\alpha}^{(0)} Y_{\beta}^{(m-1)}) \exp(-ik_0 \psi_{\alpha\beta}) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_{\alpha}^{(0)} \tilde{X}_{\alpha}^{(m-1)} - \mathbf{H}_{\alpha}^{(0)} \tilde{Y}_{\alpha}^{(m-1)} + \sum_{\alpha \neq \beta} (\mathbf{E}_{\alpha}^{(0)} \tilde{X}_{\beta}^{(m-1)} - \mathbf{H}_{\alpha}^{(0)} \tilde{Y}_{\beta}^{(m-1)}) \exp(-ik_0 \psi_{\alpha\beta}) = 0; \quad (6)$$

$$i \sum_{\alpha \neq \beta} [\tilde{\mathbf{E}}_{\alpha}^{(0)} ([n_{\beta} \mathbf{H}_{\beta}^{(m)}] + \hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{\beta}^{(m)}) - \tilde{\mathbf{H}}_{\alpha}^{(0)} ([n_{\beta} \mathbf{E}_{\beta}^{(m)}] - \mathbf{H}_{\beta}^{(m)})] \exp(-ik_0 \psi_{\alpha\beta}) = 0; \quad (7)$$

$$i \sum_{\alpha \neq \beta} [\mathbf{E}_{\alpha}^{(0)} ([\tilde{n}_{\beta} \tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^{(m)}] + \hat{\varepsilon} \tilde{\mathbf{E}}_{\beta}^{(m)}) - \mathbf{H}_{\alpha}^{(0)} ([\tilde{n}_{\beta} \tilde{\mathbf{E}}_{\beta}^{(m)}] - \tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^{(m)})] \exp(-ik_0 \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) = 0, \quad (8)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$X_{\alpha}^{(m)} = -\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\alpha}^{(m)}; \quad Y_{\alpha}^{(m)} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\alpha}^{(m)}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha} + \tilde{\varphi}_{\beta}.$$

Строго говоря, условиями совместности являются равенства нулю суммы левых частей (5) и (7), а также (6) и (8). Приведенное выше разбиение позволяет, во-первых, записать независимые уравнения для амплитуд m -го и $m-1$ -го приближений и, во-вторых, дает N дополнительных соотношений (7) и (8) для определения векторов поляризации в m -м приближении. Отметим, что $i\varphi_{\alpha} = (i\varphi_{\alpha})^*$. В частности, при эрмитовой матрице A_{ij} $\tilde{\varphi}_{\alpha} = -\varphi_{\alpha}$, $\tilde{\mathbf{E}}_{\alpha} = \mathbf{E}_{\alpha}^*$, $\tilde{\mathbf{H}}_{\alpha} = \mathbf{H}_{\alpha}^*$. Если антиэрмитова часть матрицы A_{ij} не равна нулю, то $\operatorname{Re} \tilde{\varphi}_{\alpha} = -\operatorname{Re} \varphi_{\alpha}$, $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}_{\alpha} = \operatorname{Im} \varphi_{\alpha}$, а свойства векторов поляризации \mathbf{f}_{α} определены, например, в [16].

Заметим, что параметр разложения k_0 присутствует в уравнении нулевого приближения. Следовательно, решение системы уравнений нулевого приближения будет также зависеть от параметра k_0 . Это означает, что разложение (2) является частным случаем составного асимптотического разложения [17]*.

Вводя обозначения $E_\alpha^{(0)} = \Phi_\alpha f_\alpha$, $H_\alpha^{(0)} = \Phi_\alpha h_\alpha = \Phi_\alpha [n_\alpha f_\alpha]$, $a_{\alpha\beta} = (16\pi)^{-1} c (\tilde{h}_\alpha \text{rot } \tilde{f}_\beta - \tilde{f}_\alpha \text{rot } \tilde{h}_\beta)$, $s_{\alpha\beta} = (16\pi)^{-1} c ([\tilde{f}_\alpha \tilde{h}_\beta] + [\tilde{f}_\beta \tilde{h}_\alpha])$, приводим (5) и (6) к виду

$$s_{\alpha\alpha} \nabla \Phi_\alpha + a_{\alpha\alpha} \Phi_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta} (s_{\alpha\beta} \nabla \Phi_\beta + a_{\alpha\beta} \Phi_\beta) \exp(-ik_0 \psi_{\alpha\beta}) = 0; \quad (9)$$

$$\tilde{s}_{\alpha\alpha} \nabla \tilde{\Phi}_\alpha + \tilde{a}_{\alpha\alpha} \tilde{\Phi}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{s}_{\alpha\beta} \nabla \tilde{\Phi}_\beta + \tilde{a}_{\alpha\beta} \tilde{\Phi}_\beta) \exp(-ik_0 \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) = 0. \quad (10)$$

Система N дифференциальных уравнений (9) определяет N амплитуд $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$, а система (10) — $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\Phi}_N$. Для описания процесса взаимодействия достаточно системы (9), система (10) необходима для построения первого интеграла.

Система связанных уравнений (9) является обобщением уравнений (30) и (13) работы [18] на случай поглощающих сред. Эта система наряду с обычными геометрическими ограничениями (отсутствие резких градиентов и др. [19]) имеет и свои специфические. Во-первых, она неприменима при наличии поляризационного вырождения, т. е. в случае $n_\alpha = n_\beta$ и $f_\alpha = f_\beta$. Во-вторых, ограничиваясь только амплитудами нулевого приближения, нельзя на основе системы (9) рассматривать слабое взаимодействие (эффективность взаимодействия определяется параметрами, которые по порядку величины больше $(kL)^{-1}$).

2. ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ

Просуммируем (9) и (10) при $N = 2$. Тогда получим**

$$\begin{aligned} & \text{div} ([\tilde{E}_1 H_1] + [E_1 \tilde{H}_1]) + \text{div} ([\tilde{E}_2 H_2] + [E_2 \tilde{H}_2]) + \\ & + \text{div} ([\tilde{E}_1 \tilde{H}_2] + [\tilde{E}_2 H_1]) e^{ik_0 \psi} + \text{div} ([E_2 \tilde{H}_1] + [E_1 H_2]) e^{-ik_0 \psi} = 0 \quad (11) \\ & (\psi = \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Если $A_{ij}^a = 0$, то можно показать, что $\nabla \psi \perp s_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда из (11) следует, что

$$\text{div} \{ ([E_1 e^{ik_0 \varphi_1} + E_2 e^{ik_0 \varphi_2}) (H_1^* e^{-ik_0 \varphi_1} + H_2^* e^{-ik_0 \varphi_2})] + \text{к.с.} \} = 0, \quad (12)$$

т. е. система (9), (10) приводит к очевидному первому интегралу $\text{div} ([EH^*] + [E^*H]) = 0$, имеющему смысл закона сохранения усредненного за период вектора Пойнтинга полного поля. Этот результат является обобщением закона сохранения потока энергии на случай взаимодействующих волн.

Соотношение (12) с учетом $s_{12} = s_{21}^*$ имеет вид

$$\text{div} [|\Phi_1|^2 s_{11} + |\Phi_2|^2 s_{22} + 2|\Phi_1||\Phi_2| \text{Re}(s_{12} e^{ik_0 \psi + i\Delta})] = 0, \quad (13)$$

где $\Delta = \delta_1 - \delta_2$, $\delta_{1,2} = \arg \Phi_{1,2}$. Если ввести величину $|\Phi| = |\Phi_1| \cos \eta + |\Phi_2| \sin \eta$, то из (13) получаем

$$\text{div} (|\Phi|^2 s) = 0, \quad (14)$$

* На это обратил внимание авторов Н Г Денисов.

** Ниже подразумевается, что $E_\alpha \equiv E_\alpha^{(0)}$, $H_\alpha \equiv H_\alpha^{(0)}$.

где

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_{11} \cos^2 \eta + \mathbf{s}_{22} \sin^2 \eta + \sin 2\eta \operatorname{Re}(\mathbf{s}_{12} e^{ik_0\psi + i\Delta}).$$

Таким образом, можно говорить о переносе энергии вдоль некоторого луча, колеблющегося с пространственным периодом $l \sim |\nabla k_0\psi|^{-1}$ около среднего направления \mathbf{s} .

Если $A_{ij}^a \neq 0$, то $\mathbf{s}_{12} \nabla\psi = 2\epsilon_{ij}^a \tilde{f}_{2i} f_{1j}$, $\mathbf{s}_{21} \nabla\psi = 2\epsilon_{ij}^a \tilde{f}_{1i} f_{2j}$ и из (13) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [|\Phi_1|^2 \mathbf{s}_{11} + |\Phi_2|^2 \mathbf{s}_{22} + |\Phi_1| \cdot |\Phi_2| (\mathbf{s}_{12} e^{ik_0\psi} + \mathbf{s}_{21} e^{-ik_0\psi})] + \\ + 2i |\Phi_1| |\Phi_2| (e^{ik_0\psi} \epsilon_{ij}^a \tilde{f}_{2i} f_{1j} - e^{-ik_0\psi} \epsilon_{ij}^a \tilde{f}_{1i} f_{2j}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

3. ПЛОСКОСЛОИСТАЯ СРЕДА

Рассмотрим простейший случай плоскослоистой среды, свойства которой меняются вдоль оси z . Пусть волновые векторы взаимодействующих волн лежат в плоскости y, z , т. е. $\mathbf{n}_\alpha = (0, n_{\alpha y}, n_{\alpha z})$. Из закона Снеллиуса следует, что $n_{1y} = n_{2y}$, т. е. $\Delta n_y = 0$ и, следовательно, $S_{\alpha\beta z} = 0$. Тогда система (9) при $N = 2$ принимает вид

$$\frac{dA_1}{dz} + V_{12} e^{-ik_0\psi} A_2 = 0, \quad \frac{dA_2}{dz} + V_{21} e^{+ik_0\psi} A_1 = 0, \quad (16)$$

где

$$A_\alpha = s_{\alpha z}^{-1/2} \Phi_\alpha, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad V_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} (S_{\alpha\alpha z} S_{\beta\beta z})^{-1/2}.$$

Исходя из условия $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}^* = \operatorname{div} \mathbf{s}_{\alpha\beta} = ds_{\alpha z} / dz = 0$, нетрудно показать, что $V_{\alpha\beta} + V_{\beta\alpha}^* = 0$ при $S_{\alpha\alpha z} S_{\beta\beta z} > 0$ и $V_{\alpha\beta} - V_{\beta\alpha}^* = 0$ при $S_{\alpha\alpha z} S_{\beta\beta z} < 0$. Отметим также, что из (16) следует соотношение

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 = |A|^2 = \operatorname{const}, \quad (17)$$

являющееся аналогом закона сохранения энергии.

Методам решения уравнений типа (16) посвящено большое число работ. Мы воспользуемся методом теории возмущений. В этом случае матрицу трансформации, связывающую амплитуду волн до и после прохождения их через область взаимодействия, можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 + \int V_{12} e^{ik_0\psi} \left(\int V_{21} e^{-ik_0\psi} dz' \right) dz + \dots \\ \int V_{12} e^{ik_0\psi} dz + \int V_{12} e^{ik_0\psi} \left(\int V_{21} e^{-ik_0\psi} dz' \right) dz + \dots \\ - \int V_{21} e^{-ik_0\psi} dz + \int V_{21} e^{-ik_0\psi} \left(\int V_{12} e^{ik_0\psi} dz' \right) dz + \dots \\ 1 + \int V_{21} e^{-ik_0\psi} \left(\int V_{12} e^{ik_0\psi} dz' \right) dz + \dots \end{bmatrix}. \quad (18)$$

В одномерном случае ($n_y = 0$) при $A_{ij}^a \neq 0$ уравнения (16) имеют вид (при $|A_{ij}^a| \ll |A_{ij}^s|$)

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} + \frac{2n_2 (e_1^* e_2') + (e_1^* \hat{a}^s e_2)}{2\sqrt{n_1 n_2}} A_2 \exp(-ik_0\theta) = 0, \\ \frac{dA_2}{dz} + \frac{2n_1 (e_2^* e_1') + (e_2^* \hat{a}^s e_1)}{2\sqrt{n_1 n_2}} A_1 \exp(ik_0\theta) = 0, \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\theta = \int \left[(n_1 - n_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{e_1^* \hat{a}^a e_1}{n_1} - \frac{e_2^* \hat{a}^a e_2}{n_2} \right) \right] dz.$$

В обратном случае ($|A_{ij}^a| \gg |A_{ij}^b|$)

$$\begin{aligned} & 2n_1 (\tilde{e}_1 e_1) \Phi_1' + [n_1' (\tilde{e}_1 e_1) + 2n_1 (\tilde{e}_1 e_1')] \Phi_1 + \\ & + \{ 2n_2 (\tilde{e}_1 e_2) \Phi_2' + [n_2' (\tilde{e}_1 e_2) + 2n_2 (\tilde{e}_1 e_2')] \Phi_2 \} e^{-ik_0 \psi} = 0, \\ & 2n_2 (\tilde{e}_2 e_2) \Phi_2' + [n_2' (\tilde{e}_2 e_2) + 2n_2 (\tilde{e}_2 e_2')] \Phi_2 + \\ & + \{ 2n_1 (\tilde{e}_2 e_1) \Phi_1' + [n_1' (\tilde{e}_2 e_1) + 2n_1 (\tilde{e}_2 e_1')] \Phi_1 \} e^{ik_0 \psi} = 0. \end{aligned} \quad (196)$$

В (19а) и (19б) приняты обозначения

$$\Phi_1' \equiv d\Phi_1/dz, \quad a_{11} = -A, \quad a_{12} = -a_{21} = -iC, \quad a_{22} = B,$$

а величины A, B, C определяются соотношениями (11.3) в [19]. Компоненты векторов поляризации $e_{1,2}$ определяются соотношениями $e_{1,2x} = (1 + \kappa_{1,2}^2)^{-1/2}$, $e_{1,2y} = -i\kappa_{1,2} e_{1,2x}$, где $-i\kappa_{1,2} \equiv K_{1,2}$, а $K_{1,2}$ определяется формулой (11.25) в [19]. Заметим, что при таком определении $\kappa_\alpha^2 \geq 0$, $(e_\alpha e_\alpha^*) = 1$, $(e_\alpha e_\beta^*) = 0$ в (19а). В (19б) $\tilde{e}_\alpha = e_\alpha^{(I)} + e_\alpha^{(II)}$, $\tilde{e}_\alpha^* = e_\alpha^{(I)*} - e_\alpha^{(II)*}$ [16].

Из вида интегралов, входящих в (19), следует, что основной вклад в эффект взаимодействия дает область синхронизма $d\psi/dz \equiv n_1 - n_2 \equiv \Delta n = 0$. Эти интегралы могут быть вычислены методом перевала, что дает возможность получить асимптотическое решение (19) (а значит, и исходных уравнений Максвелла (с заданной точностью) в интересующем нас случае с точностью до $O(k_0^{-1})$).

Вводя обозначения $\xi_{\alpha\beta} = \int_z^z V_{\alpha\beta} e^{ik_0\psi} dz$ и используя метод перевала, в общем случае получаем [20]:

а) Если $\psi^{(q)}(z_n) = 0$, $1 \leq q \leq 2m - 1$, $\psi^{(2m)}(z_n) \neq 0$, то

$$\xi_{\alpha\beta} \simeq m^{-1} \Gamma \left(\frac{1}{2m} \right) \left[\frac{(2m)!}{ik_0 \psi^{(2m)}(z_n)} \right]^{1/2m} e^{ik_0\psi(z_n)} [V_{\alpha\beta}(z_n) + O(k_0^{-1/2m})]. \quad (20)$$

б) Если максимум $\psi(z)$ достигается на конце интервала интегрирования и $\psi^{(q)}(z_n) = 0$, $1 \leq q \leq m - 1$, $\psi^{(m)}(z_n) \neq 0$, то

$$\xi_{\alpha\beta} = -m^{-1} \Gamma \left(\frac{1}{m} \right) \left[\frac{-m!}{ik_0 \psi^{(m)}(z_n)} \right]^{1/m} e^{ik_0\psi(z_n)} [V_{\alpha\beta}(z_n) + O(k_0^{-1/m})]. \quad (21)$$

Величину $\rho \approx |k_0 \psi^{(m)}(z_n)|^{-1/m}$ можно назвать радиусом взаимодействия (радиус влияния [21]). Интеграл, взятый на этом расстоянии, отличается от своего истинного значения на величину порядка $O(k_0^{-(1+1/m)})$.

Как видно из формул (20) и (21), в полученном решении присутствуют нецелые степени параметра $1/k_0$, по которому производится асимптотическое разложение. Это указывает на возможность с самого

начала построения решения в виде ряда по дробным степеням геометрического параметра. Подобный метод предлагается в работах [22], а также в [8]*.

Однако при таком подходе для каждого конкретного вида зависимости $\Delta n(z)$ необходимо строить свой ряд. В нашем случае выражения (20), (21) справедливы для произвольной зависимости $\Delta n(z)$. При записи решения необходимо лишь ограничиться нужным числом членов ряда, чтобы не выйти за пределы точности метода.

На примере простой точки перевала ($\psi'(z_p) = 0$, $\psi''(z_p) \neq 0$) нетрудно выявить все особенности эффекта взаимодействия волн. В этом случае

$$\xi_{\alpha\beta} = \begin{cases} [k_0\psi'(z)]^{-1} V_{\alpha\beta}(z) e^{ik_0\psi(z)} e^{i\pi/2}, & z < z_p - \rho, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 |\psi''(z_p)|}} V_{\alpha\beta}(z_p) e^{ik_0\psi(z_p)} \exp [i(\pi/4) \operatorname{sgn} \psi''(z_p)], & z = z_p, \\ \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 |\psi''(z_p)|}} V_{\alpha\beta}(z_p) e^{ik_0\psi(z_p)} \exp [i(\pi/4) \operatorname{sgn} \psi''(z_p)] + \\ + [k_0\psi'(z)]^{-1} V_{\alpha\beta}(z) e^{ik_0\psi(z)} e^{i\pi/2}, & z_p + \rho < z, \end{cases} \quad (22)$$

а радиус взаимодействия $\rho \simeq (k_0 |\psi''(z_p)|)^{-1/2} \simeq \sqrt{\bar{\lambda}_0 L / \Delta n}$, ($\bar{\lambda} = \lambda / 2\pi$), L — характерный масштаб неоднородности среды, Δn — разность показателей преломления взаимодействующих волн вне области взаимодействия ($\Delta n \approx n$). Заметим также, что $|V_{\alpha\beta}| \sim n/L$. Тогда из (22) можно сделать следующие выводы:

1) Существует область слабой связи ($z < z_p - \rho$, $z > z_p + \rho$), где коэффициент связи между модами порядка $\bar{\lambda}/L$, т. е. сравним с «дифракционными членами», которые учитываются в следующем приближении по k_0^{-1} . Характерным масштабом взаимодействия здесь является пространственный период биений. Аналогичные результаты получаются в рамках «квазиизотропного» приближения (см. [4], а также [5–8]).

2) Существует область сильной связи ($z_p - \rho \leq z \leq z_p + \rho$, $\bar{\lambda} \ll 2\rho \ll L$), в которой на относительно небольшом расстоянии порядка ρ коэффициент связи между волнами меняется на достаточно большую величину $\sim \sqrt{\bar{\lambda}_0 / Ln} \gg \bar{\lambda}/L$.

Практически слабое взаимодействие имеет место в любой точке неоднородной среды. Ниже мы не будем останавливаться на нем, а рассмотрим только сильное взаимодействие, когда в области интегрирования существуют точки синхронизма, где $\Delta n = 0$. Если вдоль траектории имеется несколько точек синхронизма, то в выражениях для $\xi_{\alpha\beta}$ необходимо суммировать значения интеграла за счет всех перевальных точек $z_{п1}$, $z_{п2}$, ..., $z_{пM}$. Другой способ учета влияния нескольких точек синхронизма состоит в том, что полная матрица трансформации \hat{S} определяется соотношением $\hat{S} = \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2 \cdot \dots \cdot \hat{S}_M$, где \hat{S}_1 , \hat{S}_2 , ..., \hat{S}_M — матрицы трансформации, отвечающие соответствующим точкам синхронизма $z_{п1}$, $z_{п2}$, ..., $z_{пM}$.

Если, например, $\psi' = \psi'' = 0$ при $z = z_p$, а $\psi''' \neq 0$, то

$$\xi_{\alpha\beta}(z_p) \simeq \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) (3i)^{1/3} e^{i\pi/6} [k_0 \Delta n''(z_p)]^{1/3} V_{\alpha\beta}(z_p) e^{ik_0\psi(z_p)} \sim \\ \sim (\bar{\lambda}_0 / Ln)^{1/3} > (\bar{\lambda}_0 / Ln)^{1/2},$$

* Это находится в соответствии с содержащимся в [17] утверждением о неоднозначности процедуры составных асимптотических разложений, что не сказывается на конечном результате.

$\rho \simeq (\bar{\lambda}_0 L^2/n)^{1/3}$, т. е. чем выше порядок касания траекторий, тем больше коэффициент трансформации и радиус взаимодействия.

При выходе в однородную среду $\psi' = 0$, $\psi'' = 0, \dots, \psi^{(m)} = 0$ ($m \rightarrow \infty$), тогда

$$\xi_{\alpha\beta} \sim (\bar{\lambda}_0/L\Delta n)^{1/m} \rightarrow 1, \quad \rho \sim \left(\frac{\bar{\lambda}_0 L^{m-1}}{\Delta n} \right)^{1/m} \sim L \left(\frac{\bar{\lambda}}{L\Delta n} \right)^{1/m} \sim L.$$

Таким образом, случай, когда условия синхронизма выполняются с точностью до членов более высоких (по производной) порядков, несколько специфичен. С одной стороны, это взаимодействие является сильным, так как связано с наличием точки синхронизма. Коэффициент трансформации в этом случае порядка 1, а радиус взаимодействия $\rho \sim L$. С другой стороны, несмотря на величину эффекта, это взаимодействие (по принятой выше терминологии) является слабым, так как характерным масштабом здесь является $\rho \sim (\Delta k)^{-1} \sim L$. Это означает, что сам эффект можно рассматривать как предельный при $(\Delta k)^{-1} \sim L$ из уравнений (5) и (6), учитывающих разность фаз между нормальными волнами, а можно поправки к тензору диэлектрической проницаемости, учитывающие взаимодействие, вносить непосредственно в уравнения первого приближения по $(kL)^{-1}$, т. е. в уравнения переноса. Такой подход приводит к уравнениям «квазиизотропного» приближения [4]. Заметим, что величина эффекта в последнем случае связана с большим радиусом взаимодействия $\rho \sim L$ (где, строго говоря, $L \rightarrow \infty$). Такие условия могут иметь место при рассмотрении взаимодействия в межпланетной плазме, где взаимодействие может быть сильным, несмотря на слабость «погонного» эффекта [23].

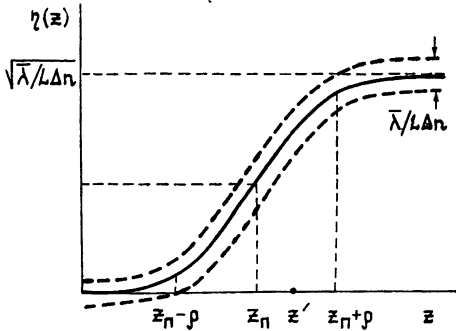


Рис. 1.

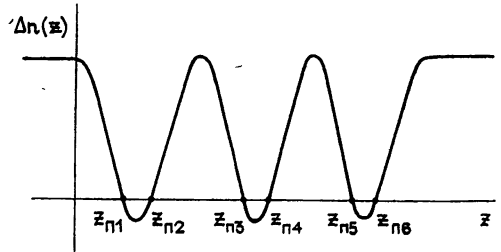


Рис. 2.

Можно заметить также, что для получения большого эффекта не обязательно наличие точки синхронизма. Качественно это нетрудно понять из рис. 1. Пусть условие синхронизма строго не выполняется, но показатели преломления подходят достаточно близко друг к другу, что характеризуется положением точки z' на рис. 1. Тогда, в силу монотонности функции $\eta(z) = |\xi_{\alpha\beta}|$, мы можем считать, что величина эффекта определяется значением $\eta(z')$. Если z' близка к z_n , т. е. $|z_n - z'| \ll \rho$, то коэффициент трансформации порядка $(1/2) \sqrt{\bar{\lambda}_0/Ln}$. Если же $|z_n - z'| \sim \rho$, то трансформация мала ($\sim \bar{\lambda}/Ln$).

4. СЛЕДУЮЩИЙ ЧЛЕН РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИИ

Из (22) следует, что в случае простой перевальной точки ($\psi''(z_n) \neq 0$) функция $\xi_{\alpha\beta}(z)$ в области $z < z_n - \rho$ нерегулярным образом изменяется внутри полосы порядка $\bar{\lambda}/L\Delta n$ вблизи значения

$|\xi_{\alpha\beta}(z)| = 0$. В области $z_n - \rho \leq z \leq z_n + \rho$ функция $\xi_{\alpha\beta}$ довольно резко изменяется на величину порядка $\sqrt{\bar{\lambda}/L\Delta n} \gg \bar{\lambda}/L\Delta n$, а затем опять осциллирует в полосе толщиной $\bar{\lambda}/L\Delta n$, но уже вблизи значения $|\xi_{\alpha\beta}| \sim \sim \sqrt{\bar{\lambda}/L\Delta n}$ (см. рис. 1). С учетом сказанного выше функцию $\xi_{\alpha\beta}(z)$ можно представить в виде

$$\xi = \eta(z) + O(\bar{\lambda}/L\Delta n), \quad (23)$$

где $\eta(z)$ — плавно изменяющаяся гладкая функция.

При $\rho \ll L$ функцию $\eta(z)$ можно считать постоянной вне области взаимодействия. В частности, ее можно выбрать в виде переходного слоя [19] или в виде

$$\eta'(z) = \frac{2}{\pi} \xi_0 \operatorname{arctg} \left(z' \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\xi_0 - \varepsilon}{\xi_0} \right) \rho^{-1} \simeq \frac{2}{\pi} \xi_0 \operatorname{arctg} \frac{\pi z' (\xi_0 - \varepsilon)}{\xi_0 \rho}, \quad (24)$$

где

$$\eta'(z) = \xi(z) - \xi_0, \quad \xi_0 = \xi(z_n), \quad \varepsilon = \xi(\rho), \quad z' = z - z_n.$$

Ниже мы ограничивались рассмотрением лишь первого члена ряда теории возмущений. Нетрудно написать и следующие члены. В результате имеем

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \xi_1^{(0)} - \xi_2^{(0)} \gamma V_{12}(z_n) e^{ik_0\psi(z_n)} + \xi_1^{(0)} \gamma^2 V_{12}(z_n) V_{21}(z_n) - \\ & - \xi_2^{(0)} \gamma^3 V_{12}^2(z_n) V_{21}(z_n) e^{ik_0\psi(z_n)} + \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = & \xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)} \gamma V_{21}(z_n) e^{-ik_0\psi(z_n)} + \xi_2^{(0)} \gamma^2 V_{21}(z_n) V_{12}(z_n) - \\ & - \xi_1^{(0)} \gamma^3 V_{21}^2(z_n) V_{12}(z_n) e^{-ik_0\psi(z_n)} + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{m} \Gamma \left(\frac{1}{2m} \right) \left[\frac{(2m)!}{i k_0 \psi^{(2m)}(z_n)} \right]^{1/2m}.$$

Выражения (25) справедливы только в случае сильной связи, когда в области распространения волн существуют точки синхронизма z_n , в которых $\psi^{(q)} = 0$. Если точек синхронизма нет, то все члены ряда, за исключением нулевого, становятся сравнимыми по величине с дифракционными поправками, которые в рассматриваемом приближении не учитываются. Из этих соображений и в случае сильной связи следует ограничиться нужным числом членов ряда, которые по величине превышают дифракционные поправки. Дальнейшее уточнение решений можно производить лишь на основе уравнений более высоких приближений по $1/k_0$.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим взаимодействие волн в среде, параметры которой меняются по следующему закону: $v = v_0(b + \cos pz)$ при $0 \leq z \leq z_{\max}$ и $v = v_0(b + 1)$ вне указанного интервала. Из соотношений (11.3) [19] видно, что при $s \equiv v/\omega \ll 1$ (v — эффективное число соударений) для высокочастотных волн

$$a_{11}^a = a_{22}^a \ll 1,$$

$$a_{12} = -a_{21}^a = isv \sqrt{u} \cos \alpha (1 - u - v + uv \cos^2 \alpha)^{-1},$$

где $v = \omega_0^2/\omega^2$, $u = \omega_H^2/\omega^2$, α — угол между \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , ω_0 — ленгмюровская частота, ω_H — гирочастота электронов. В этом случае

$$S_{12} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \left(\frac{2n_2 x_2'}{1+x_2^2} - i \frac{a_{12}^a}{k_0^2} \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2} \right) \exp(-ik_0 \theta) dz, \quad (26)$$

$$S_{21} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \left(\frac{2n_1 x_1'}{1+x_1^2} + i \frac{a_{21}^a}{k_0^2} \frac{x_1+x_2}{x_1-x_2} \right) \exp(ik_0 \theta) dz,$$

где

$$\theta = \int \left[\Delta n - i \frac{2a_{12}^a}{k_0^2 n (x_1 - x_2)} \right] dz, \quad n \equiv n_1 - \frac{\Delta n}{2} \equiv n_2 + \frac{\Delta n}{2}.$$

Для простоты считаем, что распространение квазипродольное. Тогда $n_{1,2}^2 \simeq 1 - v/(1 \pm \sqrt{u} \cos \alpha)$ и при $v < 1$ получаем

$$\Delta n \simeq v \sqrt{u} \cos \alpha = v_0 \sqrt{u} \cos \alpha (b + \cos p z)$$

(см. рис. 2),

$$x_{1,2} \simeq 2\sqrt{u}(1-v) \cos \alpha \Gamma_{1,2},$$

$$\Gamma_{1,2} = [u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v) \cos^2 \alpha}]^{-1}.$$

Если $a_{\alpha\beta}^a = 0$, то $\Delta n = 0$ при $z = p^{-1} \arccos(-b)$, $p^{-1}[2\pi m \pm \arccos(-b)]$, $m = 1, 2, 3, \dots$ Тогда

$$S_{12} = \sqrt{(p/k_0) v_0 \sqrt{u} \cos \alpha \sqrt{1-b^2}} \frac{2\Gamma_1 e^{-i\pi/2}}{1+x_1^2} \frac{1 + \exp(-2ik_0 m \psi_1/p)}{\exp(-2ik_0 \psi_1/p) - 1}, \quad (27)$$

$$S_{21} = -\sqrt{(p/k_0) v_0 \sqrt{u} \cos \alpha \sqrt{1-b^2}} \frac{2\Gamma_2 e^{-i\pi/2}}{1+x_2^2} \frac{1 + \exp(2ik_0 m \psi_1/p)}{\exp(2ik_0 \psi_1/p) - 1},$$

где $\psi_1 = \arccos(-b) + \sqrt{1-b^2}$, m — число пар точек взаимодействия.

Оценим значения S_{12} и S_{21} при $4u \cos^2 \alpha \gg u^2 \sin^4 \alpha$ для случая $\omega = 10^7$ с⁻¹, $v_0 = 0,1$ и $\sqrt{u} \simeq 1$, $\cos \alpha \simeq 1$, $k_0 = 10$ p. В этом случае

$|S_{12}| \sim |S_{21}| \sim \sqrt{p v_0 \sqrt{1-b^2}/k_0}$. Если $b = 0,9$, то $|S_{12}| \sim |S_{21}| \sim \sim 6 \cdot 10^{-2}$. При этом $\lambda \sim c/\omega \sim 30$ м, $\Lambda = 1/p = 300$ м. Для $m = 10$, т. е. $L = 10\Lambda = 3$ км, коэффициент трансформации может стать порядка 0,5. Величина $v_0 = 0,1$ соответствует $N = 10^4$ см⁻³.

Проведенные выше вычисления показывают, что в результате прохождения волны вдоль неоднородностей плазмы указанного типа может наблюдаться значительная трансформация одного типа волны в другой.

Предлагаемая методика решений связанных уравнений может быть использована при решении задач, например, о параметрическом взаимодействии волн. На линейной стадии процесс взаимодействия описывается системой связанных уравнений. Для случая взаимодействия N волн уравнения для амплитуд приведены в [24] (формула (1.55)). Они могут быть обобщены на случай слабонестационарных сред:

$$i\dot{C}_k = -i \sum_{k', k''} V_{k, k', k''}(t) C_{k'}(t) C_{k''}(t) \exp\left(i \int_0^t \Omega_{k, k', k''}(t) dt\right), \quad (28)$$

где

$$\Omega_{k, k', k''} = \omega_k(t) - \omega_{k'}(t) - \omega_{k''}(t).$$

Воспользуемся теорией возмущений по оператору взаимодействия V . Записывая решение уравнений в виде ряда $C_k(t) = C_k^{(0)} + C_k^{(1)} + \dots$, в первом приближении получаем

$$C_k^{(1)} = -i \sum_{k', k''} C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} \int_0^t V_{k, k', k''}(t') \exp\left(i \int_0^{t'} \Omega_{k, k', k''} dt'\right) dt. \quad (29)$$

Заметим, что в общем случае возможно существование нескольких перевальных точек t_{n_i} , в которых выполняются условия синхронизма $\Omega_{k, k', k''} = 0$. В каждой из этих точек будут взаимодействовать определенные тройки волн. Тогда

$$C_k^{(1)} = -i \sum_{k', k-k'} \sum_i C_{k'}^{(0)} C_{k-k'}^{(0)} \sqrt{2\pi/\dot{\Omega}_{k, k', k-k'}(t_{n_i})} \times \\ \times V_{k, k', k-k'}(t_{n_i}) \exp\left(i \int_0^{t_{n_i}} \Omega_{k, k', k-k'} dt\right) \times \\ \times \exp(i(\pi/4) \operatorname{sgn} \dot{\Omega}_{k, k', k-k'}(t_{n_i})). \quad (30)$$

В заключение авторы благодарят Н. С. Беллюстину, Н. Г. Денисова, С. Я. Вышкинд и Ю. А. Кравцова за обсуждение разных разделов работы и ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clemmow P. C., Heading J.—Proc. Camb. Phil. Soc., 1954, 50, part 2, p. 319.
2. Budden K. G., Clemmow P. C. — Proc. Camb. Phil. Soc., 1957, 53, part 3, p. 669.
3. Budden K. G.—J. Atm. Terr. Phys., 1955, 7, № 2, p. 173.
4. Кравцов Ю. А.—ДАН СССР, 1968, 183, № 1, с. 74.
5. Найда О. Н.—Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 13, № 10, с. 1496.
6. Найда О. Н.—Изв. вузов — Радиофизика, 1972, 15, № 5, с. 751.
7. Найда О. Н.—Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 6, с. 896.
8. Найда О. Н.—Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 3, с. 383.
9. Кравцов Ю. А., Найда О. Н. — ЖЭТФ, 1976, 71, № 1, с. 237.
10. Денисов Н. Г.—Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 3, с. 316.
11. Денисов Н. Г.—Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 921.
12. Денисов Н. Г. Препринт НИРФИ № 118.— Горький, 1978.
13. Беллюстин Н. С.—Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 4, с. 487.
14. Budden K. G.—J. Atm. Terr. Phys., 1972, 34, № 11, p. 1909.
15. Venpelt J. A.—Radio Sci., 1977, 12, № 3, p. 365.
16. Зайцев Ю. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 12, с. 1802.
17. Ван-Дайк. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
18. Апресян Л. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я., Яшнов В. А.—Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 9, с. 1296.
19. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
20. Федорюк М. В. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.
21. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Физматгиз, 1962.
22. Кучеренко В. В. — Изв. АН СССР. Сер. Матем., 1974, 38, № 3, с. 625.
23. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В.—ЖЭТФ, 1979, 77, № 1, с. 101.
24. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.—В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 7.—М.: Атомиздат, 1973, с. 3.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
13 февраля 1981 г.,
после доработки
22 декабря 1981 г.

ON CONTINUOUS ASYMPTOTIC OF SOLUTIONS IN THE CASE OF LINEAR INTERACTION OF WAVES IN THE ABSENCE OF POLARIZED DEGENERATION

Yu. Ya. Yashin, V. A. Yashnov

A linear transformation of normal waves is considered in three-dimensional inhomogeneous media. Based on the system of coupling equations, the first integral has been obtained for the amplitudes of interacting waves being sense of the law of the total energy flux conservation. By asymptotic methods a solution has been derived which is valid both in the region of interaction and far from it. Criteria are written down which define the degree of wave coupling and the interaction radius inside of which a marked transformation of energy occurs from one normal wave into the other.