

УДК 538.56 : 519.25

**КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В УРАВНЕНИИ  
КРЕЙЧНАНА ДЛЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ  
В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ**

*Н. Н. Зернов*

Рассматривается уравнение для среднего поля в случайно-неоднородной среде в нелинейном приближении Крейчнана. Для уравнения Крейчнана строится асимптотика функции Грина в дальней зоне для случая крупномасштабных возмущений среды.

Рассмотрим среднее поле точечного источника (функцию Грина) в случайно-неоднородной среде, описываемое уравнением Дайсона [1]. Как известно [1, 2], ряд ядра интегрального оператора уравнения Дайсона оказывается частично просуммированным, если ядро представляется произведением корреляционной функции статистического возмущения среды и искомой функции Грина. В этом приближении функция Грина удовлетворяет нелинейному уравнению Крейчнана

$$\nabla^2 G + k^2 \epsilon G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + k^4 \sigma^2 \int \psi_\epsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) G(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|) d\mathbf{r}', \quad (1)$$

в котором  $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$  — искомая функция,  $k$  — волновое число вакуума,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость невозмущенной однородной среды,  $\sigma^2 \psi_\epsilon(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  — парная корреляционная функция статистически однородного и изотропного возмущения с дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\psi_\epsilon(0) = 1$ .

В отличие от линейного приближения Бурре уравнения Дайсона, допускающего точное решение с помощью преобразования Фурье, уравнение (1) не удастся решить точно. Поэтому в работах, посвященных исследованию уравнения (1), рассматриваются случаи различных предельных значений его параметров. Так, в работе [3] приводится теория возмущений для уравнения (1) для слабых флуктуаций (малые  $\sigma^2$ ). Попытка построить решение уравнения Крейчнана без использования малости  $\sigma^2$  в приближении сильной корреляции (коротковолновом приближении) делается в работах [4, 5]. В первой из них приводится функция Грина нулевого приближения для бесконечного радиуса, а вторая работа посвящена построению следующего приближения для больших, но конечных значений радиуса корреляции. В силу причин, речь о которых пойдет ниже, результаты работы [5] вызывают сомнение, поэтому мы считаем нужным снова рассмотреть решение уравнения (1) в приближении сильной корреляции. Здесь будет построено коротковолновое представление среднего поля в дальней зоне.

Начнем рассмотрение с одномерного случая.

1. Совершив в (1) преобразование Фурье,

$$G(x - x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \exp[i\lambda(x - x_0)] d\lambda, \quad (2)$$

перейдем к уравнению для Фурье-образа  $g(\lambda)$  функции Грина

$$(k^2\varepsilon - \lambda^2) g(\lambda) - 2\pi k^4 \sigma^2 g(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda - \mu) \tilde{\psi}_\varepsilon(\mu) d\mu = 1/2\pi. \quad (3)$$

Входящую в это уравнение функцию  $\tilde{\psi}_\varepsilon(\mu)$  — преобразование Фурье от  $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x/\rho)$  — представим в виде

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(\mu) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x/\rho) e^{-i\mu x} dx = \rho\omega(\rho\mu), \quad (4)$$

где  $\rho$  — радиус корреляции,  $\omega(\xi)$  — четная функция своего аргумента с нормировкой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\xi) d\xi = 1.$$

Функция (4) при  $\rho = \infty$  представляет собой  $\delta$ -функцию, а при больших конечных  $\rho$  она имеет «острый» максимум в точке  $\mu = 0$ . В частном случае  $\psi_\varepsilon(x/\rho) = \exp(-x^2/\rho^2)$

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(\mu) = \frac{\rho}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\rho^2\mu^2}{4}\right). \quad (4a)$$

Очевидно, что при  $\rho = \infty$  уравнение (3) превращается в алгебраическое уравнение

$$2\pi k^4 \sigma^2 g_0^2(\lambda) - (k^2\varepsilon - \lambda^2) g_0(\lambda) + (1/2\pi) = 0, \quad (5)$$

решение которого

$$g_0(\lambda) = (4\pi)^{-1} k^{-4} \sigma^{-2} \left[ k^2\varepsilon - \lambda^2 - \sqrt{(k^2\varepsilon - 2k^2\sigma - \lambda^2)(k^2\varepsilon + 2k^2\sigma - \lambda^2)} \right] \quad (6)$$

обеспечивает сходимость интеграла (2), если ветви квадратных корней фиксированы условиями

$$\arg \sqrt{k^2\varepsilon - 2k^2\sigma - \lambda^2} = \pi/2 \quad \text{при} \quad k^2\varepsilon - 2k^2\sigma - \lambda^2 < 0,$$

$$\arg \sqrt{k^2\varepsilon + 2k^2\sigma - \lambda^2} = \pi/2 \quad \text{при} \quad k^2\varepsilon + 2k^2\sigma - \lambda^2 < 0.$$

Теперь необходимо построить решение уравнения (3) с функцией  $\tilde{\psi}_\varepsilon(\mu)$  вида (4) при  $1 \ll \rho < \infty$ , причем для нахождения главного члена асимптотики поля  $G$  в дальней зоне достаточно определить положение особенностей функции  $g(\lambda)$ .

Поскольку  $g_0(\lambda)$  для случая  $\rho = \infty$  является ветвящейся функцией, теория возмущений, описывающая случай конечных  $\rho$ , должна быть применима в областях комплексной плоскости  $\lambda$ , содержащих точки ветвления  $g(\lambda)$ . Это обстоятельство не учтено в работе [5], где при рассмотрении случая  $1 \ll \rho < \infty$  использовано представление интеграла в (3) по целым степеням  $\rho^{-1}$  (формула (7) работы [5]), получающееся в результате разложения  $g(\lambda - \mu)$  (в наших обозначениях) около точки  $\mu = 0$ . Такое представление справедливо лишь в круге сходимости ряда Тэйлора функции  $g(\lambda)$  ([6], теорема 2) и непригодно для ветвящихся функций типа (6). По этой причине последующие результаты работы [5] вызывают сомнения.

Мы, рассматривая случай конечных  $\rho$ , обратим внимание на то обстоятельство, что нулевое приближение  $g_0(\lambda)$  в окрестностях своих точек ветвления  $\lambda_{01,03} = \pm k\sqrt{\varepsilon - 2\sigma}$ ,  $\lambda_{02,04} = \pm k\sqrt{\varepsilon + 2\sigma}$ , где верхний знак относится к первому индексу, представляется разложениями

$$g_{01,03}(\lambda) = (4\pi)^{-1} k^{-4} \sigma^{-2} \left[ k^2 \varepsilon - \lambda_{01}^2 + \dots - \sqrt{2\lambda_{01}(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)} \sqrt{\lambda_{01} \mp \lambda} (1 + \dots) \right],$$

$$g_{02,04}(\lambda) = (4\pi)^{-1} k^{-4} \sigma^{-2} \left[ k^2 \varepsilon - \lambda_{02}^2 + \dots - e^{i\pi/2} \sqrt{2\lambda_{02}(\lambda_{02}^2 - \lambda_{01}^2)} \sqrt{\lambda_{02} \mp \lambda} (1 + \dots) \right],$$

где многоточиями обозначены члены порядка  $O(|\lambda_{0i} \mp \lambda|)$ .

При  $1 \ll \rho < \infty$  точки ветвления  $\lambda_i$  функции  $g(\lambda)$  смещаются по отношению к  $\lambda_{0i}$ . Для определения  $\lambda_i$  в этом случае естественно считать, что функция  $g(\lambda)$  имеет в окрестности своих (не найденных пока) точек ветвления главные члены разложений такого же вида, как и  $g_0(\lambda)$ , т. е.

$$\begin{aligned} g_{1,3}(\lambda) &= (4\pi)^{-1} k^{-4} \sigma^{-2} [k^2 \varepsilon - \lambda_1^2 - a_1 \sqrt{\lambda_1 \mp \lambda}], \\ g_{2,4}(\lambda) &= (4\pi)^{-1} k^{-4} \sigma^{-2} [k^2 \varepsilon - \lambda_2^2 - e^{i\pi/2} a_2 \sqrt{\lambda_2 \mp \lambda}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь верхний знак относится к первому индексу и

$$a_1 = \sqrt{2\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad a_2 = \sqrt{2\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}. \quad (7a)$$

Рассматривая уравнение (3) в окрестностях точек  $(\pm \lambda_{1,2})$ , воспользуемся представлениями (7). В силу того, что функция  $\psi_\varepsilon(\mu)$  имеет «острый» максимум в точке  $\mu = 0$ , главный вклад в интеграл в (3) дает окрестность нуля, т. е. окрестность рассматриваемой точки ветвления. При вычислении интеграла по окрестности каждой точки ветвления вкладом в интеграл остальных точек ветвления можно пренебречь, если расстояние от рассматриваемой до ближайшей точки ветвления превосходит размер области, где  $\omega(\rho\mu)$  существенно отлична от нуля, — величину  $\rho^{-1}$ , т. е. если выполняется неравенство

$$\rho|\lambda_2 - \lambda_1| > 1. \quad (8)$$

После подстановки (7) в (3) необходимо вычислять интегралы

$$\begin{aligned} P_n(\lambda_i \mp \lambda, \rho) &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_i \mp \lambda \pm \mu)^{n-(1/2)} \omega(\rho\mu) d\mu, \\ i &= 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_n(\lambda_i \mp \lambda, \rho) &= \rho \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_i \mp \lambda \pm \mu)^{n-1} \omega(\rho\mu) d\mu, \\ i &= 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

В случае  $\lambda = \pm \lambda_i$ ,  $\rho < \infty$  эти интегралы считаются точно,

$$P_n(0, \rho) = \rho^{-n+(1/2)} [1 + e^{i[n-(1/2)]\pi}] \int_0^\infty \xi^{n-(1/2)} \omega(\xi) d\xi; \quad (9a)$$

$$Q_n(0, \rho) = \rho^{-n+1} [1 + e^{i(n-1)\pi}] \int_0^\infty \xi^{n-1} \omega(\xi) d\xi, \quad (10a)$$

а при конечных  $(\lambda_i \mp \lambda)$  и  $\rho \rightarrow \infty$  имеют асимптотические разложения по обратным степеням  $\rho$  вида [6]

$$P_n(\lambda_i \mp \lambda, \rho) = (\lambda_i \mp \lambda)^{n-(1/2)} + \underline{O}(\rho^{-1}); \quad (9b)$$

$$Q_n(\lambda_i \mp \lambda, \rho) = (\lambda_i \mp \lambda)^{n-1} + \underline{O}(\rho^{-1}). \quad (10b)$$

Значения (9а), (10а) появляются, когда после подстановки (7) в (3) мы полагаем  $\lambda = \pm \lambda_i$ , чтобы получить уравнения для смещенных точек ветвления ( $\pm \lambda_i$ ), а с помощью (9б), (10б) можно проследить предельный переход к решению (6) для случая  $\rho = \infty$ . Кроме того, необходимо отметить, что после подстановки (7) в (3) коэффициент при  $(\lambda_i \mp \lambda)^{1/2}$  обращается в нуль тождественно, а значения  $a_{1,2}$  определяются по формулам (7а), после того как  $\lambda_i$  найдены.

Поступая в соответствии со сказанным, для «новых» точек ветвления получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (k^2 \varepsilon - \lambda_{1,3}^2)^2 &= 4k^4 \sigma^2 - \sqrt{2\lambda_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (k^2 \varepsilon - \lambda_{1,3}^2) [P_1(0, \rho) + \underline{O}(\rho^{-3/2})], \\ (k^2 \varepsilon - \lambda_{2,4}^2)^2 &= 4k^4 \sigma^2 - e^{i\pi/2} \sqrt{2\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (k^2 \varepsilon - \lambda_{2,4}^2) [P_1(0, \rho) + \underline{O}(\rho^{-3/2})], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $P_1(0, \rho)$  определяется по формуле (9а) и имеет порядок  $\underline{O}(\rho^{-1/2})$ .

Система (11) может быть решена методом последовательных приближений. При решении на первом шаге метода учитываются члены порядка  $\underline{O}(\rho^{-1/2})$ , а второй шаг дает поправки порядка  $\underline{O}(\rho^{-1})$ . Мы ограничимся первым шагом, чтобы избежать громоздких формул:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= \pm k \left\{ \varepsilon - 2\sigma \left[ 1 - 2 \frac{\sqrt[4]{\varepsilon - 2\sigma}}{\sqrt{\sigma k \rho}} \tilde{P}_1 e^{i\pi/4} + \underline{O}(\rho^{-1}) \right] \right\}^{1/2}, \\ \lambda_{2,4} &= \pm k \left\{ \varepsilon + 2\sigma \left[ 1 + 2 \frac{\sqrt[4]{\varepsilon + 2\sigma}}{\sqrt{\sigma k \rho}} \tilde{P}_1 e^{3\pi i/4} + \underline{O}(\rho^{-1}) \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\tilde{P}_1 = e^{-i\pi/4} 2^{-1/2} \rho^{1/2} P_1(0, \rho) = \int_0^\infty \xi^{1/2} \omega(\xi) d\xi,$$

и в частном случае (4а) —

$$\tilde{P}_1 = (2\pi)^{-1/2} \Gamma(3/4).$$

Осуществленная процедура нахождения  $\lambda_i$  справедлива, как уже отмечалось, если выполняется неравенство (8). С учетом (12) оно будет выполнено, если

$$\sqrt{\sigma k \rho} \gg 1. \quad (8а)$$

После того как найдены «новые»  $\lambda_i$ , не представляет труда определить  $a_{1,2}$  по формулам (7а). Однако мы не станем приводить этих длинных выражений, а укажем лишь, что в случае  $\rho = \infty$  они имеют значения  $a_{01,02} = \sqrt{8k^3 \sigma} \sqrt{\varepsilon \mp 2\sigma}$ , а при конечных  $\rho$  приобретают поправки порядка  $\underline{O}[(\sigma k \rho)^{-1/2}]$ .

Теперь нам полностью известны главные члены (7) разложений функции  $g(\lambda)$  в окрестностях ее точек ветвления. Их знания достаточно, как уже говорилось, для того, чтобы найти главный член асимптотики  $G(x - x_0)$  при  $|x - x_0| \gg 1$ . Прежде чем перейти к асимптотическому вычислению интеграла (2), необходимо выяснить поведение  $g(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

Рассматривая уравнение (3) в окрестности бесконечно удаленной точки, можно убедиться в том, что  $g(\lambda)$  имеет на бесконечности тот же порядок, что и  $g_0(\lambda)$ , для которой

$$g_0(\lambda) \approx (2\pi)^{-1} \lambda^{-2}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

т. е. при вычислении (2) можно применять лемму Жордана.

Вычисляя интеграл (2) в комплексной плоскости ( $\lambda$ ), для случая  $x > x_0$  замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости (рис. 1) и перейдем от интеграла по вещественной оси к сумме интегралов по разрезам, проведенным, как показано на рис. 1. В результате асимптотического вычисления интегралов по разрезам найдем

$$G(x - x_0) = [\exp(-i3\pi/4)/4 \sqrt{\pi} k^4 \sigma^2 (x - x_0)^{3/2}] \times \quad (13)$$

$$\times [a_1 \exp(i\lambda_1(x - x_0)) + a_2 \exp(i\lambda_2(x - x_0))].$$

Для случая  $x < x_0$  в (13) необходимо заменить  $\lambda_{1,2}$  на  $\lambda_{3,4}$ .

Представление (13) описывает среднее поле точечного источника в дальней зоне на расстояниях

$$|x - x_0| \gg [\min(|\lambda_1|, |\lambda_2|)]^{-1}. \quad (14)$$

Кроме того, при выводе (13) из (2) предполагалось, что точки ветвления функции  $g(\lambda)$  достаточно удалены друг от друга, чтобы каждая

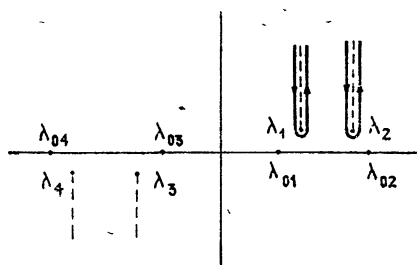


Рис. 1.

из них не давала вклада в главный член асимптотики интеграла по разрезу, выходящему из соседней точки ветвления. Это возможно, если расстояние  $|\lambda_2 - \lambda_1|$  превосходит размер области, дающей главный вклад в интеграл по каждому контуру. Порядок последней —  $|x - x_0|^{-1}$ , поэтому расстояние, начиная с которого справедливо выражение (13), должно удовлетворять еще неравенству

$$|x - x_0| |\lambda_2 - \lambda_1| \gg 1. \quad (15)$$

С учетом (12) оно принимает вид

$$\sigma k |x - x_0| \gg 1. \quad (15a)$$

Что касается погрешности, связанной с определением «новых» точек ветвления (12), то она складывается из погрешности, с которой написана система (11) (ее порядок —  $O(\rho^{-3/2})$ ), и погрешности ее решения (эта погрешность составила порядок  $O(\rho^{-1})$ ). Вообще говоря, система (11) может быть написана с большей точностью (с использованием (8a), (9a)), а затем решена более точно. При каждой заданной конечной точности написания системы (11) и ее решения существует своя верхняя граница применимости формулы (13) по расстоянию, причем она отстоит тем дальше, чем выше точность. Поскольку погрешность можно сделать сколь угодно малой, эту границу можно отодвинуть сколь угодно далеко. Выполнение этой процедуры требует лишь громоздких, но не принципиальных вычислений, ввиду чего мы не станем заниматься этим здесь, а перейдем к рассмотрению свойств среднего поля, описываемого формулой (13).

Построенное для корреляционных функций произвольного вида (лишь бы было справедливо представление (4)), выражение (13) представляет собой асимптотику по двум параметрам, определенным двумя группами неравенств коротковолнового типа — (8), (8a) и (14), (15), (15a). Как видно из этих неравенств, мерой протяженности корреляции и понятия дальней зоны является длина волны

$$\lambda_\sigma = 2\pi(\sigma k)^{-1},$$

т. е. (13) описывает среднее поле в среде с крупномасштабными по сравнению с  $\lambda_\sigma$  возмущениями, причем условия применимости (13) тем слабее, чем сильнее флуктуации.

В соответствии с (13) асимптотика среднего поля в дальней зоне представляется суммой двух слагаемых, причем как в случае  $\rho = \infty$ , так и при конечных  $\rho$  она имеет один и тот же вид. Учет конечного радиуса корреляции приводит лишь к уточнению волновых чисел обеих волн и их коэффициентов возбуждения. Фазовые скорости обеих волн всегда направлены от источника.

Напомним, что в работе [5] учет конечного радиуса корреляции приводил к тому, что вид асимптотики среднего поля менялся на каждом шаге метода последовательных приближений, причем, каждая волна расщеплялась на несколько и появлялись обратные волны. Эти результаты явились следствием неправомерного использования представления интеграла в (3), речь о котором шла выше.

Выражения (12) позволяют описать свойства волн, входящих в (13). Как видно из (12), в случае  $\rho = \infty$  обе волны убывают степенным образом, а при конечных  $\rho$  появляется экспоненциальное убывание, описывающее перекачку энергии поля из когерентной компоненты в случайную — экстинкцию — за счет рассеяния на неоднородностях конечной протяженности. Коэффициенты представляются мнимыми частями выражений (12). При конечных  $(\epsilon \pm 2\sigma)$ , когда в (12) возможно разложение корней квадратных в ряды, коэффициенты экстинкции имеют порядок  $(\sigma k \rho)^{-1/2}$ , причем,  $\text{Im} \lambda_1 > \text{Im} \lambda_2$ , если  $\epsilon - 2\sigma > 0$ . В частности, для  $\epsilon = 1$ ,  $2\sigma < 1$  первым слагаемым в (13) можно пренебречь по сравнению со вторым на расстояниях  $|x - x_0|$ , удовлетворяющих неравенству

$$\sigma k |x - x_0| > \sqrt{2\sigma k \rho} / \sigma \tilde{P}_1.$$

Волна, имеющая комплексное волновое число  $\lambda_1 (\lambda_3)$ , не распространяется при  $\rho = \infty$  и  $\sigma > 3/2$ , а за счет конечных  $\rho$  в том же случае  $\sigma > 3/2$  она приобретает фазовую скорость, пропорциональную  $(\sigma k \rho)^{1/2}$ .

Волна с комплексным волновым числом  $\lambda_2 (\lambda_4)$  распространяется при  $\epsilon + 2\sigma > 0$ , а в противоположном случае  $-\epsilon + 2\sigma < 0$  — она экспоненциально убывает как при  $\rho = \infty$ , так и при  $\rho < \infty$ . Закончим на этом анализ одномерного случая и перейдем к рассмотрению трехмерного.

2. Для пространственной задачи трехмерное преобразование Фурье функции  $G(|r|)$ , удовлетворяющей (1), в силу изотропного характера статистического возмущения принимает вид

$$G(|r|) = (2\pi/ir) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda g(\lambda) \exp(i\lambda r) d\lambda; \quad (16)$$

$$g(\lambda) = (1/2\pi^2\lambda) \int_0^\infty r G(|r|) \sin \lambda r dr.$$

Уравнение для  $g(\lambda)$  при этом может быть записано как

$$[k^2\epsilon - \lambda^2] g(\lambda) = (1/8\pi^3) + 8\pi^3 k^4 \sigma^2 g(\lambda) \rho \int_0^\infty \int_0^\pi \mu (d\omega(\rho\mu)/d\mu) \times \\ \times g(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \cos \vartheta}) d\mu d(\cos \vartheta). \quad (17)$$

При выводе (17) в сферических координатах  $\mu$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  было выполнено интегрирование по  $\varphi$ , а кроме того для функции  $\tilde{\psi}_\epsilon(\mu)$  — преобразования Фурье функции  $\psi_\epsilon(r/\rho)$  — было использовано представление

$$\tilde{\psi}_\epsilon(\mu) = (1/2\pi^2\mu) \int_0^\infty r \psi_\epsilon(r/\rho) \sin \mu r dr = - (1/2\pi\mu) (d/d\mu) [\rho\omega(\rho\mu)].$$

Эта функция при  $\rho = \infty$ , когда  $\psi_\epsilon(r/\rho) = 1$ , пропорциональна производной от  $\delta$ -функции.

В предельном случае  $\rho = \infty$  уравнение (17) имеет решение, отличающееся от (6) лишь множителем  $(4\pi^2)^{-1}$  с теми же точками ветвления. При  $1 \ll \rho < \infty$ , совершая действия, аналогичные описанным для одномерного случая, найдем, что положение «новых» точек ветвления  $\lambda_{1,2}$  и коэффициенты  $a_{1,2}$  с точностью до главных членов описываются теми же формулами (12) и (7а).

Вычисляя асимптотически интеграл (15), для  $G(r)$  определим

$$G(r) = \frac{\exp(i3\pi/4)}{8\pi^{3/2} k^4 \sigma^2 r^{5/2}} [a_1 \lambda_1 \exp(i\lambda_1 r) + a_2 \lambda_2 \exp(i\lambda_2 r)]. \quad (18)$$

Свойства функции (18) в общих чертах аналогичны свойствам одномерной функции (13). Изменился лишь показатель степени убывания поля с расстоянием.

Заканчивая рассмотрение приближения сильной корреляции для уравнения (1), отметим еще одно обстоятельство.

Оценки применимости линейного приближения Бурре для уравнения Дайсона типа [7]  $(\sigma k \rho)^2 \ll 1$  накладывают особенно жесткие ограничения на величину  $\sigma$  в случае крупномасштабных неоднородностей. Строго говоря, они являются оценками длинноволнового характера и не позволяют совершать предельный переход по  $(\sigma k \rho) \rightarrow \infty$ .

Для построенного в настоящей работе разложения по обратным степеням  $(\sigma k \rho)$  (полуцелым) не существует подобного ограничения. Верхняя граница величины  $\sigma$  здесь связана лишь с условием применимости самого уравнения Крейчнана.

В заключение хочу выразить благодарность Г. И. Макарову и В. Н. Красильникову за многочисленные полезные обсуждения работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967, с. 548.
2. Крайчнан Р. Н.— J. Math. Phys., 1961, 2, № 1, p. 124.
3. Rosenbaum Sh.— Radio Sci., 1971, 6, № 3, p. 379.
4. Арманд Н. А., Секистов В. Н.— Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 3, с. 615.
5. Арманд Н. А., Секистов В. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 5, с. 555.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. — Научн. докл. высш. школы, 1959, сер. матем., с. 3.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II.— М.: Наука, 1978, с. 463.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 апреля 1981 г.

#### SHORT-WAVE APPROXIMATION IN KREICHNAN EQUATION FOR THE MEAN FIELD IN RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

N. N. Zernov

An equation is considered for the mean field in randomly-inhomogeneous medium in the nonlinear Kreichnan approximation. For the Kreichnan equation the asymptotic of the Green function is built in the far zone for the case of large-scale disturbances of the medium.