ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 4 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 532.594; 534.232

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ПЕРЕХОДНОГО РАССЕЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В. И. Павлов, А. И. Сухоруков, П. М. Треблер

Рассматривается переходное излучение и переходное рассеяние поверхностных волн в жидкости движущимся точечным источником. Получены спектральные энергетические характеристики излучения.

1. Различные аспекты теории переходного излучения, имеющего место для волн произвольной физической природы, изучаются уже на протяжении многих лет. Независимо от того, являются ли исследуемые в этом направлении процессы традиционными или, напротив, новыми объектами исследования, к ним наблюдается неизменно повышенный интерес. Наиболее полно исследовано переходное излучение в рамках электродинамики (см. [1–3] и приведенную там литературу). Акустическое переходное излучение в конденсированных средах изучалось в работах [4, 5].

Настоящая работа посвящена изучению переходного излучения поверхностных волн в жидкости движущимся точечным источником. Цель работы, однако, состоит не только в получении новых физических результатов, но и в дальнейшей разработке гамильтоновского метода [6–10], а именно, обобщением последнего на случай гидродинамических систем с источником. Это обобщение не является тривиальным, поэтому методической стороне вопроса в настоящей работе уделено достаточное внимание. Отметим здесь, что преимущество гамильтоновского подхода в решении такого класса задач состоит в том, что он позволяет рассматривать каждую отдельную задачу в рамках общего подхода к проблеме возбуждения волн произвольной физической природы [1–3, 11].

2. В качестве модели среды гидродинамического типа рассмотрим идеальную жидкость бесконечной глубины, совершающую потенциальное движение.

Жидкость имеет свободную поверхность, которая характеризуется величиной $\eta(\boldsymbol{r}, t)$ — ее формой (здесь $\boldsymbol{r} = \{x, y\}$). Система координат выбрана таким образом, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $x0y$, а ось $0z$ направлена вверх от свободной поверхности.

Будем считать, что источник, находящийся в жидкости на бесконечном удалении от поверхности или проникающий в жидкость через свободную поверхность извне, начинает свое движение в момент времени $t = -\infty$ (адиабатическое включение) с отличной от нуля проекцией скорости движения на направление оси $0z$. Выбор адиабатического способа включения источника позволяет исключить из рассмотрения «стартовые» эффекты. В рамках этого предположения примем, что источник движется с постоянной скоростью V и действует на единицу массы жидкости неизменной плотности ρ с силой

$$\boldsymbol{f} = -\nabla \{W\delta(\boldsymbol{r} - V_2 t)\,\delta(z - V_1 t)\}, \tag{1}$$

где $V_1 = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n} = \{0, 0, 1\}$ — единичный вектор в направлении оси $0z$.

Параметр W характеризует процесс взаимодействия жидкости с силовым источником. Так, например, в случае рассеяния нейтронов в жидком гелии этот параметр связывается с сечением рассеяния [12]. Силовое взаимодействие вида (1) осуществляется тогда, когда вклад во взаимодействие дают только элементы, бесконечно близкие к траектории источника. В качестве таких источников могут выступать не только медленные нейтроны или другие частицы низких энергий, но и некоторые примеси [13].

С другой стороны, при падении мощных коротких импульсов лазерного излучения на поверхность прозрачной жидкости при условиях, когда тепловой механизм не успевает срабатывать, определяющим оказывается стрикционный механизм и для силы $\boldsymbol{f}$, действующей на единицу массы жидкости, мы можем записать

$$\boldsymbol{f} = -\nabla\{\beta|\overline{E|^2}/8\pi\},$$

где E — напряженность электрического поля в импульсе, $-\beta = \partial\varepsilon/\partial\rho$, ε — диэлектрическая проницаемость среды.

При рассмотрении излучения поверхностных волн, длины которых велики по сравнению с характерными пространственными размерами оптического импульса, мы также можем воспользоваться выражением (1), связав параметр W с энергией в импульсе.

В рамках описанной модели система гидродинамических уравнений имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -(\rho^{-1})\nabla p + \boldsymbol{f}, \quad \dot{\rho} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

Эту систему необходимо дополнить как кинетическим и динамическим граничными условиями на свободной поверхности

$$\dot{\eta} = \boldsymbol{v}\nabla(z - \eta), \quad p|_{z=\eta} = p_\alpha = -\alpha \operatorname{div}\left(\nabla\eta/\sqrt{1 + (\nabla\eta)^2}\right) \tag{3}$$

(здесь α — коэффициент поверхностного натяжения), так и условием типа излучения на бесконечности: $v \to 0$ при $z \to -\infty$.

3. Имея в виду применение гамильтоновского метода, позволяющего с наиболее общих позиций подойти к вопросам об излучении поверхностных волн, проведем переформулировку поставленной задачи.

Систему (2), (3) можно переписать в канонической форме:

$$\dot{q} = \delta H/\delta\varphi, \quad \dot{\varphi} = -\delta H/\delta q. \tag{4}$$

В соотношении (4) гамильтониан $H = H' + H''$, H' — функционал, совпадающий с выражением для гамильтониана среды без источников, H'' — добавка, связанная с наличием источника вида (1) и описывающая процессы излучения тех типов волн, которые могут существовать в среде, $q = \rho\theta(\eta - z)$ — каноническая координата, φ — канонический импульс, $\theta(t) = (1/2)(1 + \operatorname{sign} t)$ — функция Хевисайда.

В переменных q и φ выражения H' и H'' имеют вид

$$\begin{aligned} H' &= \int d\boldsymbol{r}\, dzq\, [(\nabla\varphi)^2/2 + p/\rho + C], \\ H'' &= \int d\boldsymbol{r}\, dz\, Wq\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}_2 t)\,\delta(z - V_1 t). \end{aligned} \tag{5}$$

Постоянная C может быть определена, исходя из условий динамического равновесия [6]. Отметим здесь, что вопрос о введении канонических переменных в подобную систему без источников рассматривался в работах [7–9].

Поскольку в настоящей работе нас интересуют эффекты, связанные с возбуждением только поверхностных волн, перейдем к приближению несжимаемой жидкости. В этом случае удобно вместо канонической пары $\{q, \varphi\}$ [8] ввести переменные $\{\eta, \rho\varphi|_{z=\eta}\}$ [7], имеющие смысл поверхностных, и далее перейти к нормальным переменным c_k и c_k^*. Отметим, что имеют место соотношения

$$\frac{\delta\eta}{\delta c_k^*} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{\omega_k\rho}\right)^{1/2}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}),$$
$$\frac{\delta(\rho\varphi|_{z=\eta})}{\delta c_k^*} = \frac{i}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_k\rho}{|\boldsymbol{k}|}\right)^{1/2}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}). \qquad (6)$$

Здесь $\omega_k^2 = (\alpha/\rho)\,|\boldsymbol{k}|^3$ — закон дисперсии капиллярных волн, α — коэффициент поверхностного натяжения.

В нормальных переменных система уравнений (4) с учетом формул преобразования (6) принимает вид

$$\dot{c}_k + i\frac{\delta H'}{\delta c_k^*} = -i\frac{\delta H''}{\delta c_k^*}, \qquad \dot{c}_k^* - i\frac{\delta H'}{\delta c_k} = i\frac{\delta H''}{\delta c_k}. \qquad (7)$$

В приближении, которое позволяет ограничиться в разложении гамильтониана H по степеням c_k величинами не выше второго порядка малости, имеем

$$H' \simeq H'_{(2)} = \int d\boldsymbol{k}\,\omega_k c_k^* c_k.$$

Уравнение (7) теперь можно переписать следующим образом:

$$\dot{c}_k + i\omega_k c_k = -\frac{iW}{2\pi}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|\,\rho}{2\omega_k}\right)^{1/2}\delta\left[\eta(\boldsymbol{r}, t) - V_1 t\right]\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{V}_2 t}\exp(-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_2 t). \qquad (8)$$

4. Задавая нулевое начальное условие $c_k|_{t=-\infty} = 0$, которое автоматически обеспечивает выполнение принципа излучения, нетрудно отыскать решение уравнения (8) для первоначально невозмущенной поверхности ($\eta = z = 0$):

$$c_k(t) = -\frac{iW}{2\pi}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|\,\rho}{2\omega_k}\right)^{1/2}\frac{1}{|V_1|}\exp(-i\omega_k t)\,\theta(t).$$

Полученное выражение позволяет выписать энергетические характеристики излучения поверхностных волн — спектральную плотность энергии ε_k и спектральную мощность $\dot{\varepsilon}_k$:

$$\varepsilon_k = \omega_k |c_k|^2 = (W^2/8\pi^2)\,(|\boldsymbol{k}|\,\rho/V_1^2)\,\theta(t),$$
$$\dot{\varepsilon}_k = \omega_k (\partial/\partial t)\,|c_k|^2 = (W^2/8\pi^2)\,(|\boldsymbol{k}|\,\rho/V_1^2)\,\delta(t). \qquad (9)$$

Анализ соотношений (9) показывает, что в рассматриваемом приближении первоначально невозмущенной поверхности $\eta = 0$ излучение носит импульсный характер и происходит в момент достижения источником свободной поверхности, причем с энергетической точки зрения «вход» и «выход» источника равноправны. Легко заметить, что рассматриваемое приближение приводит нас, по крайней мере, к двум нефизичным результатам: во-первых, спектральная плотность энергии ε_k и спектральная мощность $\dot{\varepsilon}_k$ неограниченно растут с уменьшением $|V_1|$; во-вторых, интеграл $\int \varepsilon_k\,d\boldsymbol{k}$, определяющий полную энергию излучения, расходится. Отметим, что аналогичная ситуация возникает и в электродинамике при пересечении заряженной частицей границы раздела (см., например, [15]). Для того, чтобы разрешить указанные парадоксы, следует учесть либо конечные размеры источника, либо наличие некоторого переходного слоя. Отметим здесь, что в случае переходного излучения поверхностных волн в плазме точечным источником благодаря дисперсии расходимость полной энергии излучения отсутствует [16].

5. Предположим теперь, что форма поверхности может быть описана случайным гауссовым процессом со средним значением отклонения $\eta=0$ и конечной дисперсией $\overline{\eta^2}=\sigma^2$. В начальном условии случайный характер поверхности учтем, положив

$$c_k|_{t=-\infty}=\tilde{c}_k\exp(-i\omega_k t), \tag{10}$$

где амплитуды $\tilde{c}_k$ предполагаются действительными и случайными.

Представим правую часть уравнения (8) в виде ее среднего значения $\bar{f}$ (по реализациям случайного процесса) и флуктуаций f', для которых $\overline{f'}=0$ [17]. Последним слагаемым, связанным со случайным характером воздействия источника на поверхность жидкости, пренебрежем и в дальнейшем будем интересоваться только усредненным в указанном смысле волновым процессом и решением, определяемым случайным характером самой поверхности. Усредним правую часть уравнения (8) по реализациям $\eta(t)$, учитывая, что для случайного гауссова процесса с параметрами $\bar{\eta}=0$ и $\overline{\eta^2}=\sigma^2$ справедливо соотношение [17]

$$\overline{\delta[\eta(\tau)-V_1\tau]}=(1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp(-V_1^2\tau^2/2\sigma^2).$$

Принимая во внимание начальное условие (10) и сделанные выше замечания, решение уравнения (8) запишем в виде

$$\begin{gathered}c_k(t)\approx c_k^{(0)}+c_k^{(1)}=\tilde{c}_k\exp(-i\omega_k t)-\\ -\frac{iW}{4\pi}\frac{1}{|V_1|}\left(\frac{|k|\rho}{2\omega_k}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\Omega_k^2\sigma^2}{2V_1^2}\right)\exp(-i\omega_k t)\times\\ \times[\operatorname{erf}y_2-\operatorname{erf}y_1],\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\operatorname{erf}y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y dz\exp(-z^2),\quad y=\frac{|V_1|\tau}{\sigma\sqrt{2}}-i\frac{\Omega_k\sigma}{|V_1|\sqrt{2}},$$

$$y_1=-\infty-i\frac{\Omega_k\sigma}{|V_1|\sqrt{2}},\quad y_2=\frac{|V_1|t}{\sigma\sqrt{2}}-i\frac{\Omega_k\sigma}{|V_1|\sqrt{2}},\quad \Omega_k=\omega_k-(kV_1).$$

Рассмотрим случай малых σ, т. е. таких, что $|V_1t/\sigma\sqrt{2}|\gg 1$. При этом $|y_2|\gg 1$, $\operatorname{erf}y_1\to -1$, а для $\operatorname{erf}y_2$ применимо асимптотическое выражение [18]

$$\operatorname{erf}y_2\approx\operatorname{sign}[\operatorname{Re}y_2]-(1/y_2\sqrt{\pi})\exp(-y_2^2).$$

Поскольку $1+\operatorname{sign}[\operatorname{Re}y_2]=2\theta[\operatorname{Re}y_2]=2\theta(t)$, преобразуем (11) к виду

$$c_k(t)=\tilde{c}_k\exp(-i\omega_k t)-\frac{iW}{4\pi|V_1|}\left(\frac{|k|\rho}{2\omega_k}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\Omega_k^2\sigma^2}{2V_1^2}\right)\times$$

$$\times \exp(-i\omega_k t)\,[2\theta(t) - (1/y_2\sqrt{\pi})\exp(-y_2^2)].$$

Теперь нетрудно найти спектральную плотность энергии, усредненную по времени. При этом следует учесть, что время корреляции, соответствующее времени нахождения источника в приповерхностном слое, мало в сравнении со временем установления системы, и мы можем пренебречь интерференцией поля излучения и флуктуаций поверхности и считать их отделенными друг от друга. Поэтому

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{\text{ш}} + \varepsilon_k^{\text{п}} = \omega_k \overline{|\tilde{c}_k|^2} + \frac{W^2}{8\pi^2}\frac{|k|\rho}{V_1^2}\exp\left(-\frac{\Omega_k^2\sigma^2}{V_1^2}\right)\theta(t), \tag{12}$$

где первое слагаемое является шумовой компонентой, а второе, совпадающее при $\sigma \to 0$ с выражением ε_k в (8), представляет спектральную плотность энергии, излучаемой движущимся источником.

Легко найти также полную энергию, излучаемую источником, движущимся перпендикулярно поверхности жидкости:

$$E = \int d\boldsymbol{k}\, \varepsilon_k^{\text{п}} = \frac{W^2}{12\pi^2}\frac{\rho^2}{\alpha\sigma^2}\theta(t).$$

Заметим, что полная энергия излучения обратно пропорциональна коэффициенту поверхностного натяжения α. Таким образом, наибольший эффект следует ожидать для жидкостей с малым значением коэффициента α, к числу которых принадлежит, например, жидкий гелий. С другой стороны, полная энергия излучения $E \sim W^2$, где параметр W характеризует энергию взаимодействия, и для коротких мощных электромагнитных импульсов эффект возбуждения поверхностных волн может оказаться значительным.

Далее заметим, что полная энергия излучения в случае малых σ не зависит от V_1. Это справедливо только для таких значений скоростей V_1, когда можно пренебречь зависимостью параметра взаимодействия W от скорости движения источника. Эффективность же передачи кинетической энергии источника определенной k-й гармоники излученных поверхностных волн, как следует из соотношения (12), зависит от скорости V_1 и достигает максимального значения при $V_1 = \Omega_k\sigma$. Это действительно так, поскольку наиболее эффективно возбуждаются те гармоники, для которых величина $(\Omega_k)^{-1}$ сравнима со временем $\tau = \sigma/V_1$ движения источника в «переходном» поверхностном слое.

6. Проанализируем теперь возможность излучения поверхностных волн при горизонтальном движении точечного источника на глубине h ($V_1 = 0$). Зададим в первом приближении форму поверхности в виде $\eta = b\sin(\omega_k t - \boldsymbol{kr})$, где $b = \text{const} > 0$ — амплитудное значение отклонения поверхности от уровня $z = 0$.

Решение уравнения (8) с нулевым начальным условием при $t = 0$ в этом случае имеет вид

$$c_k(t) = -\frac{iW}{2\pi}\left(\frac{|k|\rho}{2\omega_k}\right)^{1/2}\exp(-i\omega_k t)\int_0^t \exp(i\Omega_k\tau)\times$$
$$\times\,\delta\,[b\sin(\omega_k\tau - \boldsymbol{kr}) - h]\big|_{r=V_2\tau}\,d\tau. \tag{13}$$

Необходимым условием существования нетривиального решения является выполнение неравенства $|h| \leqslant b$. Следовательно, в рассматриваемом приближении излучение волн может происходить только тогда, когда источник движется в поверхностном слое толщиной $2b$.

Это есть не что иное, как эффект резонансного переходного излучения, т. е. переходного излучения в среде, свойства которой изменяются по периодическому закону. Вместе с тем, в соответствии с предложенной в [2] терминологией, этот процесс можно трактовать как переходное рассеяние, рассматривая его как излучение, возникающее при падении поверхностной волны на движущуюся с постоянной скоростью или покоящуюся частицу. В этой связи представляет интерес получить выражение для спектральной мощности $\dot{\varepsilon}_k$ излучаемых волн, которая простым образом определяется через нормальные переменные c_k и c_k^*. Производя вычисление в (13), найдем

$$\dot{\varepsilon}_k = \frac{W^2}{8\pi^2} \frac{|k|\rho}{b^2\Omega_k} \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta(t - \tau_n^*), \qquad (14)$$

где $\tau_n^* = \Omega_k^{-1} (\pi n - \arcsin hb^{-1})$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Как следует из (14), излучение поверхностных волн будет происходить и в том случае, если источник покоится ($V_2 = 0$). В этом случае имеет место рассеяние волн на неподвижном источнике. Этот аспект подчеркивает целесообразность введения термина переходного рассеяния применительно к указанному эффекту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1975.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — УФН, 1978, **126**, № 4, с. 553.
3. Ginzburg V. L., Tsytovich V. N.— Physics Reports, 1979, **49**, № 1, p. 1.
4. Докучаев В. П.— ЖЭТФ, 1962, **43**, № 2, с. 595.
5. Бойко В. С., Гарбер Р. И., Кившик В. Ф., Кривенко Л. Ф. — ЖЭТФ, 1976, **71**, № 2, с. 708.
6. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. — Вестник МГУ. Сер. Физика, астрономия, 1976, **17**, № 5, с. 603.
7. Захаров В. Е. — ПМТФ, 1968, № 2, с. 86.
8. Гончаров В. П., Красильников В. А., Павлов В. И. Тезисы докладов IX Всесоюзной акустической конференции. Секция Б.—М.: АКИН АН СССР, 1977.
9. Goncharov V. P., Krasilnikov V. A., Pavlov V. I. IX International Congress on Acoustics.— Madrid: 1977, № 36, p. 744.
10. Захаров В. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 4, с. 431.
11. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
12. Халатников И. М., Жарков В. Н. — ДАН СССР, 1953, **93**, № 5, с. 799.
13. Есельсон Б. Н., Григорьев В. Н., Иванцов В. Г. и др. Растворы квантовых жидкостей He^3—He^4. — М.: Наука, 1973.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.—Л.: Гостехиздат, 1944.
15. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. — Ереван: АН АрмССР, 1969.
16. Эйдман В. Я. — Изв. вузов — Радиофизика, 1965, **8**, с. 188.
17. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
18. Справочник по специальным функциям./Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1980.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 30 марта 1981 г.

TO THE THEORY OF TRANSIENT RADIATION AND TRANSIENT SCATTERING OF SURFACE WAVES

V. I. Pavlov, A. I. Sukhorukov, P. M. Trebler

Transient radiation and transient scattering of surface waves in a fluid is considered by a moving point source. Spectral energetic characteristics of the radiation have been obtained.