ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 531.36

О МНОГОКРАТНОМ ДЕЛЕНИИ ЧАСТОТЫ В КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Е. Б. Гледзер

Рассмотрено комплексное расширение квадратично нелинейной системы каскадного типа. Изучаются решения, в которых с увеличением номера моды осуществляется последовательное деление частоты колебаний пополам. Рассмотрены вопросы устойчивости. Отмечена связь рассматриваемых уравнений с приближенным описанием нелинейных взаимодействий в гидродинамических уравнениях.

Введенные Обуховым квадратично нелинейные цепочки [1, 2], порождающие рассмотренные в [3–5] каскадные системы, допускают, как известно, следующее «комплексное расширение» [3, 6] (с учетом слагаемых, моделирующих диссипацию и внешнее воздействие):

$$\dot{v}_0 = -p_0 \overset{*}{v}{}_1^2 + F_0, \quad \dot{v}_1 = p_0 \overset{*}{v}_0 \overset{*}{v}_1 - p_1 \overset{*}{v}{}_2^2, \ldots,$$
$$\dot{v}_i = p_{i-1} \overset{*}{v}_{i-1} \overset{*}{v}_i - p_i \overset{*}{v}{}_{i+1}^2, \quad \dot{v}_N = p_{N-1} \overset{*}{v}_{N-1} \overset{*}{v}_N - \lambda v_N. \tag{1}$$

Система (1) при $F_0 = 0$, $\lambda = 0$ сохраняет интегралы

$$E = \sum_{i=0}^{N} |v_i|^2, \quad H = \operatorname{Im} \sum_{i=0}^{N-1} (-2)^i p_i v_i v_{i+1}^2 \tag{2}$$

и может быть представлена в гамильтоновой форме с гамильтонианом H в переменных:

$$v_i = R_i e^{i\theta_i}, \quad \tau_i = (-2)^i \theta_i, \quad I_i = (1/2) R_i^2,$$
$$\dot{I}_i = -\partial H / \partial \tau_i, \quad \dot{\tau}_i = \partial H / \partial I_i, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{3}$$

Отметим, что к аналогичным системам приводится гамильтонова система, описывающая N нелинейно связанных осцилляторов с резонансными соотношениями третьего порядка $\omega_i + 2\omega_{i+1} = 0$, $i = 0, \ldots, N-1$, для частот ω_i, входящих в квадратичную часть гамильтониана взаимодействия [6, 7].

При $N = 1$ свободное движение системы (1) было рассмотрено в [3]. Перепишем систему в переменных $\psi_i = 2\theta_{i+1} + \theta_i$, $i = 0, \ldots, N-1$:

$$\dot{R}_i = p_{i-1} R_{i-1} R_i \cos \psi_{i-1} - p_i R_{i+1}^2 \cos \psi_i + \delta_{i0} f_0 \cos \alpha_0 - \lambda \delta_{iN} R_N,$$
$$\dot{\theta}_i = (-1/R_i)[p_{i-1} R_{i-1} R_i \sin \psi_{i-1} - p_i R_{i+1}^2 \sin \psi_i + \delta_{i0} f_0 \sin \alpha_0],$$
$$i = 0, \ldots, N, \quad F_0 = f_0 \exp(i\Phi_0), \quad \Phi_0 - \theta_0 = \alpha_0. \tag{4}$$

Рассмотрим частный случай зависимости от времени «внешних сил» F_0 — гармонических колебаний с частотой Ω_0:

$$\Phi_0 = \Omega_0 t + \Psi_0.$$

Тогда существует решение, в котором фазы θ_i осцилляторов имеют вид

$$\theta_i = \omega_i t + \varphi_i, \quad 2\omega_{i+1} + \omega_i = 0, \quad \omega_0 = \Omega_0. \tag{5}$$

Таким образом, в случае гармонических внешних сил система (1) выступает как преобразователь частоты, а именно — простейший делитель частоты

$$\omega_i = \omega_0 (-1/2)^i. \tag{6}$$

При этом стационарные значения амплитуд R_i^0, $i = 0, \ldots, N$, и начальные фазы $\varphi_i = \theta_i|_{t=0}$, $i = 1, \ldots, N$, определяются по заданным f_0, Ψ_0, φ_0 из системы уравнений

$$\begin{gathered} p_{i-1} R_{i-1}^0 R_i^0 \cos\psi_{i-1}^0 - p_i R_{i+1}^{02} \cos\psi_i^0 + \delta_{i0} f_0 \cos\alpha_0 - \lambda\delta_{iN} R_N^0 = 0, \\ (-1/R_i^0)\,[p_{i-1} R_{i-1}^0 R_i^0 \sin\psi_{i-1}^0 - p_i R_{i+1}^{02} \sin\psi_i^0] + \delta_{i0} f_0 \sin\alpha_0 = \omega_i, \\ \psi_i^0 = 2\varphi_{i+1} + \varphi_i, \quad \alpha_0 = \Psi_0 - \varphi_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Уместно отметить, что рассматриваемая комплексная цепочка как преобразователь частоты может быть получена на основе следующей нелинейной системы каскадного типа, предложенной в [8] после соответствующей редукции уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{gathered} \dot\eta_n = p_{n-1} \psi_{n-1} \psi_n - p_n \eta_{n+1} \psi_{n+1} + \delta_{n0} g_1 - \lambda\delta_{nN}\eta_n, \\ \dot\psi_n = p_{n-1} \eta_{n-1} \eta_n - p_n \eta_{n+1} \psi_{n+1} + \delta_{n0} g_2 - \lambda\delta_{nN}\psi_n. \end{gathered} \tag{8}$$

В комплексных переменных

$$W_n = (1/4)\,[(\eta_n + \psi_n) - i\,(\eta_n - \psi_n)]$$

система (8) запишется в виде

$$\begin{gathered} \dot W_n = (p_{n-1} W_{n-1}^* W_n^* - p_n W_{n+1}^{*2}) + (p_{n-1} W_{n-1} W_n^* - p_n W_{n+1}^2) + \\ + p_{n-1} (W_{n-1}^* W_n - W_{n-1} W_n^*) + \delta_{n0} F_0 - \lambda\delta_{nN} W_n. \end{gathered} \tag{9}$$

Рассмотрим эту систему в переменных $\{R_i, \theta_i\}$, где

$$\theta_i = \omega_i t + \varphi_i(t), \quad \omega_i = \omega_0 (-1/2)^i,$$

а $\varphi_i(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Тогда

$$\begin{gathered} \dot R_n = p_{n-1} R_n R_{n-1}\,[\cos\psi_{n-1}^0 + \cos(4\omega_n t + 2\varphi_n - \varphi_{n-1})] - \\ - p_n R_{n+1}^2\,[\cos(4\omega_{n+1} t + 2\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \cos\psi_n^0] + \delta_{n0} f_0 \cos\alpha_0 - \lambda\delta_{nN} R_N, \\ \omega_n + \dot\varphi_n = (-1/R_n)\,\{p_{n-1} R_n R_{n-1}\,[2\sin(4\omega_{n+1} t + \varphi_{n-1}) + \\ + \sin\psi_{n-1}^0 + \sin(4\omega_n t + 2\varphi_n - \varphi_{n-1})] - p_n R_{n+1}^2\,[\sin\psi_n^0 - \\ - \sin(4\omega_{n+1} t + 2\varphi_{n+1} - \varphi_n)] - \delta_{n0} f_0 \sin\alpha_0\}, \quad \psi_n^0 = 2\varphi_{n+1} + \varphi_n. \end{gathered}$$

Если теперь усреднить эту систему по быстро меняющимся переменным, то получим систему (7). Это соответствует отбрасыванию в уравнениях (9) второй и третьей групп слагаемых.

Интересно отметить, что при выборе несколько иной схемы деления частоты:

$$2\omega_{i+1} - \omega_i = 0, \quad \omega_i = \omega_0 (1/2)^i,$$

аналогичным способом можно получить систему (9) с отброшенными первой и третьей групп слагаемых. Очевидно, что она заменой переменных приводится к виду (1).

Рассмотрим свободное движение системы (1). Из (7) получим, что условием его существования, если данную систему рассматривать как делитель частоты, являются равенства

$$\begin{gathered} \psi_i = \psi_i^0 = \pi/2, \quad i = 0, \ldots, N-1, \quad \psi_i^0 = 2\varphi_{i+1} + \varphi_i, \\ p_i \frac{R_{i+1}^{0^2}}{R_i^0} - p_{i-1} R_{i-1}^0 = \omega_i, \quad i = 0, \ldots, N, \\ \omega_i = \omega_0(-1/2)^i, \quad i = 0, \ldots, N. \end{gathered} \tag{10}$$

Заметим, что это решение является стационарным решением следующей системы (12), полученной из (4):

$$\dot{\theta}_0 = p_0 \left(R_1^2 / R_0 \right) \sin \psi_0; \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \dot{R}_i = p_{i-1} R_{i-1} R_i \cos \psi_{i-1} - p_i R_{i+1}^2 \cos \psi_i, \quad i = 0, \ldots, N, \\ \dot{\psi}_i = 2 p_{i+1} (R_{i+2}^2 / R_{i+1}) \sin \psi_{i+1} + [p_i (R_{i+1}^2 / R_i) - \\ - 2 p_i R_i] \sin \psi_i - p_{i-1} R_{i-1} \sin \psi_{i-1}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \\ \psi_i = 2\theta_{i+1} + \theta_i, \quad i = 0, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{12}$$

Система (12) не зависит от уравнения (11) и имеет порядок на единицу меньше, чем исходная (4).

Подчеркнем также, что переход к действительному случаю в (4), (7) осуществляется при

$$\psi_i = 0 \quad (\theta_i = 0), \quad \Phi_0 = \theta_0 = 0, \quad \omega_0 = 0. \tag{13}$$

Рассматриваемое же теперь решение (10) свободной системы не переходит в решение действительной цепочки (1), поскольку в отличие от (13) с необходимостью принято $\psi_i = \pi/2$.

Рассмотрим устойчивость стационарного решения (10) системы (12), используя для построения функции Ляпунова то обстоятельство, что свободное движение системы (4), а значит и (12), сохраняет два интеграла (2). Из (10) получаем уравнения для определения R_i^0:

$$\begin{gathered} R_i^0 = V_{i,\nu} \omega_0, \\ p_i (V_{i+1,\nu}^2 / V_{i,\nu}) - p_{i-1} V_{i-1,\nu} = (-1/2)^i, \end{gathered} \tag{14}$$

где индекс ν нумерует различные решения уравнений (14). Каждому решению $V_{i,\nu}$ отвечает определенное значение $\omega_0 = \omega_{0,\nu}$ на энергетической поверхности $E = \text{const}$:

$$\omega_{0,\nu}^2 = E \Big/ \sum_{i=0}^{N} V_{i,\nu}^2. \tag{15}$$

Рассмотрим вблизи ν-го решения (14), (15) интеграл

$$F = \frac{E - E_0}{\omega_{0,\nu}^2} + \frac{\lambda}{4} (E - E_0)^2 - 2 \frac{H - H_0}{\omega_{0,\nu}^3}, \tag{16}$$

где E_0, H_0 — значения (2) при (10), (14), λ — некоторая постоянная. В достаточно малой окрестности рассматриваемого решения знак F определяется квадратичными по отклонениям $R_i' = R_i - R_i^0$, $\psi_i' = \psi_i - \psi_i^0$ членами (линейные слагаемые отсутствуют в силу выбора F):

$$F(u, \psi) = A(u) + \lambda B(u) + C(\psi), \tag{17}$$

$$A(u) = -\sum_{i=0}^{N} V_i^2 u_i^2 + 2\sum_{i=0}^{N-1} (-2)^i p_i V_i V_{i+1}^2 (u_{i+1} - u_i)^2,$$

$$B(u) = \left(\sum_{i=0}^{N} V_i^2 u_i\right)^2, \quad C(\psi) = \sum_{i=0}^{N-1} (-2)^i p_i V_i V_{i+1}^2 \psi_i'^2,$$

$$u = (u_0, \ldots, u_N), \quad \psi = (\psi_0', \ldots, \psi_N'), \quad u_i \equiv R_i'/R_i^0,$$

$$V_i \equiv V_{i,\nu}.$$

Квадратичная форма $C(\psi)$ положительно определена при

$$(-1)^i V_i > 0, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{18}$$

Отметим, что поскольку φ_i при $i \geqslant 1$ в (5), (10) определены с точностью до π, то R_i^0 в (10) могут быть как положительными, так и отрицательными. Отсюда следует существование решений уравнений (14), удовлетворяющих (18).

Форма $A(u) + \lambda B(u)$ в (17) при соответствующем выборе λ является положительно определенной (по теореме Финслера), если $A(u) \geqslant 0$ при всех u, таких, что $B(u) = 0$. Выразив u_N из уравнения $B(u) = 0$ и подставляя в $A(u)$, получим

$$A(u) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-2} w_i^2 \rho_{i+1} - 4\sum_{i=0}^{N-3} w_i w_{i+1} \rho_{i+1}\right],$$

$$\rho_{i+1} = 2(-2)^i p_i V_i V_{i+1}^2 = V_{i+1}^2 - \frac{1}{2} V_{i+2}^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{N-i-1} V_N^2,$$

$$\rho_N = V_N^2, \quad w_i = u_i - u_{N-1}, \quad i = 0, \ldots, N-2, \quad w_{N-1} = 0. \tag{19}$$

Из (19) следует, что если для некоторых решений системы (14) справедлив критерий Сильвестра для якобиевой матрицы

$$\begin{bmatrix} \rho_1 & -2\rho_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -2\rho_1 & \rho_2 & -2\rho_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho_2 & \rho_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -2\rho_{N-3} & \rho_{N-2} & -2\rho_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -2\rho_{N-2} & \rho_{N-1} \end{bmatrix},$$

то условия названной выше теоремы выполнены.

Таким образом, в достаточно малой окрестности стационарного решения (10), (14) уравнений (12), лежащего на энергетической поверхности $E = E_0$, построена функция Ляпунова. Фазовая точка системы движется на множестве, являющемся пересечением поверхностей $F(u, \psi) = \delta$ и $E = E_0$.

Остановимся на вопросе о решениях уравнений (14). В обозначениях

$$V_i = v_i(-1/2q)^i, \quad \varepsilon = (1/2q)^2, \quad p_i = q^i,$$
$$v_{i+1}^2 = v_i(1-2v_{i-1})/\varepsilon, \quad i = 0, \ldots, N, \quad v_{N+1} = v_{-1} = 0 \tag{20}$$

условию (18) отвечает

$$v_i > 0, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{21}$$

При $i = N$ $v_{N-1} = 1/2$. Ищем v_{N-j} в виде отношения полиномов

$$v_{N-j} = \frac{P_j^1(x)}{P_j^2(x)}, \quad x = \frac{v_{N-1}^2}{v_{N-2}} = \frac{1}{4v_{N-2}}. \tag{22}$$

Из (20), (22) имеем

$$\frac{P_j^1(x)}{P_j^2(x)} = \frac{1}{2}\left[1 - \varepsilon\left(\frac{P_{j-2}^1(x)}{P_{j-2}^2(x)}\right)^2 \frac{P_{j-1}^2(x)}{P_{j-1}^1(x)}\right]. \tag{23}$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения

$$P_j^1(x) = (1/2)\left[\left(P_{j-2}^2(x)\right)^2 P_{j-1}^1(x) - \varepsilon\left(P_{j-2}^1(x)\right)^2 P_{j-1}^2(x)\right],$$
$$P_j^2(x) = \left(P_{j-2}^2(x)\right)^2 P_{j-1}^1(x). \tag{24}$$

Уравнения (20), (22) дают

$$v_{N-2} = 1/4x, \quad P_2^1(x) = 1, \quad P_2^2(x) = 4x,$$
$$v_{N-3} = (1/2)(1-\varepsilon x), \quad P_3^1 = (1/2)(1-\varepsilon x), \quad P_3^2(x) = 1. \tag{25}$$

По (25) с помощью (24) находятся полиномы при $j \geqslant 4$. Полином $P_{N+1}^1(x)$ равен нулю, поскольку $v_{-1} = 0$:

$$P_{N+1}^1(x) = 0. \tag{26}$$

Число действительных решений уравнения (26) определяет число различных решений ν уравнений (14):

$$1 \leqslant \nu \leqslant \nu_N.$$

Отметим, что число всех решений уравнения (26) при данном N определяется формулой

$$n_N = 2n_{N-1} + (-1)^{N-1}, \quad n_2 = 1. \tag{27}$$

Выделим некоторые частные случаи рассмотренных стационарных решений. Из (14) видно, что при больших i справедливо решение

$$V_i = cq^{-i/3}, \tag{28}$$

соответствующее, как указывается в [3], закону Колмогорова — Обухова для развитого турбулентного потока. Более подробно о таких решениях цепочек типа (1) идет речь в [9], где также указаны некоторые физические примеры систем, содержащих подсистемы рассматриваемых уравнений (1).

Отметим, что решение (28) знакоопределено, т. е. функция Ляпунова вида (17) для него не может быть построена: знакопеременной оказывается функция $C(\psi)$ — часть формы F, зависящая от угловых переменных ψ'_i. Рассмотрим поэтому другие стационарные решения системы (1) вида (21), (22). При этом проверка выполнения условий критерия Сильвестра для выписанной якобиевой матрицы в общем случае представляет определенную трудность, поскольку величины ρ_i являются сложными функциями от решений (22), определяемых через корни уравнения (26) с помощью рекуррентных соотношений (24). Ясно, что не для всех таких решений соответствующий критерий Сильвестра выполняется. Остановимся поэтому на некоторых частных случаях.

При $N = 1$ положительная определенность формы F показывается непосредственно. При $N = 2$ из (19) имеем $\rho_1 > 0$. Так как $\rho_0 = V_0 - \rho_1/2 = 0$, то $\rho_1 = 2V_0^2 > 0$. При $N = 3$ к условию $\rho_1 > 0$ добавляется $\rho_2 > 4\rho_1$. Оно эквивалентно $V_1^2 > 6V_0^2$. Для $y = \sqrt{v_0}$ из (20) получим кубическое (см. (27)) уравнение

$$2y^3 - y + (1/4)\,\varepsilon^{3/2} = 0,$$

которое при $\varepsilon \to 0$ имеет решение $y = \varepsilon^{3/2}/4$. Отсюда $V_0^2 = (1/2)^8 \varepsilon^6$, $V_1^2 = (1/2)^4 \varepsilon^3$. И указанное выше условие при малых ε выполняется для найденного решения.

Представляет интерес привести вид гамильтоновой системы (3) в окрестности решения (10). Разложив H в (2) по степеням отклонений $\vartheta_i' = \vartheta_i - \vartheta_i^0$, $I_i' = I_i - I_i^0$, получим

$$\dot{I}_i' = -\partial H_2/\partial\vartheta_i', \quad \dot{\vartheta}_i' = \partial H_2/\partial I_i',$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\,\omega_0 \sum_{i=0}^{N} I_i^0 \xi_i^2 - \sqrt{2} \sum_{i=0}^{N-1} (-2)^i p_i I_{i+1}^0 \sqrt{I_i^0} \left\{ \frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_i)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\xi_i - \xi_{i+1} \right) \xi_i^2 + [(\vartheta_i' - \vartheta_{i+1}')/(-2)^i]^2 \right\},$$

$$\xi_i = I_i'/I_i^0, \quad I_i^0 = (1/2)\, R_i^{0^2}, \quad \vartheta_i = (-2)^i\, \theta_i,$$

где в H_2 оставлены только члены до третьей степени по ξ_i, ϑ_i' и при выбранном решении $V_{i,\nu}$ величины ω_0 и R_i^0 определяются согласно (15) и (14).

Автор благодарен А. М. Обухову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухов А. М. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1971, 7, № 7, с. 695.
2. Oboukhov A. M. — Gerland Beitr. Geophys., 1973, 82, № 4, p. 282.
3. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. — М.: Наука, 1974.
4. Глуховский А. Б. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 11, № 8, с. 779.
5. Вишик С. М. — ДАН СССР, 1976, 228, № 6, с. 1269.
6. Вишик С. М., Обухов А. М. — Сиб. мат. журн., 1979, 20, № 3, с. 502.
7. Цельман Р. Х. — ПММ, 1970, 34, № 15, с. 975.
8. Гледзер Е. Б. — Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1980, № 1, с. 26.
9. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. — М.: Наука, 1981.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1981 г.

MULTIPLE FREQUENCY DIVISION IN QUADRATIC NONLINEAR SYSTEMS

E. B. Gledzer

A complex broadening of quadratic nonlinear system of a cascade type is considered. Solutions are studied where an increase of the mode number is accompanied by a successive halving of the oscillation frequency. Stability problems are analysed. A relation between equations considered and approximate description of nonlinear interactions in hydrodynamic equations is noted.