

УДК 538.3

## ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ ПОТОКОМ

*A. П. Коваленко, A. A. Колоколов*

На основе интерференционного тензора максвелловских напряжений рассмотрен обмен импульсом и моментом импульса между атомом и плоскими электромагнитными волнами в вакууме.

В работе [1] было показано, что обмен энергией между атомом и падающей на него электромагнитной волной описывается интерференционным потоком вектора Пойнтинга, который определяется полями излучения атома и волны. Поэтому можно ожидать, что обмен импульсом и моментом импульса также осуществляется интерференционным образом и должен описываться интерференционной составляющей максвелловского тензора напряжений. Настоящая работа посвящена анализу обмена импульсом и моментом импульса между атомом и плоскими электромагнитными волнами в вакууме.

### 1. ОДНОРОДНАЯ ПЛОСКАЯ ВОЛНА

Скорость изменения  $s$ -й компоненты импульса  $\mathbf{P}$  электромагнитного поля в объеме  $V$  выражается через поверхностный интеграл максвелловского тензора напряжений  $T_{sr}$  [4]:

$$(dP_s/dt) = \int_S T_{sr} d\mathbf{f}_r. \quad (1)$$

Здесь  $T_{sr} = (1/4\pi) \{-E_s \bar{E}_r - H_s H_r + (1/2) \delta_{sr} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\}$ ,  $s, r = x, y, z$ ;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженностей электрического и магнитного полей соответственно;  $\delta_{sr}$  — символ Кронекера;  $d\mathbf{f}_r$  — компоненты трехмерного вектора элемента поверхности  $S$ , охватывающей объем  $V$ ; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Скорость изменения  $s$ -й компоненты момента импульса  $\mathbf{M}$  электромагнитного поля в объеме  $V$  описывается уравнением [5]

$$(dM_s/dt) = (1/2) l_{srp} \int_S (R_r T_{pl} - R_p T_{rl}) d\mathbf{f}_l. \quad (2)$$

Здесь  $l_{srp}$  — антисимметричный единичный тензор третьего ранга,  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор точки интегрирования на поверхности  $S$ .

Согласно законам сохранения импульса и момента импульса при взаимодействии атома с излучением выражения (1) и (2), взятые с обратным знаком, должны определять соответственно силу  $\mathbf{F}$  и момент сил  $\mathbf{M}_F$ , действующие на атом со стороны излучения. Для случая плоской волны в дипольном приближении соответствующие выражения для  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{M}_F$  хорошо известны:

$$\mathbf{F} = \langle (d\mathbf{v}) \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{d} \times \mathbf{H}] \rangle = (1/2) \operatorname{Re} [-ik (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*) - (\nabla |E|/|E|) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}^*)]; \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_F = (1/2) \operatorname{Re} [\mathbf{d} \times \mathbf{E}^*]. \quad (4)$$

Здесь  $k$  — вещественная часть волнового вектора волны,  $d$  — дипольный момент атома, скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по времени. В формуле (3) первое слагаемое определяет силу, обусловленную поглощением или излучением атомом энергии электромагнитной волны. Второе слагаемое описывает градиентную силу, связанную с зависимостью от пространственных координат интенсивности электромагнитной волны.

Пусть однородная плоская волна распространяется в положительном направлении оси  $Ox$ , а ее напряженности электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей задаются формулами

$$E = \operatorname{Re}\{0, b, c\} \mathcal{E} \exp[i(kx - \omega t)]; \quad (5)$$

$$H = \operatorname{Re}\{0, -c, b\} \mathcal{E} \exp[i(kx - \omega t)].$$

Здесь  $b$  и  $c$  — комплексные числа, описывающие поляризацию волны и удовлетворяющие нормировке  $|b|^2 + |c|^2 = 1$ ,  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  и  $c$  — угловая частота волны и скорость света в вакууме соответственно. Будем также предполагать, что амплитуда  $\mathcal{E}$  медленно ( $|\partial_x \mathcal{E}/k|, |\partial_z \mathcal{E}/k| \ll 1$ ) уменьшается до нуля при  $\sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ . Под действием электрического поля волны (5) атом, помещенный в начало системы координат, приобретает дипольный момент

$$d = \operatorname{Re}\{\beta, \gamma\} \exp(-i\omega t). \quad (6)$$

Сложение полей волны (5) и диполя (6) дает интерференционное слагаемое в полном тензоре максвелловских напряжений  $T_{sr}$ , которое мы подставим в формулы (1) и (2). В качестве поверхности интегрирования выберем поверхность цилиндра  $-l \leq x \leq l$ ,  $y^2 + z^2 = R^2$ , где  $kl \gg 1$ ,  $R \gg l$ . В [1] было показано, что отличный от нуля интерференционный поток вектора Пойнтинга проходит только через поверхность  $x = l$ , поэтому в формулах (1) и (2) достаточно ограничиться интегрированием по этой поверхности.

Подставляя в формулы (1) и (2) интерференционное слагаемое тензора  $T_{sr}$ , после несложных преобразований получаем следующие выражения:

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{k^2}{4} \operatorname{Re} \left[ (\beta b^* + \gamma c^*) e^{-ikl} \int_l^{\sqrt{l^2 + R^2}} \mathcal{E}^* \left( \frac{1}{2} + \frac{l}{\rho} + \frac{l^2}{2\rho^2} \right) e^{ik\rho} d\rho \right]; \quad (7)$$

$$\frac{dM_x}{dt} = \frac{k^2}{8} \operatorname{Re} \left\{ (\beta c^* - \gamma b^*) e^{-ikl} \int_l^{\sqrt{l^2 + R^2}} \mathcal{E}^* \left[ -\left( \rho - \frac{i}{k} \right) - \left( \rho - \frac{3l}{k} \right) \frac{l}{\rho} + \left( \rho - \frac{i}{k} \right) \frac{l^2}{\rho^2} + \left( \rho - \frac{3l}{k} \right) \frac{l^3}{\rho^3} \right] e^{ik\rho} d\rho \right\}, \quad (8)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \frac{dP_z}{dt} = \frac{dM_y}{dt} = \frac{dM_z}{dt} = 0.$$

Отметим, что для получения выражений (7) и (8) поле диполя необходимо учитывать до членов порядка соответственно  $1/r^3$  и  $1/r^4$  включительно ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ).

Разлагая входящие в (7) и (8) интегралы по степеням малого параметра  $(kl)^{-1}$  и учитывая только первые члены разложения, получаем следующие формулы:

$$dP_x/dt = (\hbar/2) \operatorname{Re} i \{\beta (b\mathcal{E})^* + \gamma (c\mathcal{E})^*\}; \quad (9)$$

$$dM_x/dt = (1/2) \operatorname{Re} \{\gamma (b\mathcal{E})^* - \beta (c\mathcal{E})^*\}. \quad (10)$$

Легко проверить, что правые части формул (9) и (10), взятые с обратным знаком, совпадают с выражениями соответственно для силы (3)\* и момента сил (4), действующих на атом. Поэтому скорости изменения импульса  $P_{ax}$  и момента импульса  $M_{ax}$  атома описываются правыми частями формул (9) и (10), взятыми с обратным знаком.

Скорость поглощения (или излучения) энергии  $W$  атомом определяется известным выражением

$$W = (1/2) \operatorname{Re} (\dot{d} \cdot E^*) = -(\omega/2) \operatorname{Re} i \{\beta (b\mathcal{E})^* + \gamma (c\mathcal{E})^*\}. \quad (11)$$

С помощью формул (9) и (11) находим отношение скорости изменения импульса атома к скорости поглощения (или излучения) энергии:

$$\dot{P}_{ax}/W = k/\omega. \quad (12)$$

В случае циркулярной поляризации  $b = 1/\sqrt{2}$ ,  $c = \pm i/\sqrt{2}$  и с помощью формул (10) и (11) находим отношение скорости изменения момента импульса атома к скорости поглощения (или излучения) энергии:

$$\dot{M}_{ax}/W = \mp 1/\omega. \quad (13)$$

Соотношения (12) и (13) хорошо известны в теории однородных плоских волн. Они показывают, что в отношении переноса энергии, импульса и момента импульса интерференционный поток ведет себя подобно обычным однородным плоским волнам.

## 2. НЕОДНОРОДНАЯ ПЛОСКАЯ ВОЛНА

Пусть неоднородная плоская волна распространяется вдоль положительного направления оси  $Ox$ , а ее амплитуда экспоненциально убывает вдоль оси  $Oy$ . В общем случае суперпозиции ТЕ-волны с амплитудой  $\mathcal{E}_E$  и ТМ-волны с амплитудой  $\mathcal{E}_M$  напряженности электрического и магнитного полей неоднородной волны запишутся в виде

$$E = \{-i(h/k)\mathcal{E}_M, (k_x/k)\mathcal{E}_M, \mathcal{E}_E\} \exp[i(k_x x - \omega t) - hy], \quad (14)$$

$$H = \{i(h/k)\mathcal{E}_E, -(k_x/k)\mathcal{E}_E, \mathcal{E}_M\} \exp[i(k_x x - \omega t) - hy],$$

Здесь  $h = \sqrt{k_x^2 - k^2}$ ,  $k_x > k = \omega/c$ . Дипольный момент атома, индуцированный полем волны (14), записывается в виде

$$d = \operatorname{Re}(a, \beta, \gamma) \exp(-i\omega t). \quad (15)$$

В [1] было показано, что весь интерференционный поток вектора Пойнтинга проходит через плоскость  $y = -l$ ,  $kl \gg 1$ , поэтому в формулах (1) и (2) достаточно ограничиться интегрированием по этой поверхности. В результате громоздких вычислений получаются следующие выражения для скоростей изменения импульса и момента импульса излучения:

$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{k_x}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{h}{k} \alpha \mathcal{E}_M^* - i \frac{k_x}{k} \beta \mathcal{E}_M^* - i \gamma \mathcal{E}_E^* \right\}, \quad (16)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \frac{h}{2} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{h}{k} \alpha \mathcal{E}_M^* + \frac{k_x}{k} \beta \mathcal{E}_M^* + \gamma \mathcal{E}_E^* \right\},$$

\* В формуле (3) при этом не учитывается градиентная сила, поскольку падающий пучок предполагается достаточно широким.

$$\frac{dP_z}{dt} = 0;$$

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\beta \mathcal{E}_E^* + \frac{k_x}{k} \gamma \mathcal{E}_M^* \right\}, \\ \frac{dM_y}{dt} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \alpha \mathcal{E}_E^* - i \frac{h}{k} \gamma \mathcal{E}_M^* \right\}, \\ \frac{dM_z}{dt} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{k_x}{k} \alpha \mathcal{E}_M^* + i \frac{h}{k} \beta \mathcal{E}_M^* \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Скорость поглощения (или излучения) энергии атомом выражается формулой

$$W = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{h}{k} \alpha \mathcal{E}_M^* - i \frac{k_x}{k} \beta \mathcal{E}_M^* - i \gamma \mathcal{E}_E^* \right\}. \quad (18)$$

Легко убедиться в том, что скорость изменения импульса (16) и момента импульса (17) с точностью до знака совпадают соответственно с выражениями (3) для силы и (4) для момента сил, действующих на атом.

Полагая в формулах (16) и (18)  $d = \alpha_a E$ , где  $\alpha_a = \alpha'_a + i \alpha''_a$  — комплексная поляризуемость атома, и используя закон сохранения импульса  $\dot{P}_a = -\dot{P}$ , получаем следующие соотношения:

$$\frac{\dot{P}_{ax}}{W} = \frac{k_x}{\omega}, \quad \frac{\dot{P}_{ay}}{W} = -\frac{h}{\omega} \frac{\alpha'_a}{\alpha''_a}. \quad (19)$$

Первое соотношение описывает обмен импульсом между волной и атомом, связанный с поглощением ( $\alpha''_a > 0$ ) или вынужденным излучением ( $\alpha''_a < 0$ ) атома. Оно находится в полном согласии с результатами эксперимента по измерению импульса отдачи атома, взаимодействующего с полем неоднородной волны [2, 3]. Таким образом, интерференционный поток, проходящий через плоскость  $y = -l$ , переносит компоненту импульса, направленную по оси  $0x$ . Иными словами, если неоднородная волна возникает при полном внутреннем отражении, то интерференционный поток, проходящий через поверхность раздела сред, переносит компоненту импульса, параллельную этой поверхности.

Второе соотношение в (19) описывает обмен импульсом, связанный с действием на атом градиентной силы. Величина  $P_{ay}$  не зависит от  $\alpha''_a$  и уменьшается до нуля при  $h \rightarrow 0$ .

Рассмотрение обмена моментом импульса удобно проводить отдельно для трех возможных поляризаций волны, падающей на границу раздела сред и создающей неоднородную волну.

a) TE-волна:  $\mathcal{E}_E \neq 0, \mathcal{E}_M = 0$ .

$$\dot{M}_a = 0, \quad W = (1/2) \alpha''_a \omega |\mathcal{E}_E|^2. \quad (20)$$

Обмен энергией между волной и атомом происходит без изменения момента импульса атома.

b) TM-волна:  $\mathcal{E}_E = 0, \mathcal{E}_M \neq 0$ .

$$\begin{aligned}\dot{M}_{ax} = \dot{M}_{ay} &= 0, \quad \frac{\dot{M}_{az}}{W} = \frac{2hk_x}{h^2 + k_x^2} \frac{1}{\omega} < \frac{1}{\omega}, \\ W &= (1/2) \alpha''_a \omega (h^2 + k_x^2) h^{-2} |\mathcal{E}_M|^2.\end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку падающая и отраженная волны линейно поляризованы, то они не переносят собственного момента импульса. Однако преломлен-

нàя неоднородnàя волна передает атому с  $\alpha_a'' \neq 0$  отличный от нуля момент импульса вдоль оси  $Oz$ , т. е. перпендикулярно плоскости падения.

в) циркулярная поляризация:  $\mathcal{E}_M = \pm i\mathcal{E}_E$ .

$$\frac{\dot{M}_{ax}}{W} = \mp \frac{k}{k_x} \frac{1}{\omega}, \quad \dot{M}_{ay} = 0, \quad \frac{\dot{M}_{az}}{W} = \frac{h}{k_x} \frac{1}{\omega},$$

(22)

$$W = \alpha_a'' \omega (k_x^2/k^2) |\mathcal{E}_E|^2.$$

В результате взаимодействия атом приобретает момент импульса как вдоль границы раздела сред, так и перпендикулярно плоскости падения. В этом случае падающая и отраженная волны переносят собственный момент импульса, однако его направление для падающей волны не совпадает с направлением момента импульса атома  $M_a$ . В заключение следует подчеркнуть, что согласно формулам (7) направления импульса и момента импульса, передаваемых атому неоднородной волной, во всех случаях не совпадают.

Рассмотрение интерференционного потока позволяет единым образом описать обмен энергией, импульсом и моментом импульса между атомом, описываемым феноменологически с помощью комплексной поляризуемости, и плоской электромагнитной волной. Излучение произвольной пространственной структуры может быть разложено по плоским однородным и неоднородным волнам. Интерференционный поток для всего излучения получается суммированием интерференционных потоков для отдельных плоских волн, поэтому развитый метод обобщается очевидным образом на случай взаимодействия атома с произвольным излучением.

Проведенные расчеты показали, что при взаимодействии атома с неоднородной плоской волной, возникающей при полном внутреннем отражении, энергия, импульс и момент импульса передаются интерференционным потоком, проходящим через плоскость раздела сред. Это означает, что атом вместе с неоднородной волной не образует замкнутую систему, поэтому законы сохранения необходимо применять одновременно к атому, неоднородной волне, падающей и отраженной волнам, а также среде, в которой распространяются падающая и отраженная волны. Однако этот вопрос требует специального рассмотрения.

Авторы благодарны Г. В. Скроцкому за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 3, с. 360.
2. Huard S., Imbert Ch. — Opt. commun., 1978, 24, № 2, p. 185.
3. Huard S. — Can. J. Phys., 1979, 57, № 3, p. 612.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967. — С. 111.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967. — С. 107.

Московский физико-технический  
институт

Поступила в редакцию  
28 октября 1980 г.

MOMENTUM AND ANGULAR MOMENTUM TRANSFER BY INTERFERENCE FLUX

A. P. Kovalenko, A. A. Kolokolov

Momentum and angular momentum exchange is considered between an atom and plane electromagnetic waves in vacuum on the basis of the interference Maxwell stress tensor.