ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 538.56 : 519.25

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В ОСАДКАХ

А. Г. Боровой

Показано, что теневобразующее поле, многократно рассеянное на системе частиц, описывается приближением марковского случайного процесса, при этом коэффициенты в уравнениях для моментов выражаются через интегралы от тени частицы. Проведен учет турбулентности атмосферы. Рассмотрен явный вид моментов поля.

В последнее время появилось значительное количество теоретических и экспериментальных работ, в которых рассматривается рассеяние света в атмосферных осадках (например, [1–9]) или, вообще, в турбулентной атмосфере со взвешенными в ней частицами [10–12]. В большинстве теоретических работ при этом используются различные приближенные методы, приводящие к громоздким формулам, точность которых трудно оценить. В данной работе эта задача рассматривается на основе общей теории многократного рассеяния волн. Условие $a \gg \lambda$, где a — размер частиц и λ — длина волны, позволяет в данном случае получить ряд точных результатов, причем в довольно компактной форме. В частности, показано, что из многократно рассеянного поля естественным образом выделяется слагаемое, названное теневобразующим полем, играющее определяющую роль во флуктуациях интенсивности света в осадках. Теневобразующее поле с хорошей точностью описывается известным приближением марковского случайного процесса [13], при этом коэффициенты в уравнениях имеют простой геометрический смысл.

1. ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВАТСОНА

Рассмотрим распространение монохроматического света в турбулентной атмосфере со взвешенными в ней частицами. Диэлектрическая проницаемость такой неоднородной среды $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ будет состоять из плавно изменяющейся диэлектрической проницаемости воздуха $\varepsilon_0(\boldsymbol{r})$ в области, не занятой частицами, и финитных функций $\varepsilon_j(\boldsymbol{r})$, каждая из которых отлична от нуля только в области, занятой j-й частицей:

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0(\boldsymbol{r}) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

Уравнения Максвелла, как и для чистой турбулентной атмосферы, в этом случае сводятся к уравнению для вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Запишем его в операторной форме

$$\left(L - \sum_{j=0}^{N} V_j\right) E = 0, \tag{2}$$

где $L = -\mathrm{rot\,rot} + k^2$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны света в вакууме, оператор V_j в координатном представлении равен

$$V_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = k^2\,[1 - \varepsilon_j(\boldsymbol{r})]\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \equiv v_j(\boldsymbol{r})\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{3}$$

Функции $v_j(\boldsymbol{r})$, как и $\varepsilon_j(\boldsymbol{r})$, считаются тождественно равными нулю вне области их определения, например, $v_0 = \varepsilon_0 \equiv 0$ в области, занятой частицами. Функции v_j обладают тем преимуществом, что при замене турбулентной среды или частиц на вакуум они обращаются в нуль в области их определения, тогда как для диэлектрической проницаемости получим $\varepsilon_j = 1$.

Решение операторного уравнения (2) можно записать в виде ряда по кратности рассеяния:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + L^{-1}\sum_j T_j \boldsymbol{E}_0 + L^{-1}\sum_{s\neq j} T_s L^{-1}\sum_j T_j \boldsymbol{E}_0 + \ldots, \tag{4}$$

где операторы T_j, называемые T-матрицами, определяют решение задачи рассеяния на j-м изолированном рассеивателе:

$$(L - V_j)\boldsymbol{E}_j = 0; \tag{5}$$

$$\boldsymbol{E}_j = \boldsymbol{E}_0 + L^{-1} T_j \boldsymbol{E}_0 \equiv \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{jp}; \tag{6}$$

$$T_j = V_j + V_j L^{-1} T_j. \tag{7}$$

Здесь (5) — исходное уравнение для одного рассеивателя, (6) — его решение в виде суперпозиции падающего $\boldsymbol{E}_0$ и рассеянного $\boldsymbol{E}_{jp}$ поля, (7) — интегральное уравнение для T-матрицы. Ряд (4) имеет, таким образом, простой физический смысл. Второе слагаемое есть сумма однократно рассеянных полей (6), третье — сумма двукратно рассеянных полей и т. д. По сравнению с рядом Неймана уравнения (2) ряд по кратности рассеяния (4) более компактен, так как T_j-матрица включает в себя все степени «потенциала» V_j.

Ряд по кратности рассеяния (4) или эквивалентная ему известная система $N+2$ уравнений составляют основу теории многократного рассеяния Ватсона [14], широко используемой в квантовой механике. Конкретные результаты при этом можно получить за счет определенных приближений для операторов L^{-1} и T_j. В частности, при рассеянии плоской электромагнитной волны $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{e}_0 \exp(ikx)$, где единичный вектор $\boldsymbol{e}_0$ ($|\boldsymbol{e}_0| = 1$) определяет поляризацию, в ряде случаев можно пренебречь изменением поляризации при рассеянии. В этом случае справедливо скалярное приближение, когда в предыдущих выражениях поле $\boldsymbol{E}$ заменяется на скалярное поле ψ $(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_0\psi)$, а оператор L — на оператор уравнения Гельмгольца

$$L_0 = \Delta + k^2, \quad L_0^{-1} = -\exp(ik|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)/4\pi|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|. \tag{8}$$

При рассеянии плоской волны на больших ($ka \gg 1$) оптически мягких ($k^{-2}\mathrm{Re}\, v_j \ll 1$) частицах, но с произвольным линейным коэффициентом поглощения $-\mathrm{Im}\, v_j/2k$, часто вместо уравнения Гельмгольца используется параболическое уравнение

$$L_1 = e^{ikx}(2ik\partial/\partial x + \Delta_\perp)\, e^{-ikx}, \tag{9}$$

$$L_1^{-1} = -[4\pi(x - x')]^{-1} H(x - x') \exp\{ik[(x - x') + (\rho - \rho')^2/2(x - x')]\},$$

где ось x совпадает с направлением распространения плоской волны, $\Delta_\perp$ — лапласиан по поперечным координатам $\rho = y, z$; H — функция Хевисайда: $H(x) = 0$ при $x < 0$ и $H(x) = 1$ при $x > 0$. При расстояниях $x - x_j \ll ka^2$ за частицей операторы L_1 и L_1^{-1} допускают дальнейшее упрощение:

$$L_2 = e^{ikx}(2ik\partial/\partial x)\, e^{-ikx},$$
$$L_2^{-1} = (2ik)^{-1} H(x - x')\, e^{ik(x - x')}\,\delta(\rho - \rho'). \tag{10}$$

Приближение (10) значительно упрощает задачу рассеяния, оно широко используется в различных разделах физики и имеет различные названия. В теории распространения света в турбулентной атмосфере оно связывается с методом геометрической оптики [13], при рассеянии на одном рассеивателе в квантовой механике оно называется эйкональным приближением, а в оптике — приближением Хюлста [15], в теории ядра при рассеянии высокоэнергетических частиц на системе нуклонов ядра — моделью Глаубера [16]. Будем называть его приближением прямых путей. Этот термин используется в квантовой теории поля и наиболее наглядно отражает сущность приближения. Переход: уравнения Максвелла $\rightarrow$ уравнение Гельмгольца $\rightarrow$ приближение параболического уравнения $\rightarrow$ приближение прямых путей широко обсужден в литературе.

В приближениях параболического уравнения и прямых путей удобнее пользоваться не полем ψ, а его комплексной амплитудой, определяемой соотношением $u = \psi \exp(-ikx)$. При замене поля ψ на u в уравнении (2) под операторами L_1, L_2, L_1^{-1}, L_2^{-1} следует понимать выражения (9), (10) с отброшенными экспонентами $\exp(ikx)$ и $\exp(-ikx)$. Все операторные соотношения (3)—(7) при этом, разумеется, сохранятся, а явные выражения для операторов L и T_j упрощаются.

2. РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ОДНОЙ ЧАСТИЦЕ

Покажем, что для больших ($ka \gg 1$) частиц, какими являются частицы осадков, удобно рассеянное поле E_{jp} разделить на два слагаемых, качественно отличающихся друг от друга. Эти слагаемые, как будет видно из последующего изложения, можно назвать тенеобразующим и преломленным полем:

$$E_{jp} = E_{jт} + E_{jп} = L^{-1} S_j E_0 + L^{-1} R_j E_0. \tag{11}$$

Это соответствует разбиению T-матрицы в (6) и (7) на тенеобразующий S_j и преломляющий R_j операторы:

$$T_j = S_j + R_j. \tag{12}$$

Рассмотрим вначале задачу рассеяния в приближении прямых путей (10), справедливом на расстояниях $(x - x_j) \ll ka^2$ для оптически мягких частиц, где $\boldsymbol{r}_j = (x_j, \rho_j)$ — центр j-й частицы. Решение уравнения (5) для падающей плоской волны $\psi_0 = \exp(ikx)$ имеет вид

$$u_j = \exp \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{x} v_j(x', \rho)\, dx' \equiv \exp \Phi_j. \tag{13}$$

Выделим из (13) падающее поле $u_0 = 1$:

$$u_j = 1 + (\exp \Phi_j - 1)\eta_j = 1 - \eta_j + \eta_j \exp \Phi_j. \tag{14}$$

Здесь рассеянное поле $\exp \Phi_j - 1$ может быть умножено без изменений на функцию $\eta_j(\boldsymbol{r})$, равную $\eta_j(\boldsymbol{r}) = 1$ в области на плоскости $x = \mathrm{const}$, в которую проектируется частица, и $\eta_j(\boldsymbol{r}) = 0$ вне этой области. В результате из рассеянного поля автоматически выделилось поле $u_{jт} = -\eta_j$, суперпозиция которого с падающим дает тень и которое естественно назвать тенеобразующим. Тенеобразующее поле, как легко видеть, также можно получить из уравнения (5), как рассеянное поле на абсолютно поглощающей, т. е. чёрной, частице $\mathrm{Im}\, v_j \rightarrow -\infty$.

Нас будет интересовать рассеянное поле только вне частицы, т. е. $x - x_j > a$. В этом случае функции Φ_j и η_j в (14) будут зависеть только от поперечных координат, например, $\eta_j(\rho)$, а частицы будут эквивалентны плоским амплитудно-фазовым экранам:

$$V_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(x - x_j)\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_j(x', \rho)\,dx'. \tag{15}$$

Рассмотрим значение T-матрицы для u в приближении (10). Из уравнения (7) получим простое выражение

$$T_j = V_j \exp\Phi_j. \tag{16}$$

При переходе к экранам (15) T-матрица также эквивалентна экрану, т. е. содержит множитель $\delta(x - x_j)$. Тенеобразующий оператор S_j есть T-матрица для черных частиц, но получение явного выражения S_j для черных частиц или черных экранов из (16) неудобно, так как требует раскрытия неопределенности при предельном переходе $\operatorname{Im} v_j \to -\infty$. Удобнее записать оператор S_j непосредственно и соотношения $u_{j\text{т}} = L_2^{-1} S_j u_0 = -\eta_j$. В результате для черного экрана получаем

$$S_j(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -2ik\delta(x - x_j)\eta_j(\rho)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{17}$$

а преломляющий оператор находится из соотношений (12) и (16).

Оператор L_2^{-1} описывает распространение волн на расстояниях $x - x_j \ll ka^2$. Для перехода к произвольным расстояниям от частицы достаточно заменить оператор L_2^{-1} на более общий оператор параболического уравнения L_1^{-1} (9), операторы (16) и (17) остаются без изменений. Выражения для полей $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$, с учетом (15), переходят в интегралы Кирхгофа [17]. В результате тенеобразующее поле из выражения $-\eta_j$ преобразуется в поле, дифрагированное на черном экране, при расстояниях $x - x_j \sim ka^2$ оно описывается формулами дифракции Френеля, а при $x - x_j \gg ka^2$ — дифракцией Фраунгофера. Соответственно преобразуется и преломленное поле.

Обсудим качественное различие полей $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$ в приближении параболического уравнения. Если набег фазы на оптически мягкой непоглощающей частице велик: $\operatorname{Im}\Phi_j \gg 2\pi$, то в ближней зоне $x - x_j \ll ka^2$ в плоскости $x = \text{const}$ поле $u_{j\text{т}}$ изменяется на расстояних порядка размера частицы a, поле $u_{j\text{п}}$ из-за осцилляций имеет меньший поперечный масштаб $a' \ll a$. Во фраунгоферовой области $x - x_j \gg ka^2$ оба поля $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$ являются сферическими волнами, но поле $u_{j\text{т}}$ расходится под углом λ/a, тогда как поле $u_{j\text{п}}$ расходится под углом $\lambda/a' \gg \lambda/a$, и под углом λ/a имеем $|u_{j\text{п}}| \ll |u_{j\text{т}}|$. В результате интерференцией между полями $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$ практически всегда можно пренебречь. Этот факт будет рассмотрен ниже более подробно. Только для случая $\operatorname{Im}\Phi_j < 2\pi$ оба поля подобны друг другу, их интерференция во фраунгоферовой зоне приводит к «аномальной» дифракции [15].

Перейдем к рассеянию света на оптически жесткой частице, какими являются частицы осадков и атмосферного аэрозоля. Здесь в ближней зоне частицы $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j| \ll ka^2$ преломленное поле образуется преломленными и отраженными лучами в соответствии с законами геометрической оптики. Этим и объясняется введенное ранее название этого поля. T-матрица в этом случае учитывает изменение поляризации поля при рассеянии и имеет громоздкий вид. Это выражение в явном виде нам в дальнейшем не понадобится. Очевидно, что тенеобразующее поле будет так же вводиться в ближней зоне определением $\boldsymbol{E}_{j\text{т}} = -\boldsymbol{E}_0\eta_j$. Так как отклонением поляризации поля $\boldsymbol{E}_{j\text{т}}$ от поляризации $\boldsymbol{E}_0$ на произвольных расстояниях от большой ($ka \gg 1$) частицы можно пренебречь, то суперпозиция $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{j\text{т}}$ с хорошей точностью будет описываться скалярным параболическим уравнением. Все предыдущие выражения, содержащие u_0 и $u_{j\text{т}}$, будут справедливы и для оптически жестких больших частиц.

В заключение этого раздела остановимся на законе сохранения энергии при рассеянии на одной частице. Воспользовавшись им, выясним возможность пренебречь интерференцией между полями $\boldsymbol{E}_{j\text{т}}$ и $\boldsymbol{E}_{j\text{п}}$. Кроме того, с помощью законов сохранения поясним физический смысл ряда результатов, которые будут получены в следующих разделах для многократного рассеяния.

Интенсивность излучения I и поток энергии P через плоскость $x = \text{const}$ в рамках параболического уравнения (9) определяются выражениями

$$I = |u|^2, \qquad P = \int |u|^2 d\boldsymbol{\rho}. \tag{18}$$

Поток через плоскость за частицей $x - x_j > a$ с учетом суперпозиции трех полей u_0, $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$ состоит из потоков каждого слагаемого и интерференционных членов между ними:

$$P = \int |u_0 + u_{j\text{т}} + u_{j\text{п}}|^2 d\boldsymbol{\rho} = P_{00} + P_{\text{т.т}} + P_{\text{п.п}} + P_{0\text{т}} + P_{0\text{п}} + P_{\text{п.т}}. \tag{19}$$

Каждое слагаемое в (19) имеет форму скалярного произведения от двух функций по плоскости $(u, w) = \int uw d\boldsymbol{\rho}$. Воспользуемся известными свойствами унитарности оператора L_1^{-1} [13] относительно переменных $\boldsymbol{\rho}$:

$$(u', w') = \left(L_1^{-1} u,\ L_1^{-1} w\right) = \left(L_1^{-1+} L_1^{-1} u,\ w\right) = (u,\ w). \tag{20}$$

Из (20) непосредственно следует, что каждое слагаемое в (19) не зависит от расстояния до частицы. Их легко записать без вычислений, воспользовавшись значением полей $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$ в ближней зоне (14):

$$P_{\text{т.т}} = P_{\text{п.п}} = s, \qquad P_{0\text{т}} = -2s, \qquad P_{\text{п.т}} = P_{0\text{п}} = 0, \tag{21}$$

где s — площадь тени и учтено условие $\operatorname{Im}\Phi_j \gg 2\pi$. Интерференционный член интенсивности $I_{\text{т.п}} = 2\operatorname{Re} u_{j\text{т}} u_{j\text{п}}^*$ при этом условии в ближней зоне осциллирует с поперечным масштабом $a' \ll a$ и обычно усредняется приемником излучения. Во фраунгоферовой зоне указанное выше условие $|u_{j\text{п}}| \ll |u_{j\text{т}}|$ делает пренебрежимым этот член по сравнению с $I_{0\text{т}}$. Отсюда следует вывод, что при $\operatorname{Im}\Phi_j \gg 2\pi$ можно пренебречь интерференцией между полями $u_{j\text{т}}$ и $u_{j\text{п}}$. Ослабление потока в этом случае определяется членом $I_{0\text{т}}$, т. е. получается из интерференции падающей волны с тенеобразующей.

Хотя для электромагнитных волн определения (18) не выполняются, можно показать, что соответствующие слагаемые в правой части выражения (19) сохраняются, а их значения для больших оптически жестких частиц по-прежнему определяются выражениями (21) и имеют тот же физический смысл.

3. ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОКРАТНО РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Многократно рассеянное на системе N частиц поле (4) также разделим на тенеобразующее и преломленное:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{\text{т}} + \boldsymbol{E}_{\text{п}}, \tag{22}$$

где под тенеобразующим полем $\boldsymbol{E}_{\text{т}}$ будем понимать сумму членов ряда (4), содержащих только операторы S_j, члены, содержащие хотя бы один преломляющий оператор R_j, отнесем к преломленному полю $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$.

Как и в задаче рассеяния на одной частице, это разделение рассеянного поля на две части является строгим, но его целесообразно использовать для больших оптически жестких частиц или оптически мягких частиц с большим набегом фазы $\mathrm{Im}\Phi_j \gg 2\pi$.

Для оптически мягких частиц, как указывалось выше, исходное уравнение (2) можно заменить скалярным параболическим уравнением

$$\left[2ik\frac{\partial}{\partial x} + \Delta_\perp - \sum_{j=1}^{N} v_j(\boldsymbol{r})\right] u(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{23}$$

В рамках этого приближения многократно рассеянное поле (4) описывается замкнутым выражением. Действительно, рассеянное на частицах поле в направлениях, заключенных в заднюю полусферу, равно нулю. Поэтому для системы N частиц, когда частицы не перекрываются по оси $x(|x_i - x_j| > a)$, максимальная кратность рассеяния равна N, и ряд вырождается в следующее выражение:

$$u = (1 + L_1^{-1}T_1)(1 + L_1^{-1}T_2)\ldots(1 + L_1^{-1}T_N)u_0, \tag{24}$$

где $x_1 > x_2 > \ldots > x_N$. Рассеянное поле в (24) берется вне частиц $x - x_j > a$, в этом случае частицы можно заменить экранами (15) (или в исходном уравнении (23), или в выражении для T-матрицы в (24)). Интересно отметить, что введение δ-функции в выражения для V_j (15) или T_j имеет смысл только в приближениях параболического уравнения или прямых путей, в уравнениях Гельмгольца или Максвелла это привело бы к расходящимся выражениям для многократно рассеянного поля. Рассмотрим теперь случай $|x_i - x_j| < a$, включающий возможность перекрывания частиц в пространстве $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| < a$. Пусть частицы находятся в слое толщиной $ka^2 \gg l > a$. Поле на выходе из слоя будет описываться приближением прямых путей, т. е. $L_1 \to L_2$. Из выражения (13) для системы частиц видим, что при $|x_i - x_j| < a$ поле будет совпадать со значением поля, полученным в модели экранов (15). Также остается справедливым и соотношение (24). Исключение составляют только конфигурации центров частиц r_j^N, когда одна или несколько частиц пересекают границу слоя. Такими конфигурациями, очевидно, можно пренебречь при малом параметре a/l. Таким образом, мы показали, что в рамках параболического уравнения частицы можно заменить амплитудно-фазовыми экранами при условии $a/x \ll 1$, при этом многократно рассеянное поле принимает вид (24).

Для оптически жестких частиц тенеобразующее поле определяется многократной дифракцией на системе черных экранов. Следовательно, суперпозиция $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_т$ для оптически жестких частиц также описывается уравнением (23) с учетом условия $\mathrm{Im}v_j \to -\infty$ или эквивалентным ему выражением (24) при замене оператора T_j на S_j (17). Отметим, что суперпозиция $\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_т$ без преломленного поля в некоторых случаях представляет практический интерес. Например, при распространении узких пучков света в осадках до трасс определенной длины преломленное поле из-за сильной угловой расходимости выводится из пучка и определяющую роль играет многократно рассеянное тенеобразующее поле. Также для произвольных источников света уменьшение угловой апертуры приемника в первую очередь уменьшает преломленное поле, но в большинстве случаев при этом требуется учитывать поле $\boldsymbol{E}_т$.

В заключение этого раздела отметим, что в приближении прямых путей, т. е. при $x \ll ka^2$, выражение (24) переходит в произведение решений задачи рассеяния на одной частице:

$$u = \prod_{j=1}^{N} u_j = \prod_{j=1}^{N} (u_0 + u_{jp}). \tag{25}$$

Соотношение (25) записано для плоской падающей волны. В работах [18–20] Калашников и Рязанов предложили приближение для многократно рассеянного поля, в котором выражение (25) считается справедливым для фурье-компонент поля пучка $u_0(q) = \int u_0(r) \exp(iqr)\, dr$ при произвольных значениях параметра ka^2/x.

4. СТАТИСТИКА МНОГОКРАТНО РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Наша дальнейшая задача заключается в рассмотрении статистики поля (4) при усреднении по ансамблю реализаций рассеивающей среды. Реализация рассеивающей среды определяется конфигурацией центров частиц $r_1, r_2, \ldots, r_N$ в интересующей нас области и заданием «внутренних» параметров частиц, т. е. их размера, формы, ориентации в пространстве и т. д., которые будем обозначать одной буквой ξ_j.

Для осадков естественно принять пуассоновскую модель рассеивающей среды. Будем считать, что в области пространства с объемом Q центры частиц r_j являются независимыми величинами, распределенными с плотностью вероятности $p(r_j)$. Для упрощения расчетов в дальнейшем считаем $p(r_j) = Q^{-1}$. Вероятность обнаружения N частиц определяется законом Пуассона

$$p_N = e^{-cQ}(cQ)^N/N!, \tag{26}$$

где $c = \bar{N}/Q$ — счетная концентрация частиц, $\bar{N}$ — среднее число частиц в объеме Q. Будем считать, что внутренние параметры частиц ξ_j распределены с плотностью вероятности $p(\xi_j)$ и не зависят друг от друга и от координат r_j.

Рассмотрим вначале моментные функции $M_{nm} = \langle u(x, \rho_1) \ldots u(x, \rho_n) u^*(x, \rho_{n+1}) \ldots u^*(x, \rho_{n+m})\rangle$ в приближении прямых путей, которые понадобятся в дальнейшем (введем для них обозначение M^0_{nm}). Из выражения (25) легко получить аналитические выражения для M^0_{nm} [21]. Воспроизведем эти вычисления для черных экранов, т. е. для поля $E_0 + E_т$ в случае оптически жестких частиц. Для среднего поля имеем

$$\langle u\rangle = M^0_{10} = \langle \prod_j (1 - \eta_j)\rangle = \sum_N p_N (1 - \eta_j)^N = \exp[cQ(\langle 1 - \eta_j\rangle - 1)] =$$
$$= \exp(-cQ\langle\eta_j\rangle) = \exp\left[-c \int d\xi_j p(\xi_j) \int dr_j \eta_j(\rho, \rho_j)\right] = \exp(-cxs), \tag{27}$$

где s — площадь тени одной частицы, усредненная по индексу j, т. е. по размерам, форме и т. д. Аналогично вычисляются другие моменты:

$$M^0_{nm} = \exp\{-cx \int d\xi_j p(\xi_j) \int d\rho_j [(1 - \eta_j(\rho_1, \rho_j)) \times$$
$$\times (1 - \eta_j(\rho_2, \rho_j)) \ldots (1 - \eta_j(\rho_{n+m}, \rho_j)) - 1]\} \equiv \exp(-cxs_{n+m}), \tag{28}$$

где $s_2 = 2s - s{*}s$, $s{*}s$ — средняя по j автокорреляция тени одной частицы и т. д.

Перейдем к моментам поля для уравнения (23). Произведение полей $\mu_{nm} = u(x, \rho_1) \ldots u^*(x, \rho_{n+m})$ удовлетворяет уравнению [13]

$$(2ik(\partial/\partial x) - v_{nm})\mu_{nm} = -\Delta_{nm}\mu_{nm}, \tag{29}$$

где $v_{nm} = v(r_1) + \ldots - v^*(r_{n+m})$, $\Delta_{nm} = \Delta_{\perp 1} + \ldots - \Delta_{\perp n+m}$. В левой части (29) стоит оператор приближения прямых путей. Гриновская функция его равна $\mu^0_{nm}(x)/2ik\,\mu^0_{nm}(x')$, где $x > x'$ и μ^0_{nm} — решение уравнения (29) без правой части. Перепишем уравнение (29) в виде

$$\mu_{nm}(x) = \mu^0_{nm}(x) - \mu^0_{nm}(x) \int_0^x [2ik\,\mu^0_{nm}(x')]^{-1} \Delta_{nm}\mu_{nm}(x')\, dx'. \tag{30}$$

Усреднение (30) дает искомое уравнение для моментов, где свободным членом является моментная функция приближения прямых путей M^0_{nm}. Более того, коэффициенты этого уравнения также выражаются через величины M^0_{nm}. Действительно, сомножители в подынтегральном выражении (30) являются независимыми (аналогично приближению марковского процесса [13]). В нашем случае это следует из замены частиц экранами, т. е. из условия $a/x \ll 1$. В результате получаем

$$M_{nm}(x) = M^0_{nm}(x) - M^0_{nm}(x) \int\limits_0^x [2ikM^0_{nm}(x')]^{-1} \Delta_{nm} M_{nm}(x')\, dx'. \qquad (31)$$

Дифференцирование (31) по x приводит уравнение к дифференциальному, типа (29):

$$(2ik(\partial/\partial x) + \Delta_{nm} - \alpha_{nm}) M_{nm} = 0, \qquad (32)$$

где $\alpha_{nm} = 2ik(\partial/\partial x)\ln M^0_{nm}$.

Фактически в выражениях (29)—(32) мы повторили выкладки, приведенные, например, в [13, 22], но только оттенили особое значение решения приближения прямых путей M^0_{nm}. Кроме того, мы показали, что замена частиц экранами в параболическом уравнении приводит к известному приближению марковского случайного процесса. Коэффициенты уравнений α_{nm} имеют простые аналитические выражения, а для частиц осадков $\alpha_{nm} = -2ikcs_{n+m}$ выражаются через интегралы от тени одной частицы (28).

Отметим, что эти же выкладки (29)—(32) приближения марковского процесса использованы в работе [23] для системы оптически мягких частиц. В результате в [23] получено уравнение (32) с коэффициентами α_{nm}, определяемыми известными функциями M^0_{nm} для оптически мягких частиц [21]. В отличие от [23] мы получаем это уравнение как следствие общей теории многократного рассеяния Ватсона.

Из уравнений (31), (32) просто следует равенство среднего поля M_{10} и функции когерентности M_{11} для параболического уравнения и для приближения прямых путей. Равенства $M_{10} = M^0_{10}$ и $M_{11} = M^0_{11}$ следуют из однородности случайного поля u, когда $\Delta_{10}M_{10} = 0$ и $\Delta_{11}M_{11} = (\partial/\partial\rho_1 - \partial/\partial\rho_2)(\partial/\partial\rho_1 + \partial/\partial\rho_2) M_{11}(x, \rho_1 - \rho_2) = 0$.

Выше мы не учитывали слагаемого v_0 в уравнении (2), т. е. считали, что частицы находятся в вакууме. В выражения (27)—(32) нетрудно включить турбулентную среду. Действительно, можно считать, что тяжелые частицы осадков движутся независимо от неоднородностей показателя преломления турбулентной атмосферы. Из-за оптической жесткости частиц осадков T-матрицу для частицы в воздухе можно приравнять T-матрице частицы в вакууме. Набег фазы в воздухе на расстоянии порядка размера частицы невелик, поэтому функцию $v_0(\mathbf{r})$ в уравнении (2), (23) заменяем функцией $v_0'(\mathbf{r})$ для турбулентной атмосферы без частиц. Очевидно, что при этих условиях в приближении прямых путей (13) моменты поля u перемножаются: $M^0_{nm} = M^0_{nm\,ч} M^0_{nm\,турб}$, а коэффициенты α_{nm} в уравнении (32) с отброшенным вторым слагаемым Δ_{nm} складываются. Переход к произвольным параметрам ka^2/x сводится к переходу от приближения прямых путей к параболическому уравнению, что не меняет коэффициентов α_{nm}. В результате для уравнения (32) получаем

$$\alpha_{nm} = \alpha_{nm\,ч} + \alpha_{nm\,турб}, \qquad (33)$$

где коэффициенты $\alpha_{nm\,турб}$ хорошо известны [13]. Интересно отметить, что для плоской падающей волны в рамках уравнения (32) среднее поле $\langle u\rangle = M_{10}$ и функция когерентности $\Gamma_2 = M_{11}$ для частиц и турбулентной атмосферы также перемножаются: $\langle u\rangle = \langle u\rangle_ч \langle u\rangle_{турб}$, $\Gamma_2 = \Gamma_{2ч}\Gamma_{2турб}$, что следует из соотношений $M_{10} = M^0_{10}$, $M_{11} = M^0_{11}$.

Рассмотрим учет преломленного поля $E_п$ для частиц осадков. Для среднего поля из почленного усреднения ряда (4) с учетом заведомо малых для света в осадках параметрв $c\lambda^3$и ca^3 можно, аналогично [24], получить

$$\langle E\rangle = E_0 \exp(-cxs + \gamma x), \qquad (34)$$

где $\exp(\gamma x)$ — среднее поле в турбулентной среде [13]. Перемножение средних полей в (34) вне рамок марковского приближения (32) объясняется тем, что преломленные поля $E_{jп}$ не интерферируют с E_0 (21). В результате среднее поле совпадает с M_{10} из уравнения (32), а переход энергии из поля $E_0 + E_т$ в поле $E_п$ входит в уравнения (23), (32) как поглощение. Поэтому когерентная часть средней интенсивности за счет частиц ослабляется по экспоненте $I_{к.ч} \equiv |\langle E\rangle_ч|^2 = \exp(-2cxs)$ с коэффициентом, пропорциональным удвоенной площади тени $2s$.

Квадратичные величины поля или лучевая интенсивность излучения $I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q})$, определяются, как известно, обобщенным уравнением переноса [25], получающимся из перемножения ряда (4). При больших углах между вектором $\boldsymbol{q}$ и направлением оси x становится существенным учет преломленного поля, мы не будем здесь на этом останавливаться. При малых углах поле $E_п$ можно не учитывать и обобщенное уравнение переноса совпадает с фурье-образом уравнения (32) для M_{11}. Решение этого уравнения записывается в аналитическом виде [13]. В частности, для плоской волны, когда $M_{11} = M_{11ч}\cdot M_{11турб}$, лучевая интенсивность $I(x, q)$ будет сверткой по q от $I_{турб}(x, q)$ и $I_ч(x, q)$, где

$$I_ч(x, q) = \int \exp[iq\rho - cxs_2(\rho)]\, d\rho/\lambda^2. \qquad (35)$$

Простой вид решения уравнения переноса (35), как легко убедиться из итераций, обязан сохранению скалярного произведения (20) для параболического уравнения.

5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЗКИХ ПУЧКОВ СВЕТА.

Рассмотрим приложение вышеизложенных результатов к практически важной задаче распространения узкого пучка света в турбулентной атмосфере с осадками. Ограничимся рассмотрением поля вблизи оси пучка, тогда до трасс определенной длины, когда еще мало поле $E'_п$, можно ограничиться марковским приближением (32).

Для среднего поля из ряда (4) можно получить то же выражение (34), где E_0 — поле в отсутствие среды, но с учетом дифракции при распространении в вакууме от источника излучения до точки наблюдения. Для лучевой интенсивности также справедливо аналитическое выражение, являющееся решением малоуглового уравнения переноса с коэффициентом $\alpha_{nm\,ч} + \alpha_{nm\,турб}$. Получить аналитические выражения для высших моментов не удается, в частности, остается открытым вопрос о флуктуациях интенсивности.

В работе [5] для флуктуаций интенсивности в пучке предложена следующая модель. Так как индекс мерцаний $\beta^2 = \langle I^2\rangle/\langle I\rangle^2 - 1$ в приближении прямых путей (28) может принимать большие значения $\beta^2 = \exp(cxs) - 1$, а при перерассеянии сферических $c(ka^2)^3 \ll 1$ волн $\beta^2 \lesssim 1$, то можно считать, что флуктуации интенсивности вызываются только частицами, находящимися на расстояниях $x - x_j < s/\lambda$ от приемника. В результате индекс мерцаний определяется не только общим объемом частиц, но и распределением частиц по размерам. Основную роль во флуктуациях играет наиболее крупная фракция частиц, что качественно надежно подтверждается экспериментальными данными [4, 6, 8]. Эта модель приводит при увеличении трассы к росту, а затем насыщению величины β^2. На еще больших трассах, когда становится существенным слабо флуктуирующее поле $E_п$, возрастающее с ростом x, получаем, что $\beta^2 \to 0$. Этот факт экспериментально наблюдался только в модельных средах [26].

В заключение отметим, что в работе [3] рассмотрена задача рассеяния света на системе частиц в приближении однократного рассеяния, причем за рассеянное берется только тенеобразующее поле во фраунгоферовой зоне. В результате в [3] в завуалированной форме получен простой результат: $M_{11} - M_{10}^2 = cxs^*s$, что следует из (28) как линейный член разложения экспоненты. В [9, 11, 12] рассматриваются только оптически мягкие частицы, что неприменимо по отношению к аэрозольным частицам атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов М. В., Пхалагов Ю. А., Гологузов В. Е.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1971, 7, с. 804.
2. Гурвич А. С., Покасов В. В. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1972, 8, с. 878.
3. Wang T.-i., Clifford.— J. Opt. Soc., 1975, 65, p. 927.
4. Галахов В. Н., Ефремов А. В.. Жуков А. Ф., Рейно В. В., Цвык Р. Ш. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1976, 12, с. 1251.
5. Боровой А. Г. В кн.: IV Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере (Поглощение и рассеяние). — Томск: 1977.
6. Боровой А. Г., Жуков А. Ф., Цвык Р. Ш. В кн.: XII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Ч. I. — М.: Наука, 1978.
7. Wang T.-i., Earnshaw K. B., Lawrence R. S.— Appl. Opt., 1978, 17, p. 385.
8. Жуков А. Ф., Цвык Р. Ш — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1980, 16, с. 164.
9. Миронов В. Л., Тузова С. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 2, с. 169.
10. Боровой А. Г. В кн.: Теория дифракции и распространения волн (VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн).— М.: Наука, 1977.
11. Крутиков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 1, с. 84.
12. Лукин И. П. — Изв. вузов — Физика, 1980, вып. 8, с. 51.
13. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М.: Наука, 1978.
14. Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. — М.: Мир, 1967.
15. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц — М.: Мир, 1969.
16. Барашенков В. С., Тонеев В. Д. Взаимодействия высокоэнергетических частиц и атомных ядер с ядрами. — М.: Атомиздат, 1972.
17. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
18. Калашников Н. П., Рязанов М И. — ЖЭТФ, 1964, 47, с. 1055.
19. Калашников Н. П., Рязанов М. И. — ЖЭТФ, 1966, 50, с. 459.
20. Калашников Н. П., Резимович В. С., Рязанов М. И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. — М.: Атомиздат, 1980.
21. Боровой А. Г., Крутиков В. А. — Опт. и спектр., 1976, 40, с. 728.
22. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
23. Свиркунов П. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 3, с. 399.
24. Боровой А. Г. — Изв. вузов — Физика, 1966, вып. 2, с. 175.
25. Барабаненков Ю. Н. — УФН, 1975, 117, с. 49.
26. Borovoy A. G., Kabanov M. V., Saveliev B. A. — Appl. Opt., 1975, 14, p. 2731.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
5 января 1981 г.,
после доработки
3 августа 1981 г.

LIGHT PROPAGATION IN PRECIPITATION

A. G. Borovoj

It is shown that a shade-forming field multiple-scattered by a system of particles is described by the approximation of Markov random process, coefficients in equations for moments being expressed through particle shade integrals. The atmosphere turbulence is taken into account. The explicit form of the field moments is considered.