

УДК 621.372.8

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛОЙ СФЕРЕ СО ЩЕЛЬЮ*А. М. Радин*

Решена векторная задача дифракции плоской волны, падающей вдоль оси симметрии на полую идеально проводящую сферу со щелью, при произвольном соотношении длины волны и геометрических параметров задачи. Дифрагированное поле найдено в виде рядов Фурье. Для коэффициентов этих рядов получены быстросходящиеся системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Обоснована применимость метода редукции. Проведено сравнение численных результатов для сферы со щелью с известными результатами для идеально проводящего шара. Развиваемая методика распространяется на случай произвольной ориентации источника первичного поля относительно полой сферы со щелью.

Задача дифракции волн на поллой сфере, имеющей круговое отверстие или щель, изучалась многими авторами. Однако схема строгого решения была изложена лишь в работах Коллинза [1, 2]. Рассматривая скалярный случай, Коллинз свел эту задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для некоторой вспомогательной функции. Для длинных волн это уравнение разрешимо методом итераций, а для коротких необходимы численные расчеты. Однако с вычислительной точки зрения схема Коллинза не является удовлетворительной ввиду сложной связи между вспомогательной функцией и полем. Кроме того, не рассматривалась векторная задача, которая вносит в решение дополнительные усложнения. Эти пробелы были частично устранены в ряде работ [3-9], где развивается методика получения решения в терминах хорошо сходящихся систем линейных алгебраических уравнений второго рода непосредственно для коэффициентов Фурье искомого поля. В работе [3] предложена идея подхода, в работах [4, 5] предложенным методом решаются задачи дифракции поля плоской волны и точечного источника на поллой идеально проводящей сфере с круговым отверстием. Дальнейшее развитие этого подхода для задачи дифракции на сфере с круговым отверстием изложено в последующих работах [6-8]. Однако при описании дифракции на сфере со щелью возникает краевая задача, которая не может быть непосредственно решена приемами работ [3-8]. Решаемые в этих работах задачи сводятся к парным сумматорным уравнениям с ядром в виде присоединенных полиномов Лежандра. В задаче же дифракции на сфере со щелью возникают тройные сумматорные уравнения [9].

Цель данной статьи — развить методику, предложенную в работе [3], на случай векторной задачи дифракции плоской электромагнитной волны, падающей вдоль оси симметрии на полую идеально проводящую сферу со щелью. Дифрагированное поле ищется в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами в каждой из областей, на которые разбито все пространство. После ряда преобразований удастся добиться разделения переменных как в уравнении, так и в граничных условиях. Исходная задача распадается на две самостоятельные скалярные задачи для электрического и магнитного потенциалов поля. Каждая из этих задач сведена к тройным сумматорным уравнениям с ядрами в виде

присоединенных многочленов Лежандра. После факторизации коэффициентов и применения интегральных представлений Мелера—Дирихле эти уравнения приведены к связанным парным уравнениям с ядрами, содержащими тригонометрические функции. Методом полуобращения из парных уравнений получены хорошо сходящиеся бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода непосредственно для коэффициентов Фурье искомого поля. Проведен численный расчет коэффициента рассеяния. Развиваемая методика допускает обобщение на случай произвольной ориентации направления распространения первичной волны относительно полой сферы со щелью.

1. Постановка задачи. Начало сферической системы координат (r, θ, φ) помещено в центре полой сферы, в которой имеется щель $S: \{\theta \in (\alpha, \beta), \varphi \in (0, 2\pi), r = a\}$. В положительном направлении оси z распространяется плоская волна с электрическим вектором, параллельным оси x ,

$$E_x^0 = H_y^0 = \exp(ikz). \quad (1)$$

Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем опущена. Требуется найти поле этой волны, искаженное присутствием идеально проводящей сферы со щелью. Искомое поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} E = ikH, \quad \operatorname{rot} H = -ikE \quad (2)$$

и граничным условиям на поверхности $Q: \{\theta \in (0, \alpha) \cup (\beta, \pi), r = a, \varphi \in (0, 2\pi)\}$,

$$r \times E|_Q = 0. \quad (3)$$

Кроме того, рассеянное препятствием поле должно удовлетворять условию излучения и условию Мейкснера вблизи острых кромок поверхности.

Известно, что поставленная таким образом краевая задача (1) — (3) имеет единственное решение [10]. Следуя Дебаю [10], решение уравнений (2) представим через потенциалы Π_e и Π_m :

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} (r \Pi_e) + ik \operatorname{rot} (r \Pi_m), \\ H &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} (r \Pi_m) - ik \operatorname{rot} (r \Pi_e), \\ \left. \begin{aligned} \Pi_e &= \Pi_e^0 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n e_n j_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \\ \Pi_m &= \Pi_m^0 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n m_n j_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \end{aligned} \right\} r < a, \\ \left. \begin{aligned} \Pi_e &= \Pi_e^0 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n E_n h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \\ \Pi_m &= \Pi_m^0 + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n M_n h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \end{aligned} \right\} r > a, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Pi_e^0 &= \cos \varphi \\ \Pi_m^0 &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n j_n(kr) P_n^1(\cos \theta)$$

— потенциалы, соответствующие первичному полю (1),

$$\Gamma_n = (2n+1)/(n(n+1)) \exp[i\pi(n-1)/2],$$

j_n — сферические функции Бесселя, $P_n^{(1)}$ — присоединенные многочлены Лежандра, $h_n^{(1)}$ — сферические функции Ханкеля, которые позволяют удовлетворить условию излучения, e_n, m_n, E_n, M_n — неизвестные коэффициенты, которые необходимо искать в классе числовых последовательностей, определяемом условием Мейкснера.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению этих коэффициентов из соотношений (3), которые необходимо дополнить условиями непрерывности касательных компонент поля на S :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{E}(r=a-0) &= \mathbf{r} \times \mathbf{E}(r=a+0), \\ \mathbf{r} \times \mathbf{H}(r=a-0) &= \mathbf{r} \times \mathbf{H}(r=a+0). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Функциональные уравнения для коэффициентов разложения. Подставляя разложения (4) в граничные условия (3) и (5), получим следующую систему функциональных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (1 + e_n) (\varepsilon j_n)' P_n^1(\cos \theta) = -C_1 \operatorname{tg}(\theta/2)$$

$$(\theta \in (0, \alpha)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon \Gamma_n (\varepsilon h_n^{(1)})' e_n P_n^1(\cos \theta) = C_2 \operatorname{tg}(\theta/2) - C_3 \operatorname{ctg}(\theta/2)$$

$$(\theta \in (\alpha, \beta)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (1 + e_n) (\varepsilon j_n)' P_n^1(\cos \theta) = C_4 \operatorname{ctg}(\theta/2) \quad (6)$$

$$(\theta \in (\beta, \pi));$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n / h_n^{(1)} (\varepsilon) m_n P_n^1(\cos \theta) = C_2 \operatorname{tg}(\theta/2) + C_3 \operatorname{ctg}(\theta/2)$$

$$(\theta \in (\alpha, \beta)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon \Gamma_n (1 + m_n) j_n(\varepsilon) P_n^1(\cos \theta) = C_1 \operatorname{tg}(\theta/2) \quad (7)$$

$$(\theta \in (0, \alpha)),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon \Gamma_n (1 + m_n) j_n(\varepsilon) P_n^1(\cos \theta) = C_4 \operatorname{ctg}(\theta/2)$$

$$(\theta \in (\beta, \pi));$$

$$j_n(\varepsilon) m_n = h_n^{(1)}(\varepsilon) M_n, \quad (\varepsilon j_n(\varepsilon))' e_n = (\varepsilon h_n^{(1)}(\varepsilon))' E_n, \quad (8)$$

где $\varepsilon = ka$, штрих означает дифференцирование по ε , C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — константы, которые возникли при разделении переменных. Таким образом, достаточно из уравнений (6) и (7) определить, например, коэффициенты m_n и e_n , а остальные найти из (8).

Следует отметить, что уже на этом этапе преодолены трудности, обусловленные векторным характером задачи. Уравнения (6) и (7) представляют собой две самостоятельные системы функциональных уравнений для определения потенциалов поля Π_e и Π_m , так как Π_e выражается только через коэффициенты e_n , а Π_m — через коэффициенты m_n (соотношения (4) и (8)). Для однозначной разрешимости уравнений (6) и (7) определим класс числовых последовательностей, к которому должны принадлежать неизвестные коэффициенты. Для этого запишем радиальную компоненту P_r потока энергии в окрестности острых кромок поверхности:

$$P_r(r = a \pm 0) = \int_{\text{шук}} (E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) d\sigma. \quad (9)$$

Подставим в выражение (9) вместо полей E и H их разложения (4) и проведем интегрирование. Полученные ряды должны сходиться вследствие естественного требования конечности потока энергии в окрестности точек разрыва нормали к двухсторонней поверхности сферических шапок. Из этих рядов при $n \rightarrow \infty$ для коэффициентов e_n и m_n следуют оценки [11]

$$e_n (\varepsilon j_n(\varepsilon))' = O(1/n), \quad m_n/h_n^{(1)}(\varepsilon) = O(1/n). \quad (10)$$

Условиями (10) оправдываются все проведенные над исходными разложениями (4) операции.

3. Алгоритм решения функциональных уравнений. Поскольку уравнения (6) и (7) решаются аналогичным образом, ограничимся рассмотрением системы (6). Коэффициенты e_n ищем в виде

$$e_n = a_n + b_n, \quad (11)$$

где a_n и b_n — новые неизвестные. Такое представление требует введения дополнительных условий. Эти условия сформулируем в виде требования эквивалентности системы (6) следующей системе функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (1 + a_n b_n) (\varepsilon j_n)' P_n^1(\cos \theta) &= -C_1 \operatorname{tg}(\theta/2) \\ (\theta \in (0, \alpha)), \\ \sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon \Gamma_n / (\varepsilon h_n^{(1)})' a_n P_n^1(\cos \theta) &= C_2 \operatorname{tg}(\theta/2) \\ (\theta \in (0, \beta)), \\ \sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon \Gamma_n / (\varepsilon h_n^{(1)})' b_n P_n^1(\cos \theta) &= -C_3 \operatorname{ctg}(\theta/2) \\ (\theta \in (\alpha, \pi)), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (1 + a_n + b_n) (\varepsilon j_n)' P_n^1(\cos \theta) &= C_4 \operatorname{ctg}(\theta/2) \\ (\theta \in (\beta, \pi)). \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, что такой способ расширения областей справедливости уравнений, входящих в систему (6), исключает появление особых точек в этих областях [1, 2, 9].

Полиномы Лежандра, входящие в (12), заменим их интегральными представлениями

$$\begin{aligned} & [\pi(2n+1)\sin\theta]/[2\sqrt{2}(n+1)n] P_n^1(\cos\theta) = \\ &= \int_0^\theta \sin(n\varphi + \varphi/2) \sin\varphi/\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta} d\varphi = \\ &= - \int_\theta^\pi \cos(n\varphi + \varphi/2) \sin\varphi/\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi} d\varphi \\ & \quad (\theta, \varphi \in (0, \pi)) \end{aligned} \quad (13)$$

и перейдем от системы (12) к эквивалентной системе, содержащей вместо многочленов Лежандра тригонометрические функции [1-9]:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n + b_n)(\varepsilon j_n)' \exp[i\pi(n-1)/2] \sin(n\theta + \theta/2) = -C_1 \sin(\theta/2) \\ & \quad (\theta \in (0, \alpha)), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} i\varepsilon a_n/(\varepsilon h_n^{(1)})' \exp[i\pi(n-1)/2] \sin(n\theta + \theta/2) = C_2 \sin(\theta/2) \\ & \quad (\theta \in (0, \beta)), \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\varepsilon b_n/(\varepsilon h_n^{(1)})' \exp[i\pi(n-1)/2] \cos(n\theta + \theta/2) = C_3 \cos(\theta/2) \\ & \quad (\theta \in (\alpha, \pi)), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (1 + a_n + b_n)(\varepsilon j_n)' \exp[i\pi(n-1)/2] \cos(n\theta + \theta/2) = -C_4 \cos(\theta/2) \\ & \quad (\theta \in (\beta, \pi)). \end{aligned} \quad (14)$$

Из асимптотических свойств сферических функций Бесселя следует, что при больших номерах n справедлива оценка

$$(2n+1)/[-4i\varepsilon(\varepsilon j_n)'(\varepsilon h_n^{(1)})'] = 1 + O(1/n^2). \quad (15)$$

На основании этой оценки можно ввести малый параметр

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= 1 + (2n+1)/[4i\varepsilon(\varepsilon j_n)'(\varepsilon h_n^{(1)})'], \\ \varepsilon_n &= O(1/n^2) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (16)$$

Продифференцируем по θ второе и третье уравнения системы (14) и введем в них малый параметр (16). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta + \theta/2) = \begin{cases} C_2/\varepsilon^2 \cos(\theta/2) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varepsilon_n \times \\ \times \cos(n\theta + \theta/2) & (\theta \in (0, \beta)), \\ -C_4 \cos(\theta/2) - \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + B_n) \times \\ \times \cos(n\theta + \theta/2) & (\theta \in (\beta, \pi)), \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\theta + \theta/2) = \begin{cases} -C_1 \sin(\theta/2) - \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + A_n) \times \\ \times \sin(n\theta + \theta/2) \quad (\theta \in (0, \alpha)), \\ C_3/\varepsilon^2 \sin(\theta/2) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varepsilon_n \times \\ \times \sin(n\theta + \theta/2) \quad (\theta \in (\alpha, \pi)), \end{cases} \quad (17)$$

$$\gamma_n = \exp[i\pi(n-1)/2] (\varepsilon j_n)',$$

$$A_n = \gamma_n a_n, \quad B_n = \gamma_n b_n.$$

Воспользовавшись ортогональностью тригонометрических функций, получим из (17) две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов A_n и B_n :

$$\pi(1 - \varepsilon_m) B_m = -p \beta_{m0} - \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + A_n + \varepsilon_n B_n) \beta_{mn}, \quad (18)$$

$$\beta_{mn} = \sin(m\alpha - n\alpha)/(m-n) - \sin[(m+n+1)\alpha]/(m+n+1)$$

$$\pi(A_m + B_m) = -\pi \gamma_m + q \alpha_{m0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n + B_n + \varepsilon_n A_n) \alpha_{mn},$$

$$\alpha_{mn} = \sin(m\beta - n\beta)/(m-n) + \sin[(m+n+1)\beta]/(m+n+1) \quad (19)$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

$$p = C_1 + C_3/\varepsilon^2, \quad q = C_4 + C_2/\varepsilon^2.$$

Системы уравнений (18) и (19) удобны для прямых численных расчетов. Подстановками одна в другую они легко могут быть превращены также в одну систему, содержащую только коэффициенты A_n либо B_n . Матричный оператор такой системы ограничен. В силу теоремы единственности решения поставленной задачи дифракции из альтернативы Фредгольма следует, что система имеет единственное решение в требуемом пространстве числовых последовательностей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \text{const}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|^2 < \text{const}$$

и гарантируется применение метода редукции [10-12].

Потенциалы Π_e и Π_m непосредственно выражаются через коэффициенты A_n и B_n , например,

$$\Pi_e = \Pi_e^0 + (1/k) \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (A_n + B_n) / (\varepsilon j_n)' \exp[-i\pi(n-1)/2] \times$$

$$\times j_n(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \quad (r < a),$$

$$\Pi_e = \Pi_e^0 + (1/k) \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n (A_n + B_n) / (\varepsilon h_n^{(1)})' \exp[-i\pi(n-1)/2] \times$$

$$\times h_n^{(1)}(kr) P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \quad (r > a),$$

что позволяет рекомендовать предложенную методику для непосредственного расчета электромагнитного поля при дифракции на сфере со щелью.

В качестве примера приведем результаты численного расчета коэффициента рассеяния σ . Наиболее характерная зависимость σ от частоты ϵ в сравнении с идеально проводящим шаром представлена на рис. 1.

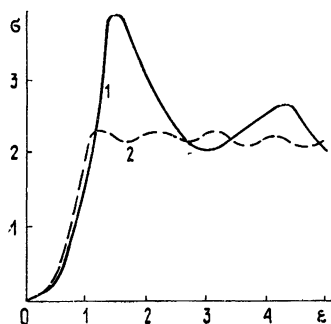


Рис. 1 Зависимость коэффициента рассеяния σ от частоты ϵ : 1 — для сферы со щелью при $\alpha = 5^\circ$ и $\beta = 90^\circ$; 2 — для идеально проводящего шара [10].

В случае произвольной ориентации направления распространения первичной волны относительно сферы со щелью задача дифракции решается аналогично. Отличие состоит лишь в том, что систем типа (18), (19) в такой задаче окажется счетное множество. Каждая из этих систем будет содержать в качестве неизвестных коэффициенты Фурье поля азимутальной гармоник определенного номера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Collins W. D. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, 10, № 1, p. 249.
2. Collins W. D. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, 11, № 2, p. 122.
3. Радин А. М., Шестопапов В. П. — ДАН СССР, 1973, 212, № 4, с. 838.
4. Радин А. М., Шестопапов В. П. — ЖВММФ, 1974, 14, № 5, с. 1232.
5. Радин А. М., Резуненко В. А., Шестопапов В. П. — ЖВММФ, 1977, 17, № 2, с. 394.
6. Виноградов С. С., Шестопапов В. П. — ДАН СССР, 1977, 237, № 1, с. 60.
7. Виноградов С. С., Тучкин Ю. А., Шестопапов В. П. — ДАН СССР, 1978, 242, № 1, с. 80.
8. Виноградов С. С., Тучкин Ю. А., Шестопапов В. П. — ДАН СССР, 1981, 256, № 6, с. 1346.
9. Радин А. М. — Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, 89, № 10, с. 270.
10. Хенл Х, Мауэ А, Вестпфаль К Теория дифракции. — М.: Мир, 1964
11. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — Л.: Гостехтеориздат, 1950.

Ленинградский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила в редакцию
24 марта 1981 г.

DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY A HOLLOW SPHERE WITH A SLOT

A. M. Radin

A vector problem is solved for diffraction of a plane wave incident along the symmetry axis on a hollow ideally conducting sphere with a slot in an arbitrary relation between the wavelength and the geometrical parameters of the problem. The diffracted field has been found in the form of Fourier series. For coefficients of these series, quickly converging systems of linear algebraic equations of the second order have been derived. The applicability of the reduction method is founded. A comparison is made between numerical results for the sphere with a slot and the known results for an ideally conducting sphere. The methodics developed is valid for the case of an arbitrary orientation of the primary field source relative to the hollow sphere with a slot.