ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 535.12 : 535.42 : 517.947 : 517.52

МЕТОД НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ГИПОТЕЗА РЭЛЕЯ ВО ВНЕШНИХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

В. Ф. Апельцин

Рассматривается проблема представимости решений внешних плоских задач дифракции волн на областях, ограниченных гладким контуром, в виде рядов по расходящимся цилиндрическим волнам, что соответствует методу неортогональных рядов Такое представление решения всюду в рассматриваемой области требует обоснования, поскольку использует гипотезу Рэлея (предположение о регулярности такого представления решения всюду вплоть до границы области). Описывается метод получения эффективных достаточных условий справедливости гипотезы Рэлея для регулярной части функции Грина внешней задачи в классе контуров $\rho = \rho(\varphi)$, описываемых в полярных координатах аналитическими функциями $\rho(\varphi)$, голоморфными в некоторой полосе $-\beta < \operatorname{Im} \varphi < \beta$. Обсуждается возможность применения метода неортогональных рядов к случаю кусочно-аналитических кривых, ограничивающих область.

Метод построения решений краевых задач теории дифракции в виде рядов из частных решений соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами, подлежащими определению из предельных условий, эффективен, как известно, когда границы области, в которой строится решение, являются координатными поверхностями. Часто используемое распространение этого метода на случай некоординатных поверхностей встречает определенные трудности. Коэффициенты рядов могут находиться лишь приближенно, методом усечения бесконечных систем алгебраических уравнений, возникающих из требования удовлетворения краевых условий в том или ином смысле. Матрицы соответствующих систем существенно недиагональны (частные решения уравнений на некоординатных поверхностях уже не образуют ортогональных полных систем функций, а являются, как правило, лишь полными линейно-независимыми системами). Метод усечения может быть оправдан, строго говоря, лишь в случае базисности выбранной системы частных решений на границе области. Кроме того, такой способ построения решения обычно навязывает дифрагированному полю представление в виде бесконечного набора волн определенного типа. Например, во внешних задачах дифракции в открытых областях поле всюду вне поверхности тела представляется рядом по расходящимся сферическим (цилиндрическим) волнам, обладающим общим центром, расположенным внутри поверхности тела. Предположение о представимости рассеянного поля в таком виде составляет содержание гипотезы Рэлея [1] (г. Р. — сокращение, которое будет употребляться в дальнейшем), справедливость которой давно подвергается сомнению ввиду неудачных попыток численной реализации метода неортогональных рядов для тел, геометрия которых заметно отличается от шара (круга) [2].

В ряде статей по аналитическому исследованию этого вопроса устанавливаются границы применимости г. Р. в некоторых частных случаях [3, 4]. В [5] показано, что препятствием такой представимости рассеянного поля служит положение особенностей этого поля, аналитически продолженного внутрь поверхности (контура), ограничивающей тело. Рассматриваемые ряды сходятся вне сферы (окружности), содержащей эти особенности. В общем случае проблему нахождения радиуса сходимости рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n H_n^{(1)} (k\rho) e^{in\varphi},$$

представляющих рассеянное поле в плоских задачах, сводят часто к асимптотической оценке при $n \to \infty$ интегралов

$$\int_S \frac{\partial u(\varphi)}{\partial n} J_n[k\rho(\varphi)] e^{-in\varphi} ds,$$

представляющих коэффициенты α_n [3, 6], где $\rho = \rho(\varphi)$ — уравнение контура S в полярных координатах (случай задачи Дирихле). Здесь $\partial u/\partial n$ — нормальная производная решения на S. Фактически применяется метод перевала к интегралу по $[0; 2\pi]$ от выражения $(\partial u(\varphi)/\partial n) \times \times [\rho^2(\varphi) + \dot\rho^2(\varphi)]^{1/2} \exp\{n[\ln \rho(\varphi) - i\varphi]\}$. Однако в точке перевала, которая является корнем уравнения $\rho'(\varphi)/\rho(\varphi) = \pm i$, подынтегральная функция из-за наличия радикала $[\rho^2(\varphi) + \dot\rho^2(\varphi)]^{1/2}$ утрачивает аналитичность, что приводит к ошибочным результатам или существенно усложняет процедуру получения правильной асимптотики α_n. Существуют также случаи, когда уравнение $\rho'(\varphi)/\rho(\varphi) = \pm i$ вовсе не имеет решений [7].

Данная работа посвящена иному подходу к проблеме сходимости рядов по метагармоническим функциям, представляющим дифрагированное поле в двумерном случае, основанному на исследовании интегрального уравнения первого рода, возникающего из требования выполнения краевого условия с помощью потенциала простого слоя с плотностью, сосредоточенной на окружности, целиком принадлежащей внутренности контура. При этом разрешимость этого уравнения, как будет показано, естественным образом связана с рассматриваемой представимостью рассеянного поля всюду вне этой окружности, а условия разрешимости уравнения являются эффективными достаточными условиями справедливости г. Р. Все рассмотрение проводится в классе аналитических функций $\rho(\varphi)$, описывающих контур, периодических по $\operatorname{Re}\varphi$ и голоморфных в некоторой полосе $-\beta < \operatorname{Im}\varphi < \beta$. Результаты могут быть обобщены на трехмерный случай, поскольку принципиальные моменты доказательств не зависят от размерности пространства.

1. Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для u — регулярной части функции Грина уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{gathered} \Delta u + k^2 u = 0 \quad (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}), \\ u|_S = -f(S), \\ (\partial u/\partial \rho - iku)_{\rho\to\infty} = O(\rho^{-3/2}), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\overline{D}$ — замкнутая область, ограниченная плоским контуром S, звездным относительно начала координат: $\rho = \rho(\varphi)$. Начало координат обладает сферической окрестностью $\sum_r$ радиуса r, такой, что $r \subset D$, т. е. $r \leqslant \delta < \min\limits_{\varphi} \rho(\varphi)$, $f(S)$ — значения поля точечного источника, расположенного в точке $M_0(R_0;\ \varphi_0)$, взятые на S. Будем считать, что $\rho(\varphi)$ — аналитическая функция φ, периодическая с периодом 2π по $\operatorname{Re}\varphi$ и голоморфная в некоторой полосе ширины 2β: $-\beta < \operatorname{Im}\varphi < \beta$. Выберем r так, чтобы k не являлось собственным значением внутренней задачи Дирихле для $\sum_r$: $J_n(kr) \neq 0$ при всех n (J_n — функция Бесселя).

Рассмотрим следующее функциональное уравнение первого рода:

$$\int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kl(\varphi;\ \psi)]\mu(\psi)d\psi = -f(\varphi), \tag{1.2}$$

где $\mu(\psi)$ — функция, заданная на окружности $\rho = r$, $H_0^{(1)}$ — функция Грина точечного источника в R^2 $l(\varphi;\ \psi) = \{r^2 + \rho^2(\varphi) - 2r\rho(\varphi) \times \cos(\varphi - \psi)\}^{1/2}$. Если (1.2) разрешимо, например, в $L_2[0;\ 2\pi]$, то очевидно, что функция

$$u(\rho;\ \varphi) = \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[kl(r;\ \rho;\ \varphi - \psi)]\mu(\psi)d\psi, \tag{1.3}$$

где $l(r;\ \rho;\ \varphi - \psi) = \{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \psi)\}^{1/2}$ в $R^2 \setminus D$ является классическим решением задачи (1.1). Кроме того, справедлива теорема 1: если k не является собственным числом внутренней задачи Дирихле для круга $\rho \leqslant r$, то 1) разрешимость уравнения (1.2) является необходимым и достаточным условием представимости классического решения задачи (1.1) в виде ряда $\sum \alpha_n H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}$, где $\alpha_n = J_n(kr)\int_0^{2\pi}\mu(\psi)e^{-in\psi}d\psi$ всюду вне круга $\rho < r$; 2) решение уравнения (1.2) единственно.

Достаточность следует из теоремы сложения

$$H_0^{(1)}[kl(r;\ \rho;\ \varphi - \psi)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr)\,H_n^{(1)}(k\rho)e^{in(\varphi-\psi)},$$

примененной к $H_0^{(1)}$ в (1.3). Единственность также следует из теоремы сложения для $H_0^{(1)}$ и из линейной независимости системы метагармонических функций на контуре $\rho = \rho(\varphi)$ [8].

Для доказательства необходимости заметим, что в силу равенства $\sum_m \alpha_m H_m^{(1)}[k\rho(\varphi)]e^{im\varphi} = -f(\varphi)$, справедливого по условию теоремы, уравнению (1.2) формально удовлетворяет ряд

$$\mu(\psi) = \frac{1}{2\pi}\sum_m \frac{\alpha_m}{J_m(kr)}e^{im\psi}.$$

Поскольку $u(\rho;\ \varphi) = \sum_n \alpha_n H_n^{(1)}(k\rho)e^{in\varphi}$ по условию удовлетворяет уравнению $(\Delta + k^2)u = 0$ всюду в $R^2 \setminus \Sigma_r$, то ряд $D^2{}_\varphi u(r;\ \varphi) = -\sum_m \alpha_m H_m^{(1)}(kr)m^2e^{im\varphi}$ сходится абсолютно и равномерно, т. е. при $m \gg 1$ справедлива оценка

$$|\alpha_m| < c(kr)^m/mm!\,2^m.$$

Тогда при $m \gg 1$ коэффициенты ряда $\mu(\psi)$ удовлетворяют оценке $|\alpha_m|/|J_m(kr)| < c\cdot c_1/m$, т. е. $\mu(\psi) \in L_2[0;\ 2\pi]$.

Итак, вопрос о справедливости г. Р. сводится к проблеме разрешимости уравнения (1.2). Заметим, что его разрешимость означает также отсутствие у рассеянного поля $u(\rho;\ \varphi)$ особенностей вне круга $\rho \leqslant r$.

2. Решение уравнения (1.2) строится как аналитическая функция $\mu_\tau(\psi)$ параметра линейной деформации τ окружности $\rho = R > \max_\varphi \rho(\varphi)$ в контур S:

$$\rho_\tau(\varphi) = R + \tau[\rho(\varphi) - R], \tag{2.1}$$

$\rho_0(\varphi) = R$, $\rho_1(\varphi) = \rho(\varphi)$, $\tau \in [0; 1]$. Вместо (1.2) следует рассмотреть семейство интегральных уравнений (1.2), ядро и правая часть которого аналитически зависят от τ. При $\tau = 0$ получается простейшее уравнение на окружности $\rho = R$, решение которого $\mu_0(\psi) \in C^{(\infty)}[0; 2\pi]$ и выписывается в виде ряда, если выполнено условие

$$R_0 > R^2/r, \tag{2.2}$$

являющееся ограничением на положение точечного источника при выбранных R и r. Отрезок действительной оси $[0; 1]$ плоскости комплексного переменного τ принадлежит некоторой области, не содержащей особых точек по τ ядра $H_0^{(1)}\,[kl_\tau(\varphi;\ \psi)]$:

$$\tau_{1,2} = \frac{r\cos(\varphi-\psi) - R}{\rho(\varphi) - R} \pm i\,\frac{r\sin(\varphi-\psi)}{\rho(\varphi) - R},$$

и правой части $f_\tau(\varphi) = H_0^{(1)}\,[k\,\{R_0^2 + \rho_\tau^2(\varphi) - 2R_0\,\rho_\tau(\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0)\}^{1/2}]$:

$$\tau_{1,2} = \frac{R_0\cos(\varphi-\varphi_0) - R}{\rho(\varphi) - R} \pm i\,\frac{R_0\sin(\varphi-\varphi_0)}{\rho(\varphi) - R},$$

уравнения (1.2) при линейной деформации (2.1). Естественно поэтому искать решение $\mu_\tau(\psi)$ при $\tau \neq 0$ как голоморфную в этой области функцию, представленную в окрестности $\tau = 0$ формальным степенным рядом $\sum\limits_n \tau^n \mu_n(\psi)$ с последующей оценкой его радиуса сходимости. Это приводит к бесконечной системе уравнений относительно $\mu_n(\psi)$ с треугольной матрицей интегральных операторов:

$$\begin{gathered}
A_0 \cdot \mu_0 = -f_0(\varphi), \\
A_0' \cdot \mu_0 + A_0 \cdot \mu_1 = -f_0'(\varphi), \\
\frac{1}{2!}A_0'' \cdot \mu_0 + A_0' \cdot \mu_1 + A_0 \cdot \mu_2 = -\frac{1}{2!}f_0''(\varphi), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{n=k}^{0} \frac{1}{n!}A_0^{(n)} \cdot \mu_{k-n} = -\frac{1}{k!}f_0^{(k)}(\varphi), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $A_0^{(n)}$ означает интегральный оператор с ядром, являющимся производной порядка n от $H_0^{(1)}[kl_\tau(\varphi;\ \psi)]$ по τ при $\tau = 0$: $\bar\rho^n(\varphi)\,D_R^n H_0^{(1)} \times [kl(\varphi-\psi)]$, $\bar\rho(\varphi) = \rho(\varphi) - R$, $l(\varphi-\psi) = [r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi-\psi)]^{1/2}$. Тот же смысл имеет обозначение $f_0^{(k)}(\varphi)$ для правых частей (2.3): $\bar\rho^k(\varphi)\,D_R^k f[kR;\ \varphi]$. Относительно каждой следующей функции $\mu_k(\psi)$ уравнение с номером k является уравнением на окружности $\rho = R$ с правой частью, зависящей от $\mu_n(\psi)$ с номерами $n < k$. Общий вид такого уравнения

$$(A_0 \cdot \mu_k)(\varphi) = F_k(\varphi). \tag{2.4}$$

Для доказательства разрешимости каждого уравнения (2.4) преобразуем его в систему двух интегральных уравнений второго рода относительно пары функций $\mu_k^+(\psi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu_{kn}^+ e^{in\psi}$, $\mu_k^-(\psi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \mu_{kn}^- e^{in\psi}$

$(\mu_k(\psi) = \mu_k^-(\psi) + \mu_k^+(\psi))$ следующим образом. Обозначив $\Phi_k(\varphi) = (A_0 \cdot \mu_k)(\varphi) - F_k(\varphi)$, рассмотрим выражения вида

$$\Phi_k^n = \int_0^{2\pi} \Phi_k(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \tag{2.5}$$

отдельно для $n \geqslant 0$ и $n < 0$. Путь интегрирования в (2.5) деформируем в прямоугольные контуры C^+ (для $n<0$) и C^- (для $n \geqslant 0$), обходящие особые точки ядер интегральных операторов на плоскости φ: $\varphi_0^\pm = \psi \pm i \ln R/r$. При этом возникают условия на положение особенностей по φ правых частей (2.3) и ширину полосы голоморфности $\rho(\varphi)$, необходимые для такой деформации:

$$\ln R_0/R > \ln R/r + \varepsilon \tag{2.6}$$

(эквивалентное (2.2)) и

$$\beta > \ln R/r + \varepsilon. \tag{2.7}$$

В результате квазиобращения получим систему интегральных уравнений Фредгольма следующего вида:

$$\begin{gathered}
\mu_k^-(\varphi) = \int_0^{2\pi} K^-(\varphi; t) * \overline{H}_0^{(1)}(t - \psi)\, \mu_k(\psi)\, d\psi - F_k^-(\varphi), \\
\mu_k^+(\varphi) = \int_0^{2\pi} K^+(\varphi; t) * \overline{\overline{H}}_0^{(1)}(t - \psi)\, \mu_k(\psi)\, d\psi - F_k^+(\varphi),
\end{gathered} \tag{2.8}$$

где K^- и K^+ — ядра, выписываемые в виде рядов, а $\overline{H}_0^{(1)}$, $\overline{\overline{H}}_0^{(1)}$ означают различный выбор однозначных ветвей этих функций для C^+ и C^-. Доказывается разрешимость системы (2.8) и ее эквивалентность уравнению (2.4).

Пользуясь (2.8), нетрудно получить рекуррентную оценку для $\|\mu_k(\psi)\|_{L_2}$ через $\|\mu_p(\psi)\|_{L_2}$ $(p < k)$, которая приводит к оценке радиуса сходимости степенного ряда для $\mu_\tau(\psi)$, зависящей от констант оценок норм интегральных операторов, входящих в F_k^-, F_k^+, и нормы обратного оператора системы (2.8). Иначе говоря, справедлива теорема 2: уравнение (1.2) разрешимо в некоторой окрестности нуля плоскости τ и обладает решением из $L_2[0; 2\pi]$ — голоморфной аналитической функцией по τ, если особенности функций $\rho(\varphi)$ и $f[kR; \varphi]$ на плоскости φ удалены от действительной оси на величину, большую $\ln R/r$, где R и r — внешний и внутренний радиусы кольца, содержащего контур $\rho = \rho(\varphi)$ внутри себя.

3. Окончательное решение задачи о разрешимости уравнения (1.2), т. е. фактически о справедливости г. Р., требует построения аналитического продолжения $\mu_\tau(\psi)$ за пределы полученного радиуса голоморфности. Для этого система (2.3), в которой каждое уравнение заменяется системой (2.8), собирается по степеням τ в обратном порядке, причем все операции со степенными рядами оправданы, если τ выбрано в пределах окрестности нуля, полученной по теореме 2. В результате приходим к следующей системе интегральных уравнений относительно пары функций $\mu_\tau^+(\psi) = \sum_n \mu_n^+(\psi)\tau^n$, $\mu_\tau^-(\psi) = \sum_n \mu_n^-(\psi)\tau^n$, $\mu_\tau(\psi) = \mu_\tau^-(\psi) + \mu_\tau^+(\psi)$:

$$\int_0^{2\pi} [\overset{(1)}{R_\tau^-}(\varphi; \psi) - \overset{(2)}{R_\tau^-}(\varphi; \psi)]\, \mu_\tau(\psi)\, d\psi = F_\tau^-(\varphi),$$

$$\int_0^{2\pi} [\overset{(1)}{R}{}^{+}_{\tau}(\varphi; \psi) - \overset{(2)}{R}{}^{+}_{\tau}(\varphi; \psi)]\, \mu_\tau(\psi)\, d\psi = F^{+}_{\tau}(\varphi). \tag{3.1}$$

Уравнения системы (3.1) — второго рода с ядрами Фредгольма, поскольку нулевые члены разложения ядер $\overset{(1)}{R}{}^{\mp}_{\tau}(\varphi; \psi)$ в ряд Тейлора по τ являются распределениями $\delta^-(\varphi - \psi)$ и $\delta^+(\varphi - \psi)$ соответственно; остальные члены разложения — гладкие ядра.

Применяя к (3.1) теорему о конечномероморфной обратимости [9], получим, что $\mu_\tau(\psi)$ всюду, где ядра и правые части (3.1) голоморфны по τ, является не более чем мероморфной аналитической функцией τ, причем легко показать, что на оси $\operatorname{Im} \tau = 0$ (а также в некоторой ее окрестности) нет точек спектра. Решение $\mu_\tau(\psi)$ системы (3.1) является аналитическим продолжением решения уравнения (1.2) по τ, для однопараметрического семейства контуров (2.1), за пределы малой окрестности нуля плоскости τ.

Контуры интегрирования C^+ и C^- для ядер системы (3.1) отличаются от таковых в предыдущем случае положением особых точек функции $H_0^{(1)}[kl_\tau(\varphi; \psi)]$, которые на этот раз определяются выражениями $\varphi(\tau; re^{\pm i\varphi})$ — корнями уравнения

$$\rho_\tau(\varphi) - re^{\pm i(\varphi - \psi)} = 0, \tag{3.2}$$

совпадающими с $\varphi_0^{\pm} = \psi \pm i \ln R/r$ при $\tau = 0$. Тогда при $\operatorname{Im} \tau = 0$, $\operatorname{Re} \tau \in [0; 1]$, что соответствует реальной деформации R в $\rho(\varphi)$, единственной причиной нарушения аналитичности ядер (2.1) является возможное ветвление (или появление других особенностей) корней $\varphi(\tau; re^{\pm i\psi})$ по комплексной переменной $z = re^{\pm i\psi}$. При $\tau = 0$

$$\varphi_0^{\pm} = \pm i \ln[(R/r) e^{\mp i\psi}]. \tag{3.3}$$

Особенность функции $\ln[(R/r)z]$ сосредоточена в точке $z = 0$ и допускает выделение однозначной ветви. При малых τ корни уравнения (3.2) близки к (3.3) и принадлежат той же однозначной ветви. Эта ситуация сохраняется вплоть до того значения τ, при котором хотя бы одна из особых точек функции $\varphi(\tau; z)$ пересечет окружность $|z| = r$ и которое будет предельным для множества τ, сохраняющего разрешимость системы (3.1) и уравнения (1.2). Справедлива теорема 3: в условиях теоремы 2 уравнение (1.2) разрешимо и обладает решением $\mu(\psi) \in L_2[0; 2\pi]$ для тех контуров семейства $\rho_\tau(\varphi)$ $(0 \leqslant \tau < 1)$, для которых число особых точек корней $\varphi(\tau; z)$ уравнения $\rho_\tau(\varphi) = e^{\pm i\varphi} z^{\mp 1}$, расположенных вне и внутри окружности $|z| = r$, не меняется при $\tau \to 0$.

Следствие 1. В условиях теоремы 3 для решения задачи (1.1) справедлива г. Р.

Следствие 2. В условиях теоремы 3 особенности рассеянного поля $u(\rho; \varphi)$ — решения задачи (1.1) — не покидают окрестности начала координат радиуса $r < \min\limits_{\varphi} \rho(\varphi)$.

Уравнение

$$\rho_\tau(\varphi) = e^{\pm i\varphi} z^{\mp 1} \tag{3.4}$$

из теоремы 3 является, как правило, уравнением для полинома целой степени относительно $e^{\pm i\varphi}$, некоторые коэффициенты которого являются рациональными функциями z и τ. Особенности корней $\varphi(\tau; z)$ могут быть найдены как особенности этих коэффициентов и как нули дискриминанта полинома. Отметим еще, что часто используемое во многих работах по г. Р. уравнение [4,6]

$$\rho'(\varphi)/\rho(\varphi) = \pm i \tag{3.5}$$

есть следствие уравнения (3.4) и является необходимым условием совместной разрешимости (3.4) и уравнения $\rho'_\tau(\varphi) = \pm ie^{\pm i\varphi} z^{\mp 1}$, полученного из (3.4) дифференцированием по φ, т. е. является условием слияния корней уравнения (3.4) — возможный (но не единственный) тип особенности корней $\varphi(\tau;\ z)$ по z.

Важным следствием полученных результатов является также то, что достаточные условия справедливости г. Р., полученные в теоремах 2 и 3, не выполняются в тех случаях, когда г. Р. заведомо неверна, как, например, в случаях кривых, содержащих углы, и вообще в случае кусочно-аналитических кривых, когда аналитическое продолжение решения в область, ограниченную поверхностью тела, невозможно.

Рассмотрим некоторые примеры использования полученных результатов. Ограничимся случаем возбуждения плоской волной (т. е. $R_0 \to \infty$), когда условие (2.6), очевидно, выполнено.

1. Эллипс: $\rho(\varphi) = (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{-1/2}$, $b = 1$, $\varepsilon^2 = 1 - 1/a^2$, a и b — большая и малая полуоси. Однопараметрическое семейство эллипсов возьмем в виде $\rho_\tau(\varphi) = b_\tau(1 - \varepsilon^2_\tau \cos^2 \varphi)^{-1/2}$, $b_\tau = a + \tau(1 - a)$, $\varepsilon^2_\tau = \tau(a-1)[2a - \tau(a-1)]/a^2$, $\rho_0(\varphi) = a$; очевидно, $R = a$, $r = 1$. Особые точки $\rho(\varphi)$

$$\varphi = \pi n \pm i \ln[(1 + (1 - \varepsilon^2)^{1/2})/\varepsilon]; \tag{3.6}$$

условие (2.7) приводит к неравенству с полиномом третьей степени относительно ε, приближенное решение которого $\varepsilon < 0{,}8393$. Корни уравнения (3.4) имеют единственную особенность по z (обращение в нуль дискриминанта), которая может пересечь окружность $|z| = r = 1$:

$$z_\tau = 1/(a^2 - b^2_\tau).$$

При малых τ $|z_\tau| \gg 1$; неравенство $|z_\tau| \geqslant 1$ сохраняется вплоть до $\tau = 1$, если $\varepsilon < 1/\sqrt{2} \approx 0{,}71$ — результат, содержащийся в [3] и подтвержденный многими численными экспериментами.

2. Окружность радиуса a с центром, смещенным относительно начала координат на $l < a$ (эксцентрик):

$$\rho(\varphi) = l \cos \varphi + (a^2 - l^2)^{1/2}\{1 + [l^2/(a^2 - l^2)] \cos^2 \varphi\}^{1/2}.$$

Обозначив $\varepsilon_\tau = \tau l/[(a + l)(a + l - 2\tau l)]^{1/2}$, возьмем однопараметрическое семейство эксцентриков в виде

$$\rho_\tau(\varphi) = \tau l \cos \varphi + (\tau l/\varepsilon_\tau)(1 + \varepsilon_\tau^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}, \quad \rho_0(\varphi) = a + l = R,$$

$$r = a - l.$$

Особые точки $\rho(\varphi)$: $\varphi = \pi n \pm i \ln[(1 + (1 + \varepsilon^2)^{1/2})/\varepsilon]$. Приближенное решение неравенства, возникающего из условия (2.7): $l/a < 0{,}54368$. Уравнение (3.4) вырождается в линейное относительно $e^{2i\varphi}$:

$$e^{2i\varphi} = \frac{(a + l)(a + l - 2\tau l) + \tau l z}{z(z - \tau l)}. \tag{3.7}$$

Единственная особенность, которая может пересечь окружность $|z| = r = a - l$, — нуль знаменателя: $z_\tau = \tau l$. При $|\tau| \ll 1$ $|z_\tau|$ близко к 0; $|z_\tau| < a - l = r$ вплоть до $\tau = 1$ при $l < a/2$ — предельный сдвиг, оставляющий г. Р. справедливой. В данном случае методы, связанные с уравнением (3.5), не работают, поскольку оно не имеет решений (корень (3.7) уравнения (3.4) единственный, и нет особенностей, связанных со слиянием корней).

3. *Кривая* $\rho(\varphi) = (1+\varepsilon^2\cos^2\varphi)^{1/2}$, $R = (1+\varepsilon^2)^{1/2}$, $r = 1$. Соответствующее однопараметрическое семейство кривых $\rho_\tau(\varphi) = b_\tau(1+\varepsilon^2_\tau\cos^2\varphi)^{1/2}$, где $b_\tau = (1+\varepsilon^2)^{1/2} + \tau[1-(1+\varepsilon^2)^{1/2}]$, $\varepsilon_\tau = \tau\varepsilon$. Из условия (2.7) следует $\varepsilon < 1{,}54$. В уравнении (3.4) особенность в коэффициентах $z_\tau = b_\tau\varepsilon_\tau/2$ является единственной, которая может пересечь окружность $|z| = r = 1$. При $\tau = 0$ $z_\tau = 0$; при $\tau = 1$ $z_\tau = \varepsilon/2$. Если $\varepsilon < 2$, то условие теоремы 3 выполнено вплоть до $\tau = 1$. Общее условие на ε: $\varepsilon < 1{,}54$, при котором справедлива г. Р., в отличие от предыдущих случаев дается теоремой 2, а не теоремой 3.

4. *Улитка Паскаля:* $\rho(\varphi) = a + b\cos\varphi$, $a > b > 0$. На этот раз $\rho(\varphi)$ удовлетворяет условию (2.7) при всех допустимых значениях a и b. Однопараметрическое семейство: $\rho_\tau(\varphi) = a + b(1-\tau) + \tau b\cos\varphi$, $R = a + b$, $r = a - b$. Особенность, пересекающая окружность $|z| = r = a - b$, $z_\tau = \tau b/2$ (особенность в коэффициентах уравнения (3.4)). Очевидно, что при $b < (2/3)\,a$ условие теоремы 3 выполнено вплоть до $\tau = 1$, т. е. при $b < (2/3)\,a$ справедлива г. Р. [4].

5. *Кривая* $\rho(\varphi) = (a + b\cos\varphi)^{-1}$, $R = (a-b)^{-1}$, $r = (a+b)^{-1}$. Однопараметрическое семейство удобно взять в виде $\rho_\tau(\varphi) = [a - b\times(1-\tau) + \tau b\cos\varphi]^{-1}$. Условие (2.7) приводит к неравенству $t^3 - t^2 - t - 1 > 0$ $(t = a/b)$, приближенное решение которого — $t > 1{,}84$. В уравнении (3.4) особенность, перемещение которой необходимо учесть условием теоремы 3, — обращение в нуль дискриминанта полинома по степеням $e^{i\varphi}$: $z_\tau = 2b\tau/(b^2_\tau - a^2_\tau)$. При $\tau = 0$ $z_\tau = 0$, $|z_1| = 2b/(a^2 - b^2)$. Неравенство $2b/(a^2 - b^2) < r = (a+b)^{-1}$ приводит к условию $b < a/3$. Итак, условие справедливости г. Р. — $b/a < 1/3$.

6. *Кривая* $(x^2-1)(y^2-1) = c$, где $0 < c \ll 1$, приближает единичный квадрат с центром в начале координат (c — сглаживающий параметр, при $c = 0$ уравнение в точности распадается на уравнения сторон квадрата). В полярных координатах уравнение переписывается в виде

$$\rho(\varphi) = \{(2-2[\cos^2 2\varphi + c\sin^2 2\varphi]^{1/2})/\sin^2 2\varphi\}^{1/2},$$

при этом $R = (2-2\sqrt{c})^{1/2}$, $r = (1-c)^{1/2}$. Однопараметрическое семейство

$$\rho_\tau(\varphi) = \{(2-2[c+\tau(1-c)\cos^2 2\varphi]^{1/2}/(1-\tau\cos^2 2\varphi)\}^{1/2}.$$

Особенность корней уравнения (3.4) — обращение в нуль дискриминанта полинома по степеням $e^{i2\varphi}$ — остается в пределах окружности $|z| = r = (1-c)^{1/2}$ при $\tau \in [0;\ 1]$, если $0{,}23987 < c < 1$. Условие (2.7) теоремы 2 приводит к неравенству с полиномом третьей степени по $t = \sqrt{c}$ и удовлетворяется значениями c из того же интервала. Условие справедливости г. Р. — $0{,}23987 < c < 1$.

Выше было отмечено, что г. Р., вообще говоря, несправедлива для областей, ограниченных кусочно-аналитическими кривыми, в частности — содержащих угловые точки. Однако можно указать широкий класс невыпуклых областей с угловыми точками, для которых представление рассеянного поля только по расходящимся волнам строго вне этих областей, по-видимому, допустимо и для которых г. Р. нарушается лишь в отдельных (угловых) точках границы, что зачастую несущественно для численных методов. Рассмотрим, например, розетку, состоящую из конечного числа пересекающихся окружностей, с центрами в вершинах правильного многоугольника. Если их радиусы таковы, что внешние (по отношению к центру многоугольника) точки их пересечений имеют радиусы, бо́льшие или равные радиусу окружности, описанной вокруг многоугольника, то представление рассеянного таким контуром поля (при возбуждении плоской волной) в виде ряда по расходящимся цилиндрическим волнам с полюсами в центре многоугольника должно привести к сходящемуся алгоритму метода неортогональных рядов. Это обстоятельство подтверждается некоторыми численными результатами [10].

Тому же классу принадлежат также кривые, образованные пересечением концентрических эллипсов и окружности с тем же центром, если радиус окружности не меньше межфокусного расстояния эллипсов.

Список таких примеров, принцип построения которых довольно прозрачен, может быть значительно расширен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Дж С. Теория звука — М.: ГТТИ, 1955. — Т. 2.
2. Ландсберг И. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 6, с. 927.
3. Баранцев Р. Г., Грудцын В. В. и др. — Вестник ЛГУ. Сер. Мех., мат., астр., 1971, № 7, вып. 2, с. 56.
4. Peter M. van den Berg, Fokkema J. T. — IEEE Trans., 1979, **27**, № 5.
5. Millar R. F. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 1971, **69**, № 1, p. 175.
6. Баранцев Р. Г., Грудцын В. В. — Записки научных семинаров ЛОМИ им. Стеклова, 1976, **62**, № 8, с. 27.
7. Грудцын В. В. В кн. Асимптотические методы в механике.— Иркутск, 1979, с. 39.
8. Векуа И. Н. — ДАН СССР, 1953, **90**, № 5.
9. Функциональный анализ. / Под редакцией С. Г. Крейна. — М.: Наука, 1972.
10. Поповиди Р. С., Каркашадзе Д. Д., Мтиулишвили К. А. Тезисы докладов на VII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн. — М., 1977, **3**, с. 83.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 3 марта 1981 г.

THE METHOD OF NONORTHOGONAL SERIES AND THE REYLEIGH HYP OTHESIS IN EXTERNAL DIFFRACTION PROBLEMS

V. F. Apel'tsin

A problem is considered for solution presentation of plane problems of the wave diffraction by regions limited by a smooth contour in the form of series over diverging cylindrical waves that corresponds to the method of nonorthogonal series. Such presentation of the solution everywhere in the region considered needs grounds, since it uses the Reyleigh hypothesis (an assumption on the regularity of such presentation everywhere up to the boundary of the region). A method is decribed for obtaining the effective sufficient conditions of the Reyleigh hypothesis validity for a regular part of the Green's function of the external problem in the class of contours $\rho = \rho(\varphi)$, which are described in the polar coordinates by analytical functions $\rho(\varphi)$, holomorphic in a certain band $-\beta < \operatorname{Im}\varphi < \beta$ A possibility is discussed for the use of the nonorthogonal series method for the case of partially-analytical curves limiting the region.