

УДК 530.12

ТЕОРЕМЫ ОБ ОТРАЖЕНИИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В. Н. Красильников, А. В. Тютин

Решена задача об отражении от идеально проводящей плоскости электромагнитных волн, излученных точечным электрическим или магнитным диполем любой ориентации в движущейся недиспергирующей среде. Доказано, что идеальное зеркало можно заменить точечным источником, смещенным относительно зеркальной точки и работающим с дополнительным фазовым сдвигом.

Распространению плоских электромагнитных волн в движущихся средах при наличии границ раздела посвящено много работ (см., например, библиографию в [1] и [2]). Между тем, граничные задачи для волн других типов затрагивались редко. В настоящей работе рассматривается отражение от идеально проводящей плоскости электромагнитных волн, излученных точечным монохроматическим ($e^{-i\omega t}$) диполем, находящимся в движущейся с постоянной скоростью среде. Моделью идеально проводящей плоскости служит металлическая сетка, через которую свободно проникает среда и размеры ячейки которой много меньше длины волны падающего излучения. Среда считается недиспергирующим диэлектриком, однородным и изотропным в системе покоя.

Пусть плоскость $z = 0$ является идеально проводящей поверхностью, источник находится в точке $x = 0, y = 0, z = z_0$, а среда движется со скоростью u под углом θ к зеркалу (рис. 1). Без ограничения общности положим отличными от нуля лишь проекции $u_x = u \cos \theta$ и $u_z = u \sin \theta$; плоскость $y = 0$ назовем плоскостью движения.

Будем описывать электромагнитные поля с помощью 4-тензора Герца, имеющего вид [1]

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_{mz} & -\Pi_{my} & i\Pi_{ex} \\ -\Pi_{mz} & 0 & \Pi_{mx} & i\Pi_{ey} \\ \Pi_{my} & -\Pi_{mx} & 0 & i\Pi_{ez} \\ -i\Pi_{ex} & -i\Pi_{ey} & -i\Pi_{ez} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где Π_e и Π_m — электрический и магнитный векторы Герца. Тензор дипольных моментов P_{ij} , описывающий источник излучения, отличается от (1) заменой Π_e и Π_m на электрический P_e и магнитный P_m моменты соответственно.

В движущейся среде тензор Герца удовлетворяет уравнению [1]

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} - (n^2 - 1)\gamma^2 \left(\beta \nabla - i \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \Pi_{ij} = -4\pi\mu P_{ij} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0), \tag{2}$$

где $\beta = u/c, \gamma^{-2} = 1 - \beta^2, n = \sqrt{\epsilon\mu}$ — показатель преломления среды в системе покоя. Граничные условия есть условия обращения в нуль

касательной составляющей электрического поля \vec{E} на плоскости $z = 0$,
Выражая E_x и E_y через компоненты тензора Π_{ij} [1], получим

$$B \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{ex} + i \frac{\omega}{c} B \operatorname{rot}_x \Pi_m + \frac{\partial}{\partial x} \left[\operatorname{div} \Pi_e + \right. \\ \left. + i \frac{\omega}{c} A (\beta, \Pi_e) - A (\beta, \operatorname{rot} \Pi_m) \right] + \frac{\omega}{c} A \beta_x \left[i \operatorname{div} \Pi_e + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{c} (\beta, \Pi_e) + i (\beta, \operatorname{rot} \Pi_m) \right] \Big|_{z=0} = 0; \quad (3)$$

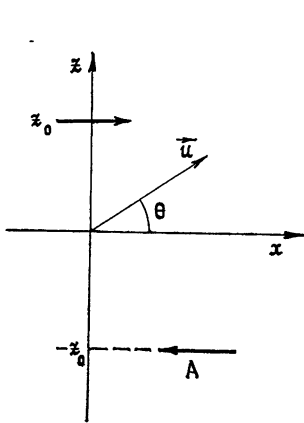


Рис. 1.

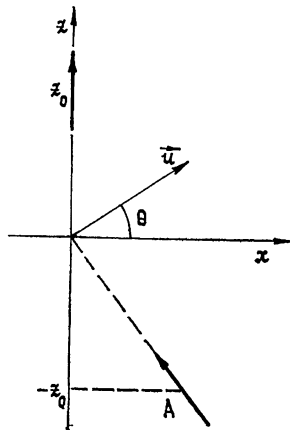


Рис. 2.

$$B \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{ey} + i \frac{\omega}{c} B \operatorname{rot}_y \Pi_m + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\operatorname{div} \Pi_e + i \frac{\omega}{c} A (\beta, \Pi_e) - A (\beta, \operatorname{rot} \Pi_m) \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{n^2 - 1}{1 - n^2 \beta^2}, \quad B = \frac{n^2 (1 - \beta^2)}{1 - n^2 \beta^2}.$$

Разложим тензор Герца падающего поля $\Pi_{ij}^{(0)}$ по плоским волнам*.
Для этого, решая уравнение (2) методом Фурье, получим выражение

$$\Pi_{ij}^{(0)}(x, y, z - z_0) = \frac{\mu P_{ij}}{2 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_x x + ik_y y + ik_z(z - z_0)]}{\Delta(\omega, \mathbf{k})} \times \\ \times dk_x dk_y dk_z, \quad (5)$$

где

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - (n^2 - 1) \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - \beta \mathbf{k} \right)^2 = \\ = d(k_z - k_{0z})(k_z - k_{1z}). \quad (6)$$

* Для $\Pi_{ij}^{(0)}$ известно явное выражение [1], которое для наших рассуждений не требуется.

Здесь $k_{0,z}$ являются решениями дисперсионного уравнения $\Delta(\omega, \mathbf{k}) = 0$ при фиксированных k_x и k_y . Они равны

$$k_{0,z} = \mp p - s, \quad (7)$$

где

$$p = \frac{1}{d} \sqrt{(n^2 - 1) \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - \beta_x k_x \right)^2 + d \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \right)}; \quad (8)$$

$$s = \delta \left(\frac{\omega}{c} - \beta_x k_x \right) \beta_z; \quad (9)$$

$$d = \frac{1 - \beta^2/\beta_\theta^2}{1 - \beta^2}, \quad \delta = \frac{n^2 - 1}{1 - \beta^2/\beta_\theta^2}, \quad \beta_\theta^2 = \frac{1}{n^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}. \quad (10)$$

Так как направление групповой скорости \mathbf{v}_g совпадает с нормалью к поверхности волновых векторов [1], то на основании (7) можно доказать, что $v_{gz} = 0$ при $p = 0$, т. е. при $k_{0z} = k_{1z}$. В случае досветового движения среды ($\beta < n^{-1}$), когда поверхность волновых векторов является эллипсоидом с осью симметрии β , волны с k_{1z} имеют положительную проекцию групповой скорости на ось z , а волны с k_{0z} — отрицательную. Поэтому на комплексной плоскости k_z полюс k_{1z} нужно обходить снизу, а k_{0z} — сверху. Интегрируя в (5) по вычетам и учитывая при этом выражение (6), получим разложение по плоским волнам, в котором k_{0z} в показателе экспоненты относится к случаю $z < z_0$, k_{1z} — к случаю $z > z_0$:

$$\Pi_{ij}^{(0)}(x, y, z - z_0) = \frac{i\mu P_{ij}}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\exp[ik_x x + ik_y y + ik_{0,z}(z - z_0)]}{k_{1z} - k_{0z}} dk_x dk_y. \quad (11)$$

Тензор Герца отраженного поля $\Pi_{ij}^{(1)}$ также представим в виде разложения по плоским волнам. В досветовом случае оно имеет вид

$$\Pi_{ij}^{(1)} = \frac{i\mu}{\pi d} \int_{-\infty}^{+\infty} \int V_{ijkl} P_{kl} \frac{\exp[ik_x x + ik_y y - ik_{0z} z_0 + ik_{1z} z]}{k_{1z} - k_{0z}} dk_x dk_y. \quad (12)$$

Тензор V_{ijkl} находится из граничных условий. Ниже будет показано, что для источника любого типа можно описать отраженное поле таким способом, при котором V_{ijkl} не зависит от k_x и k_y . Тогда, выражая k_{0z} через k_{1z} в соответствии с (7), а именно $k_{0z} = -k_{1z} - 2s$, нетрудно убедиться в том, что разложение (12) сводится к разложению (11) для $z > z_0$. В результате получается следующая теорема об отражении:

$$\Pi_{ij}^{(1)} = V_{ijkl} \Pi_{kl}^{(0)}(x - 2\delta\beta_x \beta_z z_0, y, z + z_0) \exp\left(2i \frac{\omega}{c} \delta\beta_z z_0\right). \quad (13)$$

Таким образом, идеально проводящую плоскость можно заменить точечным источником с дипольным моментом $V_{ijkl} P_{kl}$, расположенным в точке A с координатами

$$x_A = 2\delta\beta_x \beta_z z_0, \quad z_A = -z_0 \quad (14)$$

и работающим с дополнительным фазовым сдвигом $2(\omega/c)\delta\beta_z z_0$. Заметим, что фазовый сдвиг имеет порядок β , в то время как смещение мнимого источника относительно зеркальной точки — порядок β^2 . Фазовый сдвиг исчезает лишь при горизонтальном ($\theta = 0$) движении среды, смещение — при горизонтальном и вертикальном движении.

Подставляя в выражение (12) $k_{1z} = -k_{0z} - 2s$ и сравнивая его с разложением (11) для $z < z_0$, нетрудно получить теорему об отражении в другой форме, эквивалентной (13):

$$\Pi_{ij}^{(1)} = V_{ijkl} \Pi_{kl}^{(0)}(x + 2\delta\beta_x \beta_z z, y, -z - z_0) \exp\left(-2i \frac{\omega}{c} \delta\beta_z z\right). \quad (15)$$

Произведем инверсию оси z , т. е. заменим z на $-z$, z_0 на $-z_0$, β_z на $-\beta_z$:

$$\Pi_{ij}^{(1)} = V_{ijkl} \Pi_{kl}^{(0)}(x + 2\delta\beta_x \beta_z z, y, z + z_0) \exp\left(-2i \frac{\omega}{c} \delta\beta_z z\right). \quad (16)$$

Формула (16) получается из (13) заменой z на z_0 , z_0 на z , β_z на $-\beta_z$, что означает выполнение такой же теоремы взаимности, как и в безграничной движущейся среде [1].

Осталось найти такой способ описания отраженного поля, при котором тензор V_{ijkl} в (12) не зависит от k_x и k_y . Используемые ниже индексы непосредственно указывают на тип и ориентацию источников; например, V_{exex} — коэффициент, связывающий $\Pi_{ex}^{(1)}$ и $\Pi_{ez}^{(0)}$.

Рассмотрим сначала горизонтальный электрический и вертикальный магнитный диполи. Пусть падающее поле описывается одной из компонент $\Pi_{ex}^{(0)}$, $\Pi_{ey}^{(0)}$ или $\Pi_{mz}^{(0)}$. Той же компонентой определяется и отраженное поле, поскольку граничные условия (3) и (4) сводятся, как и в неподвижной среде, к одному из условий Дирихле:

$$\Pi_{ex} \Big|_{z=0} = 0, \quad \Pi_{ey} \Big|_{z=0} = 0, \quad \Pi_{mz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (17)$$

Подстановка в (17) разложений (11) и (12) дает

$$V_{exex} = V_{eyey} = V_{mz mz} = -1. \quad (18)$$

Тип и ориентация мнимого источника совпадают с типом и ориентацией действительного диполя (рис. 1). Заметим, что соотношения (18) вовсе не означают полного отражения падающего излучения идеальным зеркалом: электромагнитная энергия поглощается или выделяется на границе в зависимости от направления движения среды (о потоке энергии в движущейся среде см. [3]).

Сложнее дело обстоит в случае источников, для которых в неподвижной среде имело место условие Неймана. Рассмотрим прежде всего вертикальный электрический диполь P_{ez} . Падающее поле описывается компонентой $\Pi_{ez}^{(0)}$. Условия (3) и (4) не сводятся друг к другу, и построить решение в виде однокомпонентного тензора Герца нельзя. Если, наряду с $\Pi_{ez}^{(1)}$, считать отличной от нуля компоненту $\Pi_{ex}^{(1)}$, то граничные условия приобретают наиболее простой вид:

$$\frac{\partial \Pi_{ez}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{ex}}{\partial x} + i \frac{\omega}{c} \frac{n^2 - 1}{1 - n^2 \beta^2} (\beta_z \Pi_{ez} + \beta_x \Pi_{ex}) \Big|_{z=0} = 0; \quad (19)$$

$$\Pi_{ex} + \frac{n^2 - 1}{n^2(1 - \beta^2)} \beta_x \left[i \frac{c}{\omega} \left(\frac{\partial \Pi_{ez}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_{ex}}{\partial x} \right) + \beta_z \Pi_{ez} + \beta_x \Pi_{ex} \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad (20)$$

где $\Pi_{ez} = \Pi_{ez}^{(0)} + \Pi_{ez}^{(1)}$, $\Pi_{ex} = \Pi_{ex}^{(1)}$.

Подставляя в (19) и (20) разложения (11) и (12), получим систему двух алгебраических уравнений относительно V_{ezez} и V_{exex} . Ее решением оказываются значения

$$V_{ezez} = 1, \quad V_{exex} = -2\delta\beta_x \beta_z, \quad (21)$$

не зависящие от k_x и k_y ; поэтому имеет место теорема об отражении в форме (13). Величина горизонтальной компоненты у мнимого источника так согласована со смещением относительно зеркальной точки (14), что он будет всегда ориентирован вдоль радиуса-вектора системы координат (рис. 2).

В случае горизонтального магнитного источника, перпендикулярного плоскости движения, т. е. источника типа P_{my} , граничные условия приобретают наиболее простой вид, если описывать отраженное поле с помощью компонент $\Pi_{my}^{(1)}$ и $\Pi_{ex}^{(1)}$. Не выписывая эти условия, укажем лишь найденные из них значения коэффициентов в формуле (13):

$$V_{mymy} = 1, \quad V_{exmy} = 2\delta\beta_z. \quad (22)$$

Данный результат можно получить на основании законов отражения для электрических источников, если представить магнитный диполь как рамку с током (рис. 3). Мнимая рамка с током будет иметь форму па-

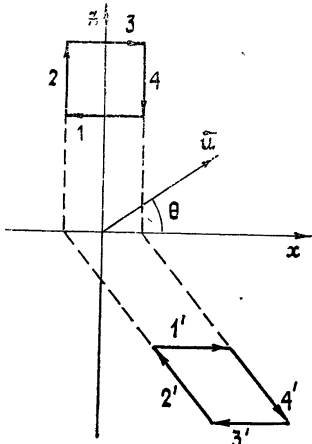


Рис. 3.

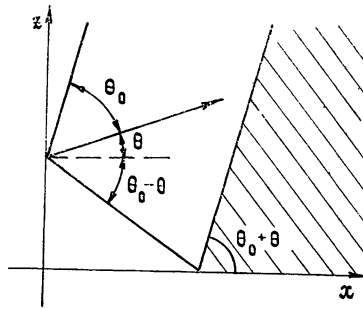


Рис. 4.

раллелограмма, площадь которого равна площади исходной рамки. Наличие электрической компоненты P_{ex} объясняется тем, что диполи $1'$ и $3'$ работают, согласно (13), с различным дополнительным фазовым сдвигом.

В случае горизонтального магнитного источника, лежащего в плоскости движения (типа P_{mx}), отраженное поле нельзя описать двухкомпонентным тензором Герца, для которого выполнялась бы теорема (13). Но этого можно добиться, если использовать три компоненты: $\Pi_{mx}^{(1)}$, $\Pi_{mz}^{(1)}$, $\Pi_{ey}^{(1)}$. Тогда граничные условия (3) и (4) разбиваются на три, более простые. Найденные из них коэффициенты равны:

$$V_{mxx} = 1, \quad V_{mzmx} = 2\delta\beta_x \beta_z, \quad V_{eymx} = -2\delta\beta_z. \quad (23)$$

Из (23) следует, что магнитная часть мнимого источника ортогональна радиусу-вектору точки его расположения. Формулы (23) также можно получить с помощью теорем для электрических диполей.

Теорема (13) доказана методом разложения по плоским волнам для досветового случая. Однако можно показать, что она имеет место и при $\beta > n^{-1}$, хотя возникающие при этом разложения отличаются от (11), (12). В заключение обратим внимание на некоторые особенности сверхсветового движения среды.

Как известно [1], при $\beta > n^{-1}$ падающее поле существует лишь в области, ограниченной конической поверхностью, тангенс угла раствора которой равен $\text{tg } \theta_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{n^2\beta^2 - 1}}$, а ось симметрии совпадает

с направлением движения среды (рис. 4). Отраженное поле занимает часть верхнего полупространства, ограниченную конической поверхностью, параллельной границе падающего поля. Заметим, что при $\theta > \theta_0$ излучение не достигает зеркала, а при $\theta < -\theta_0$ оно полностью поглощается на границе раздела. Нетрудно доказать, что скоростью, при которой исчезает отраженное поле, является величина β_0 , определенная соотношением (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник, 1974 — М.: Наука, 1976. — С. 179.
2. Столяров С. Н. Эйнштейновский сборник, 1975—1976 — М.: Наука, 1978. — С. 152
3. Гинзбург В. Л., Угаров В. А. — УФН, 1976, 118, № 1, с. 175.

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
23 июня 1981 г.

THEOREMS ON REFLECTION IN A MOVING MEDIUM

V. N. Krasil'nikov, A. V. Tyukhtin

A problem is solved on electromagnetic wave reflection from an ideally when the source is conducting plane a point electric or magnetic dipole of any orientation in a moving nondispersive medium. It is proved that the ideally mirror may be changed by a point source shifted relative to the mirror point and operating with an additional phase shift.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 томах Т VIII. Электродинамика сплошных сред — 2-е изд., перераб. и доп. Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 42 л

Восьмой том курса теоретической физики посвящен теории электромагнитных полей в материальных средах и широкому кругу вопросов теории макроскопических электрических и магнитных свойств вещества. Первое издание книги вышло в свет в 1957 г. и давно стало библиографической редкостью. Прошедшие годы не потребовали изменения общего стиля книги или существенной переработки уже имевшегося в ней материала. Произведены, однако, обширные дополнения, достигающие до трети общего объема книги. Они касаются всех глав, но в особенности значительны дополнения в теории диэлектрических и магнитных свойств вещества, магнитной гидродинамике, оптике материальных сред, теории рассеяния; добавлены новые главы о пространственной дисперсии и нелинейной оптике.

Пособие предназначено для студентов старших курсов физических специальностей вузов, а также аспирантов и научных работников соответствующих специальностей.
