ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 621.372.8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛУЧЕЙ В ПЛАВНОНЕРЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А. И. Нейштадт

Описан метод расчета распространения лучей в плоском плавнонерегулярном волноводе, основанный на классической теории возмущений гамильтоновых систем С помощью этого метода рассмотрена задача о лучах в плавном переходе между регулярными волноводами.

Распространение лучей в плоском плавнонерегулярном волноводе может быть описано гамильтоновой системой, гамильтониан которой плавно зависит от играющей роль времени продольной координаты. Для приближенного интегрирования таких систем в классической механике имеется специальный аппарат — теория возмущений в переменных действие — угол [1, 2]. В работе описывается этот аппарат и результаты, к которым он приводит в задаче о плавном переходе между регулярными волноводами. Рассматриваются рефракционные волноводы и волноводы с отражающими стенками.

Распространение лучей в плавнонерегулярных волноводах рассматривалось в ряде работ, начиная с [3, 4], результаты изложены в [5], где приведены и нужные ссылки. Асимптотические методы, с помощью которых рассматривались рефракционные волноводы и волноводы с отражающими стенками, совершенно различны. Эти методы громоздки, так как не используют явно гамильтоновой формы уравнений. В них отсутствуют общие формулы для высших приближений.

Основные достоинства излагаемого ниже метода — простота, единообразие в рассмотрении рефракционных волноводов и волноводов с отражающими стенками, удобство в вычислении высших приближений.

1. Гамильтониан исходной задачи. Будем рассматривать плоские плавнонерегулярные волноводы, определяемые следующим образом.

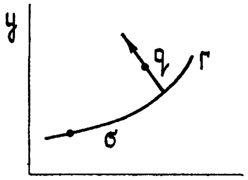

Рис 1.

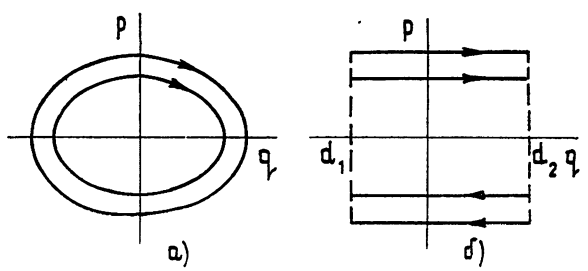

Рис 2.

Пусть на плоскости с декартовыми координатами (x, y) задана кривая Г — ось волновода. Введем в окрестности Г криволинейные координаты (σ, q): σ — длина дуги Г от фиксированной точки O до основания перпендикуляра, опущенного на Г из точки (x, y), q — длина этого перпендикуляра (со знаком, рис. 1).

Рефракционный волновод с осью Г называют плавнонерегулярным, если вдоль Г плавно меняются угол ϑ между касательной к Г и осью x и коэффициент преломления среды n: $\vartheta=\vartheta(\varepsilon\sigma)$, $n=n(q, \varepsilon\sigma)$, где ε — малый положительный параметр. В координатах (σ, q) распространение лучей описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$\Phi = p^2 + (1-\varepsilon q \vartheta'(\varepsilon\sigma))^{-2}\eta^2 - n^2(q, \varepsilon\sigma),$$

где η и p — импульсы, сопряженные σ и q, штрих обозначает производную по $\xi = \varepsilon\sigma$, решения этой системы надо рассматривать на уровне энергии $\Phi=0$. Независимая переменная, параметризующая лучи («время»), не входит в гамильтониан. Введем продольную координату σ в качестве новой независимой переменной («нового времени»). Тогда изменение p, q будет описываться гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$\mathsf{H} = -\sqrt{n^2(q, \xi) - p^2} + \varepsilon q \vartheta'(\xi)\sqrt{n^2(q, \xi) - p^2} \quad (\xi = \varepsilon\sigma), \tag{1.1}$$

зависящим от «медленного времени» ξ*.

Плавнонерегулярный волновод с отражающими стенками определяется аналогично. Пусть стенки имеют в тех же координатах уравнения $q = d_1(\xi)$ и $q = d_2(\xi)$, $d_1 < d_2$. Распространение лучей описывается системой с гамильтонианом (1.1), в котором $n = 1$ внутри волновода:

$$\mathsf{H} = -\sqrt{1-p^2} + \varepsilon q \vartheta'(\xi)\sqrt{1-p^2}, \tag{1.2}$$

а от стенок происходит отражение.

2. Переход к переменным действие — угол [1]. Для применения процедуры теории возмущений, описанной ниже в п. 3, необходимо перейти от переменных (p, q) к переменным действие — угол невозмущенной системы**. Проведем этот переход сначала для гамильтониана (1.1). Невозмущенной будем называть систему с гамильтонианом $\mathsf{H}_0 = -\sqrt{n^2(q, \xi) - p^2}$, в котором ξ — параметр, не меняющийся со временем. В волноводных задачах на фазовом портрете невозмущенной системы при каждом ξ есть область, заполненная замкнутыми траекториями (рис. 2а). Движение фазовой точки по замкнутой траектории описывает колебания луча около оси регулярного волновода сравнения, в котором n и ϑ не зависят от σ***.

Введем переменные действие — угол невозмущенной задачи I, φ [1]. Зафиксируем значение ξ. Действие $I = I(p, q, \xi)$ — это поделенная на 2π площадь, ограниченная невозмущенной траекторией, проходящей через точку (q, p). Угол $\varphi = \varphi(p, q, \xi) \operatorname{modd} 2\pi$ — это угловая координата вдоль невозмущенных траекторий: $\varphi(p, q, \xi) = 2\pi t(p, q, \xi)/T(p, q, \xi)$, где $T(p, q, \xi)$ — период движения вдоль невозмущенной траектории, проходящей через точку (q, p), $t(p, q, \xi)$ — время движения вдоль этой траектории от левой из точек пересечения траектории с осью $p = 0$ до точки (q, p). Можно разрешить эти формулы относительно p и q:

$$p = P(I, \varphi, \xi), \quad q = Q(I, \varphi, \xi). \tag{2.1}$$

Здесь I задает траекторию невозмущенной задачи, φ — точку на этой траектории, правые части 2π — периодичны по φ. Сделаем замену по формулам (2.1) в исходной системе (1.1), где ξ уже меняется. Следуя [1], получим, что изменение I, φ описывается системой с гамильтонианом

---

* Согласно известному рецепту аналитической механики [1], $\mathsf{H} \equiv -\eta$, где η определяется из соотношения $\Phi = 0$

** Для волноводных задач эти переменные использовались в [6]

*** Невозмущенная система — математический эквивалент физического представления о волноводе сравнения.

$$H(I, \varphi, \xi) = H_0(I, \xi) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \xi), \tag{2.2}$$

где H_0 — это невозмущенный гамильтониан H_0 (первое слагаемое в (1.1)), выраженный через I, ξ, а H_1 имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{\partial H_0^2/\partial I}\left[-\int_0^{\varphi}\frac{\partial n^2}{\partial\xi}d\varphi + \frac{\varphi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial n^2}{\partial\xi}d\varphi\right] - \\ -Q(I, \varphi, \xi)\vartheta'(\xi)H_0(I, \xi). \tag{2.3}$$

(Сначала надо продифференцировать $n^2(q, \xi)$ по ξ, а затем подставить $q = Q(I, \varphi, \xi)$ из (2.1) и проинтегрировать по φ.)

Пример 1. Рассмотрим рефракционный волновод с плавно изменяющимся наклоном оси и квадратичным показателем преломления:

$$n^2(q, \xi) = a^2(\xi) - b^2(\xi)(q - c(\xi))^2.$$

Переменные I, φ задаются соотношениями [1]

$$p = \sqrt{2Ib}\sin\varphi, \quad q = c - \sqrt{2I/b}\cos\varphi. \tag{2.4}$$

Из (1.1), (2.4) получим

$$H_0 = -\sqrt{a^2 - 2Ib},$$

$$H_1 = -[c'\sqrt{2Ib}\sin\varphi + Ib'/(2b)\sin 2\varphi] + \\ + \vartheta'[c - \sqrt{2I/b}\cos\varphi]\sqrt{a^2 - 2Ib}.$$

Для гамильтониана (1.2) переменные действие — угол вводятся по той же схеме. Фазовый портрет невозмущенной системы изображен на рис. 2б. Формулы (2.1) принимают вид

$$p = \frac{\pi I}{(d_2 - d_1)}\operatorname{sgn}\sin\varphi, \quad q = \begin{cases} d_1 + \varphi(d_2 - d_1)/\pi, & 0 \leqslant \varphi < \pi \\ 2d_2 - d_1 - \varphi(d_2 - d_1)/\pi, & \pi \leqslant \varphi < 2\pi \end{cases} \tag{2.5}$$

Гамильтониан снова приводится к виду (2.2), где

$$H_0 = -\sqrt{1 - \pi^2 I^2/(d_2 - d_1)^2},$$

$$H_1 = -\frac{I}{d_2 - d_1}\begin{cases} \varphi(d_2' - d_1') + \pi d_1' & 0 < \varphi < \pi \\ \varphi(d_2' - d_1') - \pi(2d_2' - d_1'), & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} - \vartheta' q H_0. \tag{2.6}$$

Гамильтониан аналитичен по I, а по φ, вообще говоря, имеет разрывы при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Поэтому в правых частях уравнений Гамильтона для I стоят δ-функции, и действие I при переходе через точки $\varphi = 0$, π (т. е. при отражении от стенок) изменяется скачком.

3. Процедура теории возмущений. Все результаты о распространении лучей будут получены в настоящей работе с помощью известной [2] процедуры асимптотического интегрирования системы с гамильтонианом (2.2). Опишем эту процедуру.

Сделаем в системе с гамильтонианом (2.2) каноническую близкую к тождественной замену переменных $I, \varphi \to J, \psi$ с не определенной пока производящей функцией $W = J\varphi + \varepsilon S(J, \varphi, \xi, \varepsilon)$, где S — 2π-периодическая функция φ с нулевым средним. Новые и старые переменные связаны (по определению производящей функции) соотношениями

$$I = J + \varepsilon\,\partial S/\partial\varphi, \quad \psi = \varphi + \varepsilon\,\partial S/\partial J. \tag{3.1}$$

Изменение новых переменных описывается [1] гамильтоновой системой с гамильтонианом $\overline{H} = H + \varepsilon\,\partial S/\partial\,\sigma$:

$$\overline{H} = H_0(J + \varepsilon(\partial S/\partial\varphi),\ \xi) + \varepsilon H_1(J + \varepsilon(\partial S/\partial\varphi),\ \varphi,\ \xi) + \\ + \varepsilon^2(\partial S/\partial\xi), \tag{3.2}$$

в правой части (3.2) надо выразить φ через J, ψ, ξ. Попытаемся определить S так, чтобы новый гамильтониан вообще не зависел от ψ: $\overline{H} = \overline{H}(J,\ \xi,\ \varepsilon)$. Если бы это удалось сделать, то система (2.2) была бы проинтегрирована: согласно уравнениям Гамильтона величина J была бы интегралом задачи.

Будем искать S и H в виде рядов по степеням ε:

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots,\quad \overline{H} = \overline{H_0} + \varepsilon\overline{H_1} + \ldots \tag{3.3}$$

Разлагая правую часть (3.2) в ряд по ε, используя (3.3) и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$\begin{gathered}\overline{H}_0 = H_0,\\ \overline{H}_1 - \frac{\partial H_0}{\partial I}\frac{\partial S_1}{\partial\varphi} = H_1,\\ \overline{H}_2 - \frac{\partial H_0}{\partial I}\frac{\partial S_2}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial I}\frac{\partial S_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial\xi} = G_2 + \frac{\partial S_1}{\partial\xi},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overline{H}_k - \frac{\partial H_0}{\partial I}\frac{\partial S_k}{\partial\varphi} = G_k + \frac{\partial S_{k-1}}{\partial\xi},\end{gathered} \tag{3.4}$$

где функция $G_k = G_k(I,\ \varphi,\ \xi)$ определяется через $\partial S_1/\partial\varphi$, $\partial S_2/\partial\varphi$, ..., $\partial S_{k-1}/\partial\varphi$.

Введем обозначения: для 2π — периодической функции $f(\varphi)$ будем обозначать $\langle f\rangle$ — среднее f по φ; если $\langle f\rangle = 0$, то будем обозначать

$$Lf = -\int_0^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi + c, \tag{3.5}$$

где постоянная c выбрана так, чтобы равнялось нулю среднее Lf по φ. Поскольку $\overline{H}_k$ не зависят от φ, а S_k имеют нулевое среднее по φ, из (3.4) следует:

$$\begin{gathered}\overline{H}_1 = \langle H_1\rangle,\quad S_1 = (\partial H_0/\partial I)^{-1} L(H_1 - \overline{H}_1),\\ \overline{H}_k = \langle G_k\rangle,\quad S_k = (\partial H_0/\partial I)^{-1} L(G_k - \overline{H}_k + (\partial S_{k-1}/\partial\xi)),\\ k = 2,\ 3,\ \ldots\end{gathered} \tag{3.6}$$

Если H_1 имеет конечную гладкость по ξ, то, как видно из (3.6), процедура определения $\overline{H}_k$, S_k обрывается после конечного числа шагов. Если H_1 бесконечно дифференцируема или аналитична по ξ, то можно определить все $\overline{H}_k$, S_k. Но и в этом случае ряд (3.3) для S, вообще говоря, расходится, так что точно проинтегрировать рассматриваемую систему не удается.

Оборвем процедуру определения S, H на $\overline{k\text{-м}}$ шаге и рассмотрим замену переменных $(I, \varphi) \to (J, \psi)$ с производящей функцией $W = J\varphi + \varepsilon S(J, \varphi, \xi, \varepsilon)$, $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} S_k$. Тогда новый гамильтониан $\overline{H}$ будет иметь вид

$$\begin{gathered} \overline{H}(J, \psi, \xi, \varepsilon) = \overline{H}_\Sigma(J, \xi, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}), \\ H_\Sigma = H_0 + \varepsilon \overline{H}_1 + \ldots + \varepsilon^k H_k. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Отбрасывая последний член в (3.7), получим интегрируемую систему, в которой

$$J = \text{const}, \quad \psi = \psi_0 + \varepsilon^{-1} \int\limits_0^\xi \frac{\partial \overline{H}_\Sigma(J, \lambda, \varepsilon)}{\partial J}\, d\lambda. \tag{3.8}$$

Рассматривая поправки к формулам (3.8), которые дает следующее приближение процедуры (3.6), видим, что эти формулы описывают поведение J с точностью $O(\varepsilon^{k+1})$, а ψ — с точностью $O(\varepsilon^k)$ при изменении $\xi \sim 1$. Из соотношений (3.1) определяется с той же точностью поведение I, φ, а из формул (2.1) — лучи. Таким образом, решения исходной системы можно определить с любой степенной по ε точностью. Формулы (3.8) при $k = 0$ (т. е. $J = I$, $\psi = \varphi$) называются адиабатическим приближением.

В процедуре (3.6) нигде не приходится дифференцировать H_1 по φ. Поэтому она применима и для разрывного гамильтониана (2.6).

В дальнейшем будем обозначать $\tilde{H}_1 = H_1 - \overline{H}_1$, $H_{01} = H_0 + \varepsilon \overline{H}_1$.

4. Постановка задачи о распространении лучей через плавный переход между регулярными волноводами. Пусть рассматриваемый волновод регулярен (т. е. его параметры не зависят от ξ) при $\xi < \xi_-$ и $\xi > \xi_+$, $\xi_\pm$ — постоянные. Будем предполагать, что параметры волновода (ϑ и n в (1.1) либо $d_{1,2}$ в (1.2)) аналитичны по ξ при $\xi_- < \xi < \xi_+$, а при $\xi = \xi_\pm$ непрерывны вместе с несколькими производными. Пусть теперь в левой регулярной части волновода ($\xi < \xi_-$) распространяется семейство лучей, получаемое сдвигом вдоль оси волновода из одного луча. Требуется (см., например, [5]) описать распространение этого семейства в переходе и в правом регулярном волноводе.

Каждый луч в сечении $\xi = \text{const}$ можно охарактеризовать точкой на плоскости (q, p). Значение q задает точку выхода луча, значение p — его направление. В любом сечении $\xi = \text{const}$ при $\xi < \xi_-$ рассматриваемому семейству лучей соответствует замкнутая фазовая кривая невозмущенного гамильтониана (рис. 3а, рисунки приводятся для рефракционного волновода). Задача сводится к описанию эволюции этой кривой с изменением ξ при $\xi > \xi_-$.

Удобно проводить вычисления в переменных I, φ. Уравнение исходной кривой $I = I_- = \text{const}$. Пока $\xi \leqslant \xi_-$, эта кривая переходит при изменении ξ в себя. При любом $\xi \in (\xi_-, \xi_+)$ из исходной кривой получается замкнутая кривая, вдоль которой I испытывает колебания порядка ε (рис. 3б). При $\xi = \xi_+$ также получается некоторая замкнутая кривая (рис. 3в). Как будет показано ниже, вдоль этой кривой колебания I могут быть много меньше ε, амплитуда колебаний зависит от гладкости перехода в точках $\xi_\pm$. При дальнейшем изменении ξ каждая точка на рис. 3в будет двигаться по своей траектории невозмущенной системы. Если система нелинейна, то периоды движения по разным траекториям различны и при $\xi \to +\infty$ образ исходной кривой будет стремиться заполнить всюду плотно кольцо на рис. 3в.

Аналогичная картина получается в случае бесконечно длинного перехода, когда $\xi_\pm = \pm\infty$, а параметры волновода на бесконечности стабилизируются (при $\xi \to \pm\infty$ функции $\vartheta'(\xi)$ и $n'(q, \xi)$ либо $d'_{1,2}(\xi)$ стремятся к нулю, а интегралы от них сходятся). Здесь надо рассматривать предельное поведение лучей при $\xi \to \pm\infty$.

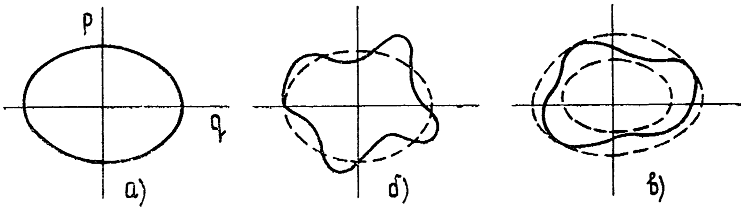

Рис. 3.

Ниже, в пп. 5—7, рассмотрены два вопроса: определение в главном приближении конгруэнции лучей на переходе, т. е. формы кривой на рис. 3б, и вычисление (или оценка) раскачки действия за переходом, т. е. границ кольца на рис. 3в.

5. Конгруэнция лучей на переходе. Пусть параметры волновода — гладкие функции ξ. Покажем, что конгруэнция лучей на переходе задается формулой

$$I = I_- - \varepsilon \tilde{H}_1(I_-, \varphi, \xi)\,[\partial H_0(I_-, \xi)/\partial I]^{-1} + O(\varepsilon^2), \qquad \tilde{H}_1 = H_1 - \overline{H}_1. \tag{5.1}$$

Эта же формула справедлива и для бесконечно длинного перехода. Если параметры волновода непрерывны, но не являются гладкими при $\xi = \xi_-$, то конгруэнция описывается более сложной формулой, приведенной в следующем пункте.

Оборвем процедуру п. 3 на первом шаге. Новая переменная J определяется из соотношения

$$I = J - \varepsilon \tilde{H}_1(J, \varphi, \xi)\,[\partial H_0(J, \xi)/\partial J]^{-1}. \tag{5.2}$$

При $\xi = \xi_-$ для всех лучей нашего семейства $J = I = I_-$, так как для гладкого перехода $H_1(I, \varphi, \xi_-) = 0$. Вдоль луча J испытывает лишь колебания $O(\varepsilon^2)$. Подставляя в (5.2) $J = I_- + O(\varepsilon^2)$, получим (5.1).

Пример 2. Рассмотрим рефракционный волновод примера 1 п. 2. Из (5.2) получим уравнение конгруэнции на переходе

$$I = I_- + \varepsilon\{\sqrt{a^2 - 2I_- b}\,[c'\sqrt{2I_-/b}\sin\varphi + I_- b'/(2b^2)\sin 2\varphi] + \vartheta'(a^2 - 2I_- b)\sqrt{2I_-/b}^{\,3}\cos\varphi\} + O(\varepsilon^2).$$

Подставив это соотношение в (2.4), получим параметрическое представление конгруэнции в переменных q, p [4].

Пример 3. Рассмотрим волновод с отражающими стенками. Из (2.6), (5.1) получим уравнение конгруэнции на переходе

$$I = I_- + \varepsilon\sqrt{1 - \frac{\pi^2 I_-^2}{(d_2 - d_1)^2}}\,\frac{d_2 - d_1}{\pi^2}\begin{cases}\varphi(d_2' - d_1') + \pi d_1', & 0 < \varphi < \pi\\ \varphi(d_2' - d_1') - \pi(2d_2' - d_1'), & \pi < \varphi < 2\pi\end{cases} -$$

$$- \varepsilon\vartheta'\frac{(d_2 - d_1)^3}{\pi^2 I_-}\left(1 - \frac{\pi^2 I_-^2}{(d_2 - d_1)^2}\right)\begin{cases}-1/2 + \varphi/\pi, & 0 < \varphi < \pi\\ 3/2 - \varphi/\pi, & \pi < \varphi < 2\pi\end{cases} + O(\varepsilon^2).$$

Подставив это соотношение в (2.5), получим параметрическое представление конгруэнции в переменных q, p. Угол γ между направлением луча и осью волновода вычисляется по формуле $\sin\gamma = \pi I/(d_2 - d_1)$. Для прямолинейного симметричного волновода ($\vartheta' = 0$, $d_2 = -d_1 = d(\xi)$) имеем

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{d(\xi_-)}{d(\xi)}\sin\gamma_-\right) + \varepsilon d'(\xi)\begin{Bmatrix} 2\varphi/\pi - 1, & 0 < \varphi < \pi \\ 2\varphi/\pi - 3, & \pi < \varphi < 2\pi \end{Bmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

$$\sin\gamma_- = \pi I_-/(2d(\xi_-)).$$

При $\varphi = +0$, $\pi + 0$ получаем отсюда известные [3] формулы для направления луча, отражающегося от стенки.

6. Раскачка действия I за переходом конечной гладкости. Пусть в точках $\xi_\pm$ $m-1$ производных от параметров волновода по ξ непрерывна, а m-я производная терпит разрывы, $m \geqslant 1$. Обозначим

$$R(I, \varphi, \xi) = -\frac{1}{(\partial H_0(I, \xi)/\partial I)^m}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}} L^{m-1}\tilde{H}_1(I, \varphi, \xi),$$

$$g_0(\xi) = \int_{\xi_-}^{\xi}\frac{\partial H_{01}(I_-, \lambda)}{\partial I}d\lambda, \quad g_1(\varphi, \xi) = \frac{\tilde{H}_1(I_-, \varphi, \xi_-)}{\partial H_0(I_-, \xi_-)/\partial I}\times$$
$$\times\int_{\xi_-}^{\xi}\frac{\partial^2 H_0(I_-, \lambda)}{\partial I^2}d\lambda, \tag{6.1}$$

$$F(\varphi_-) = R(I_-, \varphi_- + \varepsilon^{-1}g_0(\xi_+) + g_1(\varphi_-, \xi_+), \xi_+ - 0) -$$
$$-R(I_-, \varphi_-, \xi_- + 0),$$

где L — оператор (3.5). Покажем, что конгруэнция лучей при $\xi = \xi_+$ имеет параметрическое представление

$$I = I_- + \varepsilon^m F(\varphi_-) + O(\varepsilon^{m+1}), \quad \varphi = \varphi_- + \varepsilon^{-1}g_0(\xi_+) +$$
$$+ g_1(\varphi_-, \xi_+) + O(\varepsilon). \tag{6.2}$$

Тогда раскачка I за переходом определяется формулой

$$\varepsilon^m\inf_{\varphi_-}F(\varphi_-) + O(\varepsilon^{m+1}) \leqslant I - I_- \leqslant \varepsilon^m\sup_{\varphi_-}F(\varphi_-) + O(\varepsilon^{m+1}).$$

Оборвем процедуру п. 3 на m-м шаге. Новая переменная J определяется из соотношения

$$I = J + \varepsilon\,\partial S(J, \varphi, \xi)/\partial\varphi, \quad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots + \varepsilon^{m-1}S_m.$$

Анализ процедуры п. 3 показывает, что $S_i(I, \varphi, \xi_\pm) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $\partial S_m(I, \varphi, \xi_\pm \mp 0)/\partial\varphi = R(I, \varphi, \xi_\pm \mp 0)$. Вдоль луча при $\xi_- < \xi < \xi_+$ величина J испытывает лишь колебания $O(\varepsilon^{m+1})$. Поэтому для решения $I(\xi)$, $\varphi(\xi)$ с начальным условием $I(\xi_-) = I_-$, $\varphi(\xi_-) = \varphi_-$ получим

$$I(\xi_+) - \varepsilon^m R(I_-, \varphi(\xi_+), \xi_+ - 0) = I_- - \varepsilon^m R(I_-, \varphi_-, \xi_- + 0) + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{6.3}$$

Для $\varphi(\xi_+)$ из первого приближения процедуры п. 3 получим $\varphi(\xi_+) = \varphi_- + \varepsilon^{-1}g_0(\xi_+) + g_1(\varphi_-, \xi_+) + O(\varepsilon)$. Подставляя эту формулу в (6.3), получим (6.2).

Замечания. 1) Случаи $m=1$ и $m \geqslant 2$ существенно различны. При $m \geqslant 2$ будет $H_1(I, \varphi, \xi_-)=0$ и, следовательно, $g_1 \equiv 0$. Поэтому при $m \geqslant 2$ в (6.2) $\varphi=\varphi_-+\mathrm{const}+O(\varepsilon)$ и конгруэнцию можно параметризовать углом φ. Отсюда легко вывести, что при $\xi=\xi_+$ в каждую некаустическую точку приходят либо два луча (один сверху, один снизу), либо ни одного, как и до перехода. При $m=1$ значение φ в (6.2) не является, вообще говоря, монотонной функцией φ_- и при $\xi=\xi_+$ в одну точку по близким направлениям могут приходить несколько лучей.

2) Для $m=1$ конгруэнция лучей на переходе, при $\xi \in (\xi_-, \xi_+)$, задается формулой (6.2) с заменой ξ_+ на ξ.

3) Формулу для $F(\varphi_-)$ можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^m F(\varphi_-) = -\int\limits_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{\partial H_1(I_-, \varphi_*(\xi), \xi)}{\partial \varphi}\, d\xi + O(\varepsilon^{m+1}), \\
\varphi_*(\xi) = \varphi_- + \varepsilon^{-1} g_0(\xi) + g_1(\varphi_-, \xi),
\end{gathered} \tag{6.4}
$$

так как асимптотика при $\varepsilon \to 0$ интеграла в (6.4) дается формулой (6.1).

4) Для конгруэнций за кусочно-аналитическими переходами, в которых волновод при $\xi_- \leqslant \xi \leqslant \xi_+$ состоит из нескольких аналитических по ξ частей, непрерывно вместе с $m-1$ производными сопрягающихся друг с другом, остается справедливой формула (6.2), где $\varepsilon^m F(\varphi_-)$ вычисляется согласно (6.4).

7. О раскачке действия за бесконечно длинным аналитическим переходом. Рассмотрим бесконечно длинный аналитический переход. Пусть $I_\pm$ — предельные значения действия вдоль некоторого луча на концах перехода, $\Delta I = I_+ - I_-$. Процедура п. 3 позволяет для любого $m > 0$ ввести переменную J, которая испытывает вдоль луча лишь колебания $O(\varepsilon^m)$, а на концах перехода $J \to I$. Поэтому $\Delta I = O(\varepsilon^m)$, т. е. ΔI убывает при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени ε. Этот факт был обнаружен в [7]. В действительности, для рассматриваемого перехода раскачка ΔI экспоненциально мала и известна оценка показателя экспоненты:

$$
\begin{gathered}
|\Delta I| < A(\varepsilon)\exp(-B/\varepsilon), \\
B = \min_{\xi_*} \left|\operatorname{Im} \int\limits_0^{\xi_*} \frac{\partial H_0(I_-, \xi)}{\partial I}\, d\xi\right|, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} A(\varepsilon)\exp(-\delta/\varepsilon) = 0,
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

где минимум берется по всем особым точкам ξ_* функций $H_1^{(n)}(I_-, \xi)$, $n \geqslant 0$, — коэффициентов Фурье $H_1(I_-, \varphi, \xi)$ и функций $H_0(I_-, \xi)$, $(\partial H_0(I_-, \xi)/\partial I)^{-1}$ в плоскости комплексной переменной ξ, а $\delta > 0$ — произвольная постоянная. Это утверждение высказывалось в ряде работ (см. обзор [8]), доказательство дано в [9]. (Приложение к [9], в котором доказывается (7.1), содержит неточности, но основной текст дает независимое доказательство этой оценки.)

Для асимптотики раскачки за аналитическими переходами отсутствует общая формула, аналогичная формуле п. 6. В случае линейных гамильтоновых систем такая асимптотика вычислена в [10]. Для одного важного класса нелинейных систем асимптотика найдена в [9], а метод [9] позволяет вычислять асимптотику и в ряде других случаев.

В [5, 11–14] рассматриваются формулы для раскачки, основанные на асимптотическом интегрировании уравнений метода поперечных сечений для поля в плавнонерегулярном волноводе. Численные расчеты лучей [5, 11, 12] показывают, что для ряда примеров эти формулы дают правильный показатель экспоненты и численно близкий к правильному предэкспоненциальный множитель. Другие формулы предложены в [15–17], они оказываются грубее, причины их погрешности рассмотрены в [11, 12]. В [5, 11, 12] приведены результаты сравнения различных оценок раскачки с численными расчетами лучей для ряда значений ε.

Автор благодарит В. И. Арнольда за предложенную тему, В. А. Боровикова за внимание к работе, полезное обсуждение и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973.
2. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Т. 2. В кн.: А. Пуанкаре. Избранные труды. — М.: Наука, 1971. — Т. 1.
3. Кинбер Б. Е., Мальцев Н. Е., Токатлы В. И. — Радиотехника и электроника, 1970, **15**, № 12, с. 2512.
4. Тинин М. В. — В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — М.: Наука, 1976, **39**.
5. Боровиков В. А., Попов А. В. — В сб.: Прямые и обратные задачи теории дифракции. — М.: ИРЭ АН СССР, 1979.
6. Шатров А. Д. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 8, с. 1153.
7. Lenard A. — Ann. Phys., 1959, **6**, № 3, p. 261.
8. Дыхне А. М., Покровский В. Л. — Изв. СО АН СССР, 1962, **10**, с 38.
9. Слуцкин А. А. — ЖЭТФ, 1963, **45**, вып. 4, с. 978.
10. Дыхне А. М. — ЖЭТФ, 1960, **38**, вып. 2, с. 570.
11. Боровиков В. А. Препринт ИПМ АН СССР № 99, М., 1978.
12. Боровиков В. А., Владимиров Ю. В. — Акуст. журн., 1981, **27**, № 1, с. 56.
13. Боровиков В. А. — В сб.: Доклады на IX Всесоюзной акустической конференции. Секция А. — М.: АН СССР, 1977.
14. Боровиков В. А. — Радиотехника и электроника, 1978, **23**, № 7, с. 1365.
15. Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А — Радиотехника и электроника, 1977, **22**, № 12, с. 2470.
16. Кинбер Б. Е., Комиссарова Н. Н., Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 4, с. 414
17. Кинбер Б. Е., Кравцов Ю А., Салганик М. П. — Радиотехника и электроника, 1979, **24**, № 9, с. 1721.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт медицинского приборостроения

Поступила в редакцию
4 августа 1980 г.,
после сокращения
20 мая 1981 г.

PROPAGATION OF RAYS IN SMOOTHLY UNREGULAR WAVEGUIDES AND THE THEORY OF DISTURBANCES OF HAMILTONIAN SYSTEMS

A. I. Neishtadt

Based on the classical theory of disturbances of Hamiltonian systems a method is described for the calculation of the ray propagation in a plane smoothly unregular waveguide. Using this method a problem is considered on rays in the smooth transition between regular waveguides.