

УДК 535.312

## ПРЕДЕЛ НИЗКОЙ ПЛОТНОСТИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН

*Ю. Н. Барабаненков, В. Д. Озрин*

Исходя из уравнений нестационарной геометрической оптики, рассмотрено многократное рассеяние волнового пакета в дискретной рассеивающей среде. Показано, что при низкой плотности рассеивателей функция распределения вероятностей фазовых переменных луча асимптотически точно удовлетворяет нестационарному уравнению переноса излучения, которое для оптически мягких и оптически жестких рассеивателей переходит в диффузионное уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка и в уравнение переноса с изотропным коэффициентом рассеяния.

Приближение геометрической оптики широко используется для решения задач о прохождении монохроматических волн через непрерывные случайно-неоднородные среды с крупномасштабными по сравнению с длиной волны неоднородностями [1]. Существует большое число работ, о которых говорится, например, в [2, 3], где для решения таких задач применяется аппарат диффузионного уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка (ЭФП), составленного, исходя из уравнений стационарной геометрической оптики. В настоящее время применимость этого диффузионного уравнения обоснована только в малоугловом приближении [4]. Трудность выхода за пределы малоуглового приближения связана [3] с дифференцированием по длине отрезка траектории луча в уравнениях стационарной геометрической оптики. В [2] эта трудность обходится путем обращения к постановке нестационарной задачи о диффузии волновых пакетов в случайной среде, причем за исходные принимаются уравнения нестационарной геометрической оптики [5, 6]. Авторы [2] сделали попытку обосновать применимость полученного ими нестационарного диффузионного уравнения ЭФП за пределами справедливости малоуглового приближения с помощью теории возмущений, близкой к локальному методу [7].

В данной работе рассматривается нестационарная задача о многократном рассеянии волнового пакета в дискретной случайно-неоднородной среде. За исходное принимается стохастическое уравнение Лиувилля [3], записанное, исходя из уравнений нестационарной геометрической оптики [5, 6]. Среда предполагается состоящей из сферически симметричных рассеивателей, постоянных во времени и случайно расположенных в пространстве. Каждый рассеиватель имеет неоднородный показатель преломления, отличный внутри сферы радиуса  $a$  от показателя преломления в однородной среде, представляя собой рассеивающую сферическую линзу. При этом угол рассеяния луча на изолированном рассеивателе может принимать любые значения. Главной целью работы является доказательство того, что при сделанных предположениях в пределе низкой плотности  $\rho$  центров рассеивателей,  $\rho a^3 \ll 1$ , функция распределения вероятностей фазовых переменных луча удовлетворяет нестационарному уравнению переноса излучения [8], которое является асимптотически точным в рамках применимости исходного уравнения Лиувилля.

## 1. УТОЧНЕНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Обозначим через  $x = (\mathbf{r}, \mathbf{k})$  фазовые переменные луча: координаты  $\mathbf{r}$  и локальный волновой вектор  $\mathbf{k}$ . Система величин, состоящая из фазовых переменных  $x$  луча, координат центров  $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$  рассеивателей и числа  $N$  рассеивателей, описывается совместной функцией распределения  $F_N(x, t; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N)$ . Функция распределения  $f_i(x, t; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_i)$  переменных луча и центров каких-либо  $i$  рассеивателей определяется как [9]

$$f_i(x, t; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_i) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d\mathbf{R}_{1+l} \dots d\mathbf{R}_{i+l} F_{i+l}(x, t; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_{i+l}). \quad (1)$$

Случай  $i=0$  отвечает интересующей нас функции распределения  $f(x, t)$  переменных луча.

Стохастическое уравнение Лиувилля в приближении нестационарной геометрической оптики [5, 6] имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega_N}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \omega_N}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) F_N = 0 \quad (2)$$

и решается с заданным начальным условием  $F_{N0}(x; \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N)$ . Величина  $\omega_N(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  представляет собой локальную частоту в присутствии  $N$  рассеивателей:

$$\omega_N(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \bar{\omega}(\mathbf{k}) + \sum_{j=1}^N \Omega(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_j|, \mathbf{k}). \quad (3)$$

Частота волны  $\bar{\omega}(\mathbf{k})$  в однородной среде с показателем преломления  $\bar{n}(\omega)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению  $ck = \omega n(\omega)$ , где  $c$  — фазовая скорость волн в вакууме. Неоднородный показатель преломления  $n(r, \omega)$  рассеивателя задается соотношением

$$\begin{aligned} n^2(r, \omega)/\bar{n}^2(\omega) &= 1 - \mu(r/a, \omega), \\ \partial \mu(\xi, \omega)/\partial \xi &\leq 0, \quad \mu(\xi, \omega) = 0, \quad \xi \geq 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция  $\Omega(r, k)$  в правой части (3) определяется равенствами

$$\Omega(r, k) = \omega(r, k) - \bar{\omega}(k), \quad ck = \omega n(r, \omega). \quad (5)$$

Согласно (4) и уравнениям нестационарной геометрической оптики каждый рассеиватель рассеивает лучи подобно тому, как в классической механике [10] отталкивающий потенциал рассеивает точечные частицы. При этом величина  $\mu(r/a, \omega)$  играет роль отношения потенциальной энергии рассеивающего центра к кинетической энергии падающей частицы. Условиям (3) — (5) удовлетворяет, например, холодная плазма в виде случайно расположенных электронных сгустков с функцией

$$\mu(r/a, \omega) = (4\pi e^2/\bar{n}^2 m \omega^2) \Delta\rho(r/a), \quad (6)$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $\Delta\rho(r/a)$  — отклонение электронной концентрации в сгустке от ее значения в однородной плазме.

## 2. РЯД ПО СТЕПЕНЯМ ПЛОТНОСТИ

Пусть  $G_{1\dots N}^{(N)}(x, x'; t)$  представляет собой запаздывающую функцию Грина уравнения Лиувилля (2), (3), зависящую от координат центров  $N$  рассеивателей. Она определяется уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_g \frac{\partial}{\partial r} - \sum_{j=1}^N \hat{V}_j \right) G_{1\dots N}^{(N)}(x, x', t) = 0, \quad (7)$$

$$G_{1\dots N}^{(N)}(x, x', 0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Здесь  $c_g = \bar{\omega}/\bar{k}$  — вектор групповой скорости волн в однородной среде,  $\hat{V}_j$  — оператор взаимодействия луча с  $j$ -м рассеивателем. Вид этого оператора с ядром  $V_j(x, x')$  легко восстанавливается на основании (2), (3). В дальнейшем нам удобно считать взаимодействие формально зависящим от времени, записывая

$$\hat{V}_j(t) = \hat{V}_j \delta(t - 0), \quad V_j(x, x', t) = V_j(x, x') \delta(t - 0). \quad (8)$$

Оператор Грина  $\hat{G}_{1\dots N}^{(N)}(t)$ , ядро которого определяется дифференциальным уравнением (7), подчиняется также любому из следующих интегральных уравнений:

$$\hat{G}_{1\dots N}^{(N)}(t) = \hat{G}_{1\dots i}^{(i)}(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \hat{G}_{1\dots i}^{(i)}(t - \tau) \sum_{j=i+1}^N \hat{V}_j(\tau - \tau') \hat{G}_{1\dots N}^{(N)}(\tau'), \quad 0 \leq i \leq N - 1. \quad (9)$$

При  $i = 0$  в правой части (9) выступает оператор Грина  $\hat{G}^{(0)}(t)$  свободного распространения луча в однородной среде с ядром

$$G^{(0)}(x, x', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - c_g t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (10)$$

С помощью уравнений (9), определений (7) и (1), путем несложных преобразований получаем ряд для функции распределения переменных луча

$$f(x, t) = \hat{G}^{(0)}(t)f_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(x, t); \quad (11)$$

$$f^{(i)}(x, t) = \int dR_1 \dots dR_i \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau'_1 \dots \int_0^{\tau_{i-1}} d\tau_i \int_0^{\tau_i} d\tau'_i \times \quad (12)$$

$$\times \hat{G}^{(0)}(t - \tau_1) \hat{V}_1(\tau_1 - \tau'_1) \hat{G}_1^{(1)}(\tau'_1 - \tau_2) \dots \hat{V}_i(\tau_i - \tau'_i) \hat{G}_{1\dots i}^{(i)}(\tau'_i) \times \\ \times f_{0i}(x; R_1 \dots R_i).$$

Здесь нижний индекс нуль у функций распределения относится к начальному моменту времени.

Будем считать, что в пределе низкой плотности центров рассеивателей  $\rho a^3 \ll 1$  главная асимптотика начальных функций распределения вида (1) отвечает модели статистически независимых однородно распределенных рассеивателей, расположение которых не влияет на переменные луча,

$$f_{0i}(x; R_1 \dots R_i) = \rho^i f_0(x) [1 + O(\rho a^3)]. \quad (13)$$

Это означает, что ряд (11), (12) представляет собой разложение по степеням плотности  $\rho$  центров рассеивателей.

### 3. ОПЕРАТОР СТОЛКНОВЕНИЯ

Оператор  $\hat{V}_j(t)$  описывает локальное взаимодействие луча с рассеивателем. Изменение траектории луча при его рассеянии на  $j$ -м рассеивателе характеризуется оператором столкновения  $\hat{T}_j(t)$ , который уже тесно связан с сечением рассеяния.

Оператор столкновения вводится уравнением

$$\hat{T}_j(t) = \hat{V}_j(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \hat{V}_j(t-\tau) \hat{G}^{(0)}(\tau-\tau') \hat{T}_j(\tau'). \quad (14)$$

Путем сравнения (14) с уравнением (9) при  $N = 1$  получается соотношение

$$\hat{T}_j(t) = \hat{V}_j(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \hat{V}_j(t-\tau) \hat{G}_j^{(1)}(\tau-\tau') \hat{V}_j(\tau'). \quad (15)$$

Из него следует, что ядро  $T_j(r, k; r', k'; t)$  оператора столкновения сосредоточено по  $r, r'$  внутри области рассеивателя. Аргумент  $t$  этого ядра равен времени движения волнового пакета по траектории луча, выходящей из точки  $r'$  с волновым вектором  $k'$  и приходящей в  $r$  с волновым вектором  $k$ .

Траектория луча при его рассеянии на изолированном рассеивателе может быть задана прицельным параметром  $r_\perp$  и углом рассеяния  $\chi$ . Дифференциальное сечение  $\sigma(s, s')$  рассеяния луча определяется, как и в классической механике [10], равенством

$$\sigma(s, s') = (r_\perp(\chi)/\sin \chi) |dr_\perp(\chi)/d\chi|, \quad (16)$$

где  $s$  и  $s'$  — единичные векторы в направлении луча после и до рассеяния. Простое рассмотрение формулы (П.1) из Приложения показывает, что для рассеивателя с показателем преломления (4) отношение  $r_\perp(\chi)/a$  не зависит от радиуса  $a$  рассеивателя. Это означает, что для такого рассеивателя дифференциальное сечение рассеяния пропорционально квадрату радиуса рассеивателя:

$$\sigma(s, s') = a^2 [\sigma(s, s')]_{a=1}. \quad (17)$$

Связь оператора столкновения с сечением рассеяния изолированного рассеивателя выражается соотношением

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \int dr dr' T_j(r, k; r', k'; t) &= L(k, k') = \\ &= c_g k^{-2} \delta(k - k') [\sigma(s, s') - \sigma \delta^{(2)}(s - s')], \\ \sigma &= \int d^2 s' \sigma(s, s'), \quad k = ks, \quad k' = k's', \end{aligned} \quad (18)$$

вывод которого дается в Приложении.

Наряду с операторами Грина  $\hat{G}_{i\dots i}(t)$ , отвечающими распространению луча в присутствии  $i$  рассеивателей, введем видоизмененные операторы Грина  $\hat{G}_{1\dots (j)\dots i}^{(i)}(t)$  посредством системы уравнений

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1\dots (j)\dots i}^{(i)}(t) &= \hat{G}^{(0)}(t) + \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\tau' \sum_{1 < j' < i, j' \neq j} \hat{G}^{(0)}(t-\tau) \hat{T}_{j'}(\tau-\tau') \hat{G}_{1\dots (j')\dots i}^{(i)}(\tau') \\ &\quad (1 \leqslant j \leqslant i). \end{aligned} \quad (19)$$

С помощью решения этой системы уравнений в виде итерационного ряда нетрудно установить характерную особенность ядра  $G_{1\dots(i)\dots i}^{(i)}(x, x', t)$  видоизмененного оператора Грина. Она состоит в том, что луч перед попаданием в точку  $r$  в присутствии рассеивателей  $1, \dots, j, \dots, i$  последний раз сталкивается не с  $j$ -м рассеивателем.

Видоизмененные операторы Грина удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^t d\tau \hat{V}_j(t - \tau) \hat{G}_{1\dots(i)}^{(i)}(\tau) = \int_0^t d\tau \hat{T}_j(t - \tau) \hat{G}_{1\dots(i)\dots i}^{(i)}(\tau) \\ (1 \leqslant j \leqslant i), \quad (20)$$

которые проверяются с помощью (9), (15). Эти соотношения позволяют исключить из членов (12) ряда (11) операторы взаимодействия луча, вводя вместо них операторы столкновения. В результате члены ряда преобразуются к следующему окончательному виду:

$$f^{(i)}(x, t) = \int dR_1 \dots dR_i \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau'_1 \dots \int_0^{\tau_{i-1}} d\tau_i \int_0^{\tau_i} d\tau'_i \hat{G}^{(0)}(t - \tau_1) \times \\ \times \hat{T}_1(\tau_1 - \tau'_1) \hat{G}^{(0)}(\tau'_1 - \tau_2) \hat{T}_2(\tau_2 - \tau'_2) \hat{G}_{1(2)}^{(2)}(\tau'_2 - \tau_3) \times \\ \times \hat{T}_3(\tau_3 - \tau'_3) \dots \hat{T}_i(\tau_i - \tau'_i) G_{1\dots(i)}^{(i)}(\tau'_i) f_{i0}(x; R_1 \dots R_i). \quad (21)$$

Функция (21) явным образом описывает рассеяние луча на  $i$  различных рассеивателях. Повторные же рассеяния луча на каком-либо из этих рассеивателей, вероятность которых в разреженной системе мала, учитываются с помощью видоизмененных операторов Грина.

#### 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Обратимся теперь к отысканию главной асимптотики  $f(x, t)$  в приближении низкой плотности рассеивателей. Для того, чтобы точно сформулировать эту задачу, воспользуемся следующей предельной процедурой\* Больцмана — Грэда [11]:

$$a \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty, a^2 \rho = \text{const}. \quad (22)$$

В задаче, на самом деле, имеется еще один параметр — время наблюдения  $t$ , которое считается ограниченным. Можно предполагать ограниченным «медленное» время  $t/\tau_r$ , где  $\tau_r = 1/\pi c_g \rho a^2$  — время свободного пробега луча.

Рассмотрим поведение оператора столкновения, определенного уравнением (14), в пределе  $a \rightarrow 0$  точечного рассеивателя. Нетрудно сообразить, что в таком пределе ядро этого оператора становится локальным в зависимости от координат и времени, принимая в соответствии с равенством (18) вид

$$T_j(x, x', t) |_{a \rightarrow 0} = \delta(t - 0) \delta(r - r') \delta(r - R_j) L(k, k'). \quad (23)$$

В Приложении показывается, что при условии (4) равенство (23) является асимптотически точным.

---

\* Такую процедуру уместно сравнить с предельным переходом [12] в стохастическом уравнении  $\dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(t)$  к  $\delta$ -коррелированному шуму  $\alpha(t)$ , когда полагают  $t_0 \rightarrow 0$ ,  $\langle \alpha^2 \rangle \rightarrow \infty$ ,  $t_0 \langle \alpha^2 \rangle = \text{const}$ , где  $t_0$  — время корреляций  $\alpha(t)$ .

Произведем в членах (21) ряда (11) предельный переход (22). При этом можно воспользоваться (в силу  $a \rightarrow 0$ ) точечной аппроксимацией (23) для оператора столкновения луча с каждым изолированным рассеивателем и аппроксимацией (13) независимых рассеивателей для начальных функций распределения (в силу  $\rho a^3 \rightarrow 0$ ). Кроме того, на основании уравнений (19), точечной аппроксимации (23) для оператора столкновения и соотношения (17) для сечения рассеяния изолированного рассеивателя, можно (опять-таки в силу  $a \rightarrow 0$ ) заменить в правых частях равенств (21) видоизмененные операторы Грина на оператор Грина свободного распространения луча в однородной среде с ядром (10). После перечисленных аппроксимаций и интегрирования в членах (21) по координатам центров рассеивателей ряд (11) сворачивается в функцию  $f(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющую уравнению переноса вида [8]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_g s \frac{\partial}{\partial r} \right) f(\mathbf{r}, ks; t) = \\ = \rho c_g \int d^2 s' \sigma(s, s') [f(\mathbf{r}, ks'; t) - f(\mathbf{r}, ks; t)]. \quad (24)$$

Предельный переход (22) связан, как легко заметить, с пренебрежением всеми повторными рассеяниями луча на одном и том же рассеивателе.

## 5. ОПТИЧЕСКИ МЯГКИЕ И ЖЕСТКИЕ РАССЕИВАТЕЛИ

В предельных случаях оптически мягких и жестких рассеивателей уравнение переноса (24) упрощается и сводится к такому виду, в котором способы его решения известны.

Оптически мягкий рассеиватель отклоняет луч на малый угол  $\chi$ ,  $|\chi| \ll 1$ , от его направления падения на этот рассеиватель. В таком случае дифференциальное сечение рассеяния луча  $\sigma(s, s')$  является «острой» функцией угла рассеяния  $\chi$ , заметно отличной от нуля лишь в малой окрестности  $\chi = 0$ . Это позволяет разложить выражение в квадратной скобке правой части уравнения переноса (24) в ряд Тейлора по разности  $(s - s')$  единичных векторов. Удобнее предварительно перейти к правой части (24) к интегрированию по трехмерному вектору  $\mathbf{k}' = ks'$  путем введения дополнительного интегрирования по  $k'$  с множителем  $\delta(k - k')$ , а уже потом разлагать упомянутое выражение в квадратной скобке в ряд по  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ . В результате такого разложения уравнение переноса (24) переходит в диффузионное уравнение вида

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c_g \frac{\partial}{\partial r} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = c_g D \Delta_{\theta, \varphi} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t). \quad (25)$$

Здесь  $\Delta_{\theta, \varphi}$  — сферический лапласиан в пространстве волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Через  $D$  обозначен коэффициент диффузии лучей, равный

$$D = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^\pi d\chi \chi^3 \sigma(\chi) = \rho \sigma \langle \chi^2 \rangle / 4, \quad (26)$$

где  $\sigma$  — полное сечение рассеяния луча,  $\langle \chi^2 \rangle$  — средний квадрат угла рассеяния луча на изолированном рассеивателе. Условия, при которых рассеиватель с показателем преломления (4) является оптически мягким, имеют на основании Приложения вид

$$|\mu(\xi, \omega)| \ll 1, \quad a |\partial \mu(r/a, \omega) / \partial r| \ll 1. \quad (27)$$

Они означают, что относительная проницаемость рассеивателя мало отклоняется от единицы и ее изменение на протяжении рассеивателя мало.

Условия (27) совместно с пределом низкой плотности центров рассеивателей обеспечивают применимость диффузионного уравнения (25). Аналогичное нестационарное уравнение ЭФП рассматривалось в [2] для диффузии лучей в непрерывной случайной среде.

Оптически жесткий рассеиватель характеризуется условиями, в значительной степени противоположными (27). Траектория луча почти не входит во внутреннюю область такого рассеивателя. Луч отражается от оптически жесткого рассеивателя примерно как от твердой сферы радиуса  $a$ . Дифференциальное сечение рассеяния (16) становится изотропным:

$$\sigma(s, s') \approx a^2/4. \quad (28)$$

Исследование формулы (П.1) показывает, что для применимости изотропной аппроксимации (28) достаточно потребовать

$$-a[\partial \mu(r/a, \omega)/\partial r]_{r=a} \gg 1. \quad (29)$$

Согласно этому условию относительная проницаемость рассеивателя должна быстро убывать по сравнению с единицей при перемещении внутрь рассеивателя по радиусу от его поверхности. Способы решения уравнения переноса (24) с изотропным рассеянием (28) изложены в [8]. В частности, если в начальный момент распределение  $f_0(x)$  пространственно однородно, то решение уравнения (24) дает

$$\begin{aligned} f(k s, t) &= \bar{f}_0 + \exp(-t/\tau_r) \Delta f_0(k s), \\ \bar{f}_0 &= f_0(k s) - \Delta f_0(k s) = \int \frac{d^2 s'}{4\pi} f_0(k s'). \end{aligned} \quad (30)$$

Отсюда следует, что неизотропная часть  $\Delta f_0$  начального распределения экспоненциально затухает с масштабом, равным времени свободного пробега луча.

## 6. ЧЛЕНЫ С ПОВТОРНЫМ РАССЕЯНИЕМ

Для лучшего понимания физического смысла предельного перехода (22) преобразуем ряд (11), (21) к такому виду, когда появляются явно члены, отвечающие повторным рассеяниям луча на одном и том же рассеивателе. Такое преобразование осуществляется путем решения системы уравнений (19) итерациями и подстановки результата в правую часть (21). Например, первая итерация для  $\hat{G}_{1\dots(i)}^{(i)}(t)$  и нулевое приближение для всех других  $\hat{G}_{1\dots(j)}^{(j)}(t)$ ,  $j < i$ , в правой части (21) дают поправку вида

$$\begin{aligned} \Delta f^{(i)}(x, t) &= \rho^i \int dR_1 \dots dR_i \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau'_1 \dots \int_0^{\tau_{i-1}} d\tau_i \int_0^{\tau_i} d\tau'_i \times \\ &\times \int_0^{\tau'_i} d\tau_{i+1} \int_0^{\tau_{i+1}} d\tau'_{i+1} \hat{G}^{(0)}(t - \tau_1) \hat{T}_1(\tau_1 - \tau'_1) \hat{G}^{(0)}(\tau'_1 - \tau_2) \hat{T}_2(\tau_2 - \tau'_2) \dots \\ &\dots \hat{T}_i(\tau_i - \tau'_i) \hat{G}^{(0)}(\tau'_i - \tau_{i+1}) \hat{T}_1(\tau_{i+1} - \tau'_{i+1}) \hat{G}^{(0)}(\tau'_{i+1}) f_0(x). \end{aligned} \quad (31)$$

Это выражение описывает повторное рассеяние луча на одном рассеивателе. Вычисление правой части (31) в приближении оптически жестких рассеивателей с изотропным дифференциальным сечением (28) приводит к оценкам

$$\Delta f^{(i)}(x, t) \sim (t/\tau_r)^i \begin{cases} (a/c_g t)^2 & (i \geq 4) \\ (a/c_g t) \ln(a/c_g t) & (i = 3) \\ a/c_g t & (i = 2). \end{cases} \quad (32)$$

Здесь выступает характерный параметр  $a/c_g t$ . Его квадрат имеет порядок величины телесного угла, под которым с расстояния  $c_g t$  «виден» рассеиватель при  $a \ll c_g t$ . При фиксированном «медленном» времени  $t/\tau_r$  фактор  $a/c_g t$  имеет порядок малого параметра  $\rho a^3 \ll 1$  задачи. Именно по этой причине повторные рассеяния луча на одном и том же рассеивателе маловероятны в пределе низкой плотности рассеивателей.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Рассмотрим уравнения нестационарной геометрической оптики [5, 6] для траекторий луча при его рассеянии на изолированном рассеивателе с показателем преломления (4). Эти уравнения имеют вид канонических уравнений движения материальной точки в классической механике с гамильтонианом  $\omega(r, k)$ , определенным (5). Используя интеграл количества движения для траектории луча, находим

$$\frac{\pi - \chi}{2} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{r_{\perp} dr}{r^2 \sqrt{1 - \mu(r/a, \omega) - r_{\perp}^2/r^2}}, \quad (\text{П.1})$$

где  $r_{\min}$  находится из условия обращения в нуль подкоренного выражения.

2. Покажем, как получается формула (18). Опуская индекс  $j$  у ядра оператора столкновения, введем вспомогательные величины

$$T(r, k; k' | z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \int dr' T(r, k; r', k'; t) \varphi(r'); \quad (\text{П.2})$$

$$G^{(0)}(r, k | z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \delta(r - c_g t); \quad (\text{П.3})$$

$$I(r, k; k' | z) = \int dr_1 G^{(0)}(r - r_1, k | z) T(r_1, k; k' | z). \quad (\text{П.4})$$

Здесь  $z$  — переменная преобразования Лапласа,  $\varphi(r)$  — пробная функция. Величина (П.4) является решением следующей краевой задачи:

$$\left( z + c_g \frac{\partial}{\partial r} \right) I(r, k; k' | z) = T(r, k; k' | z),$$

$$I(r, k; k' | z) \rightarrow 0, \quad rk/k \rightarrow -\infty, \quad (\text{П.5})$$

где правая часть уравнения выражается через искомую величину с помощью определения (14) оператора столкновения. Обозначим через  $k(r_0, k_0, t)$  волновой вектор вдоль траектории луча в момент  $t$ , имеющий в момент  $t = 0$  в точке  $r_0$  этой траектории значение  $k_0$ . Решение краевой задачи (П.5) дает

$$I(r, k; k' | z = 0) |_{\varphi(r)=1} = -\delta(k' - k) +$$

$$+ \delta(k' - k(r, k, t = -\infty)). \quad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.6) в левую часть равенства (П.5) при  $z = 0$ ,  $\varphi = 1$  и интегрируя это равенство по  $\mathbf{r}$ , получаем с учетом определения (16) сечения рассеяния формулу (18).

3. Для проверки асимптотического равенства (23) полагаем временно  $a = a_0$ ,  $a \rightarrow 0$ , снабжая при этом индексом « $a$ » все функционалы от траектории луча. Из уравнений для траектории луча находим, что

$$k_a(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t) = k_{a=1}(\mathbf{r}_0/a, \mathbf{k}_0, t/a). \quad (\text{П.7})$$

Запишем с помощью уравнения (П.5) соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ a^{-2} \int_0^\infty dt e^{-zt} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \varphi_1(\mathbf{r}) \times \right. \\ & \times T_a(\mathbf{r}, \mathbf{k}; \mathbf{r}', \mathbf{k}'; t) \varphi(\mathbf{r}') \Big\} = \\ & = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \varphi_1(0) \int dR c_g \frac{\partial}{\partial R} I_a(aR, \mathbf{k}; \mathbf{k}' | z) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

где  $\varphi_1(\mathbf{r})$  — пробная функция. Путем решения уравнения вида (П.5) с учетом (14) находим

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0} I_a(aR, \mathbf{k}; \mathbf{k}' | z) = \varphi(0) [-\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \\ & + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_{a=1}(R, \mathbf{k}, t = -\infty))], \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

что аналогично (П.6). Подстановка (П.9) в (П.8) приводит с учетом (17) к (23).

4. В случае оптически мягкого рассеивателя на основании первого условия (27) раскладываем квадратный корень в подынтегральном выражении (П.1) в ряд по  $\mu(r/a, \omega)$  способом [10] (см. стр. 75). Это дает

$$\chi \approx -r_\perp \int_{r_\perp}^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_\perp^2}} \frac{\partial \mu(r/a, \omega)}{\partial r}. \quad (\text{П.10})$$

При втором условии (27) и (4) угол отклонения (П.10) луча мал по сравнению с единицей.

В заключение авторы благодарят С. М. Рытова за ценные замечания по работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику Ч 2, Случайные поля — М.: Наука, 1978.
- Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 9, с. 1359.
- Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.
- Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 5, с. 706.
- Островский Л. А., Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 4, с. 489.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны — М.: Мир, 1977.
- Чернов Л. А. — Акуст. журн., 1969, 15, № 4, с. 594
- Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972.

9. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л. — Изв. АН СССР, Сер. матем., 1956, № 2, с. 167.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Физматгиз, 1958.
11. Сроин Н. — Commun. Math. Phys., 1978, 60, № 3, р. 277.
12. Малахов А. Н., Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 968.

Всесоюзный научно-исследовательский  
институт физико-технических  
и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
23 февраля 1981 г.

## A LIMIT OF LOW DENSITY IN THE GEOMETRICAL THEORY OF MULTIPLE WAVE SCATTERING

*Yu. N. Barabanenkov, V. D. Ozrin*

Based on equations of nonstationary geometrical optics the multiple scattering of the wave packet is considered in a discrete scattering medium. It is shown that at low density of scatterers the distribution function of probabilities of phase ray variables satisfies asymptotically accurately the nonstationary equation of the radiation transfer which for optically soft and optically rigid scatterers transforms into the diffuse Einstein—Fokker—Planck equation and into the transfer equation with isotropic scattering coefficient.

## ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ

Т. XXI, № 4, 1981 г.

(Окончание)

**В. В. Богородский, А. В. Гусев, А. П. Поляков, Н. И. Успенский, М. Б. Ярцев.**  
Структура естественного сверхнизкочастотного электромагнитного поля Земли в Арктическом бассейне

Излагаются результаты исследований электромагнитных полей естественных и искусственных источников в Арктическом бассейне. Получены спектральные характеристики естественных полей, свидетельствующие об основном вкладе в суммарное поле излучения атмосферных источников. Обсуждается механизм гипотетического собственного излучения ледяного покрова при динамических процессах.

**Э. Б. Файнберг.** Об обратной задаче глубинного электромагнитного зондирования Земли.

Предлагается степенная модель распределения глубинной электропроводности Земли вида  $\rho = \rho_0 h^\gamma$ , адекватная данным глобального электромагнитного зондирования. Модель предлагается использовать в качестве опорной для совместной интерпретации с данными локальных и региональных зондирований.

**Г. Д. Гефан, В. Б. Иванов, Г. В. Хазанов.** Об одном механизме усиления свечения верхней ионосфера при воздействии мощных радиоволн.

**А. Я. Фельдштейн.** Динамика циклотронной неустойчивости при учете нагрева ионосферы

**Н. К. Осипов, В. В. Клименко, А. А. Чернов.** Размеры источников и механизмы генерации спорадического радиоизлучения авроральной ионосферы в СВЧ-диапазоне.

**Ю. К. Калинин, Л. П. Морозова.** К теории оптимального обнаружения внезапных аномалий фазы СДВ-сигнала на ионосферных трассах.

**Э. Л. Афраймович.** Кепстральный анализ модулированных радиосигналов — новые возможности зондирования ионосферы.