

УДК 537.862

УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ОКГ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПОТЕРЬ

Э. Я. Дауме

В лазере бегущей волны с односторонней генерацией, активное вещество которого является двухуровневым с однородно-уширенной линией усиления, рассматривается стационарная импульсная генерация, получаемая при синхронизации мод посредством периодической модуляции потерь в резонаторе. Для формы импульса, близкой к гауссовой, исследуется устойчивость периодического режима. Показано, что импульс, формирующийся в максимуме пропускания модулятора, устойчив. Для опережающего (по отношению к точке максимума пропускания модулятора) импульса имеет место неустойчивость периодического режима при слабом эффекте насыщения в активной среде и сильной дисперсии коэффициента усиления. При увеличении насыщения и уменьшении дисперсии коэффициента усиления граница устойчивости может передвигаться в сторону опережения.

Генерация последовательности одинаковых импульсов при активной синхронизации мод рассматривалась в ряде работ (см., например, [1-8]). В этих работах на упрощенных моделях выяснены основные закономерности такой генерации — определены форма и длительность импульсов, спектральный состав излучения. Найдена их зависимость от параметров генератора и модулирующего устройства. В частности, показано, что возможны стационарные (периодические) решения с различной формой импульса при одних и тех же параметрах генератора и модулятора. Огибающая импульсов имеет форму [1, 4, 8]

$$E_n(t) = E_{n0} \exp(-t^2/T_{n0}^2) P_n(t - \xi_n),$$

где $P_n(t)$ — полином Эрмита n -го порядка. Очевидно, что для получения ответа на вопрос о том, какие решения могут существовать реально, необходимо провести исследование их устойчивости.

В работе [8] показано, что все решения, кроме основного ($n = 0$), неустойчивы*, однако вопрос об областях устойчивости решения с $n = 0$ — периодической последовательности гауссовых импульсов — практически оставался открытым. Исследования, проведенные в настоящей работе, показали, что существуют области параметров, в которых основное решение неустойчиво. Возможно, что в этих областях периодическая генерация имеет более сложный вид.

Ниже рассматривается модель лазера бегущей волны с односторонней генерацией, активное вещество которого является двухуровневым с однородно-уширенной линией усиления. При решении задачи пренебрегается влиянием эффекта насыщения на форму импульса, тогда как другие проявления изменения разности населенностей при анализе учитываются. Модулятор представляется сосредоточенным элементом, и действие его сводится к изменению скачком амплитуды поля

* Если учсть то обстоятельство, что решения более высоких порядков требуют для своего существования больших значений стационарного коэффициента усиления, то их неустойчивость по отношению к развитию мод более низкого порядка становится очевидной [1, 4, 8].

в точке расположения модулятора и описывается умножением входного сигнала на некоторую периодическую функцию времени $\rho(t)$. В работе рассматривается лишь основное решение, но форма импульса может несколько отличаться от гауссовой.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯ И КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ЗА ОДИН ПРОБЕГ ПО РЕЗОНАТОРУ

1.1. Исходные уравнения для безразмерных величин комплексной амплитуды напряженности поля $\tilde{E}(\xi, z)$ линейно-поляризованной плоской волны, комплексной амплитуды поляризации $\tilde{\sigma}(\xi, z)$ активной среды и разности населенностей $\tilde{N}(\xi, z)$ в лазере (рис. 1) запишем в виде

$$\partial \tilde{E} / \partial \tilde{z} = \tilde{\sigma}; \quad (1.1a)$$

$$T(\partial \tilde{\sigma} / \partial \xi) + \tilde{\sigma} = \tilde{N} \tilde{E}; \quad (1.1b)$$

$$\partial \tilde{N} / \partial \xi = \mu(\bar{N}_0 - \tilde{N}) - (\tilde{\sigma} \tilde{E}^* + \tilde{\sigma}^* \tilde{E}) / 2, \quad (1.1c)$$

где $\tilde{E} = T_L^{1/2} B^{1/2} E$, $\tilde{\sigma} = T_L^{1/2} (B^{3/2}/2v) l \sigma$, $\tilde{N} = (B/2v) l N$, $\tilde{z} = z/l$, $\xi = T_L^{-1}(t - z/v)$, $T_L = \tau + l/v$, τ — время пробега волны по «свободной» части резонатора, l — длина активной среды, v — групповая скорость на центральной частоте ω_0 полосы усиления, B — коэффициент Эйнштейна, $T = T_2/T_L$, $\mu = T_L/T_1$ эффи., T_2, T_1 эффи. = $= T_1/(1+wT_1)$ — времена релаксации соответственно поляризации и разности населенностей, T_1 — время жизни верхнего рабочего уровня, w — вероятность индуцированного перехода под действием накачки, $\bar{N}_0 = (B/2v) l N_0$ — параметр, характеризующий интенсивность накачки (N_0 — разность населенностей в отсутствие

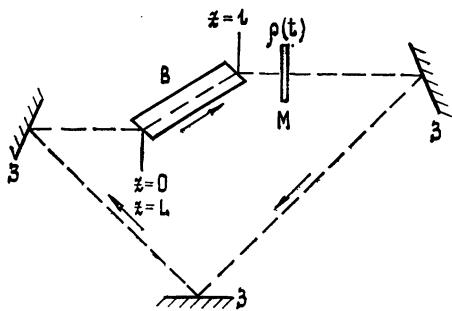


Рис. 1. Модель лазера бегущей волны. B — активное вещество, \exists — зеркала резонатора, M — модулятор.

генерации).

Преобразование амплитуды поля в модуляторе и распространение волны по части резонатора, свободной от активной среды, учитывается соотношением

$$\tilde{E}(\xi + 1, 0) = e^{-i\varphi} \rho(\xi) \tilde{E}(\xi, 1), \quad (1.1g)$$

где $\varphi = \omega_0(\tau + l/v_\phi)$, v_ϕ — фазовая скорость волны на частоте ω_0 в среде, содержащей активные частицы, $\rho(\xi)$ — коэффициент пропускания модулятора — периодическая функция с периодом $T_m = 1 + \Delta$ (Δ — расстройка, $\Delta \ll 1$ — условие «резонансной» модуляции). Условимся, что все потери включены в $\rho(\xi)$. В связи с этим коэффициенты отражения от зеркал резонатора считаем равными единице.

Требуется найти периодические по ξ решения системы (1.1a) — (1.1g) в полосе $0 \leq \tilde{z} \leq 1$, $-\infty < \xi < \infty$ и определить их устойчивость. В дальнейшем знак \sim у переменных \tilde{E} , $\tilde{\sigma}$, \tilde{N} и \tilde{z} опускаем.

1.2. Решение уравнений (1.1a) — (1.1b) при некотором заданном начальном поле на входе в активную среду позволяет определить преобразование амплитуды поля $E(\xi, z)$ в активной среде. При нахожде-

ния этого преобразования будем предполагать: 1) $T \ll 1$, так что влиянием поляризации, возникшей на r пробеге, на поле на $r+1$ пробеге можно пренебречь; при этом будем считать, что форма каждого импульса близка к гауссовой; 2) влияние изменения разности населенностей на форму импульса мало по сравнению с влиянием дисперсии коэффициента усиления, и им можно пренебречь; как показывает предварительный анализ, это предположение выполняется в данной задаче при $\mu \ll T^{1/2}$; 3) решение близко к периодическому (стационарному)*.

С учетом сделанных предположений, пренебрегая, в частности, изменением разности населенностей во время действия импульса, запишем уравнение (1.1б) в виде ряда по степеням T :

$$\sigma(\xi, z) = N(z) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n (\partial^n E / \partial \xi^n). \quad (1.2)$$

Исключая из уравнений постоянное усиление в активной среде посредством замены

$$E(\xi, z) = \bar{E}(\xi, z) \exp \left(\int_0^z N(z) dz \right) = \bar{E}(\xi, z) K(z), \quad (1.3)$$

запишем уравнение (1.1а) с учетом (1.2) в виде**

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = N(z) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T^n \frac{\partial^n \bar{E}}{\partial \xi^n}. \quad (1.4)$$

Принимая, что форма импульса при достаточно глубокой модуляции поля близка к гауссовой [4, 5], будем искать решение (1.4) в виде гауссова импульса с поправками, которые представим в виде степенных членов более высокого порядка:

$$\bar{E}(\xi, z) = e^{x(z)} \exp(-T^{-1} P(x, z)), \quad (1.5)$$

где $P(x, z) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{v_k(z)}{k} x^k$, $x = \xi - \xi_0 - f(z)$, $\operatorname{Re} v_2(z) > 0$. Здесь

ξ_0 определяет положение максимума импульса на оси ξ ; функция $f(z)$ дает его смещение (запаздывание) относительно импульса, который двигался бы в отсутствие активной среды. Учет в решении (1.5) малых отклонений формы импульса от гауссовой позволяет при исследовании устойчивости импульса учесть изменение его формы.

Сделаем некоторые замечания по поводу представления поля в виде (1.5). Как уже говорилось, задача заключается в том, чтобы найти периодические по времени решения системы (1.1а)–(1.1г). Решение в форме (1.5) не представляет собой периодической функции, с его помощью можно приближенно описать лишь часть огибающей поля, а именно отдельный импульс. Поэтому решение в форме (1.5) пригодно тогда, когда длительность импульса много меньше периода модуляции T_m и непрерывный переход в этом решении к случаю отсутствия моду-

* Под словами «стационарное решение», «стационарный режим» будем понимать режим с неизменной формой импульса

** Легко видеть, что уравнение (1.4) приводится к виду $\partial \bar{E} / \partial z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \times (\partial^n \bar{E} / \partial \xi^n)$ (*), т. е. не содержит малого параметра при любом значении T . Однако в основном стационарном, обусловленном граничным условием (1.1г), и близких к нему решениях при $T \ll 1$ величины производных в (*) с ростом их номера уменьшаются. Поэтому, имея в виду, что в дальнейшем будут рассматриваться лишь решения, близкие к стационарным, удобно для анализа ввести малый параметр явно.

ляции представляется невозможным. Наличие резонатора при этом учитывается только через время пробега волны по резонатору T_L , а не через требование непрерывности поля по времени в какой-либо точке резонатора.

Подставляя (1.5) в (1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим следующие уравнения для функций $\chi(z)$, $f(z)$ и $v_k(z)$ с учетом лишь членов первого порядка по T :

$$\begin{aligned}\chi'(z) &= -TN(z)v_2(z), \\ f'(z) &= TN(z), \\ v'_k(z) &= -(-1)^k kTN(z)Q_k, \quad k = 2, 3, \dots, S.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Функции $Q_k[v_k(z), v_{k-1}(z), \dots, v_2(z)]$ для нескольких первых индексов имеют вид

$$\begin{aligned}Q_2 &= [v_2(z)]^2, \\ Q_3 &= [v_2(z)]^3 - 2v_3(z)v_2(z), \\ Q_4 &= [v_2(z)]^4 - 3v_3(z)[v_2(z)]^2 + 2v_4(z)v_2(z) + [v_3(z)]^2.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Интегрируя (1.6) при начальных условиях $\chi(0) = \chi^0$, $f(0) = 0$, $v_k(z) = v_k^0$, получаем связь между входными и выходными параметрами импульса с точностью до членов порядка T^2 :

$$\begin{aligned}\bar{\chi} &= \chi^0 - v_2^0 T \ln K, \\ \bar{f} &= T \ln K, \\ \bar{v}_k &= v_k^0 - (-1)^k k Q_k^0 T \ln K, \quad k = 2, 3, \dots, S,\end{aligned}\tag{1.8}$$

где $\bar{\chi} = \chi(1)$, $\bar{f} = f(1)$, $\bar{v}_k = v_k(1)$, $\ln K = \int_0^1 N(z) dz$, $Q_k^0 = Q_k[v_k^0]$,

$v_{k-1}^0, \dots, v_2^0]$, K — значение коэффициента усиления активной среды без дисперсии ($T = 0$).

1.3. В соответствии с формой (1.5) естественно представить коэффициент пропускания модулятора также экспонентой, показатель которой в окрестности точки $x = 0$ имеет вид степенного ряда по x :

$$\rho(x) = \rho_0 \exp \left(- \sum_{n=1}^S (-1)^n a_n x^n \right).\tag{1.9}$$

Величина ρ_0 — пропускание, соответствующее точке максимума импульса. Поскольку здесь рассматривается модуляция потерь, все величины a_n — действительные. При представлении некоторой произвольной периодической функции $\rho(x)$ в виде (1.9) коэффициенты a_n являются функциями точки ξ_0 , соответствующей максимуму импульса.

Выходной импульс (из активной среды) в соответствии с (1.5) и (1.8) запишем в виде

$$\bar{E}(\xi, 1) = e^{\bar{x}} \exp(-T^{-1} P(x, 1)),\tag{1.10}$$

где $P(x, 1) = \sum_{k=2}^S (-1)^k (\bar{v}_k/k) x^k$, $x = \xi - \xi_0 - \bar{f}$. Огибающая поля после действия модулятора в соответствии* с условием (1.1г) и с учетом (1.3) принимает вид

* Для упрощения в (1.1г) положено $\varphi = 2m\pi$, m — целое число, что соответствует совпадению одной из частот резонатора с центральной частотой полосы усиления ω_0 .

$$\bar{E}_m(\xi) = K \rho_0 e^{\bar{x}} \exp \left\{ \alpha_1 x - \sum_{n=2}^s (-1)^n \left(\alpha_n + \frac{1}{T} \frac{\bar{v}_n}{n} \right) x^n \right\}, \quad (1.11)$$

$$x = \xi - \xi_0 - \bar{f}.$$

Функция $\bar{E}_m(\xi)$ одновременно является огибающей поля на входе в активное вещества на следующем проходе с соответствующим смещением во времени. Приведем (1.11) к виду исходного сигнала (1.5) и тем самым определим преобразование параметров χ^0, v_k^0 ($k = 2, 3, \dots$) за один пробег импульса по генератору. Это достигается введением временного смещения x_p , которое испытывает импульс в модуляторе.

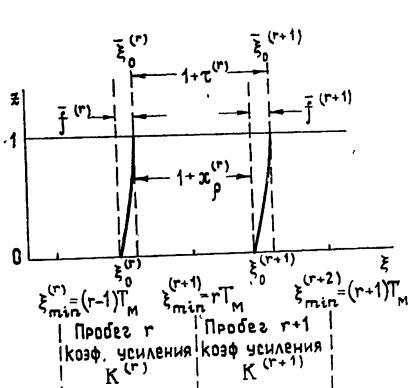


Рис. 2.

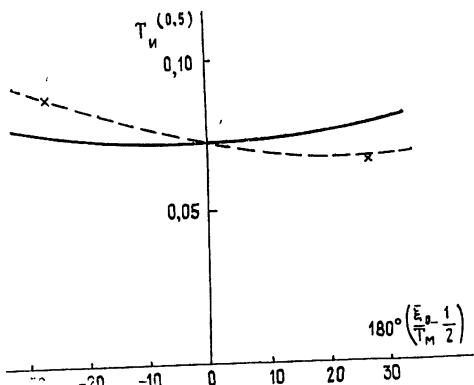


Рис. 3.

Полагая в (1.11) $x = x' + x_p$, получаем

$$\bar{E}'_m(x') = \bar{K} \rho_0 e^{\bar{x}} \exp \{ \alpha_1 (x_p + x') - \sum_{k=0}^s A_k (x')^k \}, \quad (1.12)$$

где

$$A_k = \sum_{\substack{n=2, k < 2 \\ n-k, k > 2}}^s (-1)^n \binom{n}{k} x_p^{n-k} \left(\alpha_n + \frac{1}{T} \frac{\bar{v}_n}{n} \right),$$

$x' = \xi - \xi_0 - \bar{f} - x_p$, $\binom{n}{k}$ — число сочетаний из n по k . Приписывая исходным величинам на r -м проходе индекс r , а исходным величинам на $(r+1)$ -м проходе индекс $r+1$ (введение нумерации поясняется на рис. 2, где сплошной линией показана условно проекция на плоскость ξ, z траектории вершины импульса), получим, опуская промежуточные выкладки, уравнения для преобразования параметров импульса от прохода к проходу по резонатору с точностью до величин порядка T^2 по отношению к наибольшим членам*:

$$\begin{aligned} \ln(K^{(r)} \rho_0^{(r)}) + \bar{\chi}^{(r)} + T \frac{[\alpha_1^{(r)}]^2}{2v_2^{0,r}} &= \chi^{0,r+1}, \\ \alpha_s^{(r)} + \frac{1}{T} \frac{\bar{v}_s^{(r)}}{s} - \alpha_1^{(r)} \cdot \frac{v_{s+1}^{0,r}}{v_2^{0,r}} &= \frac{1}{T} \frac{v_s^{0,r+1}}{s}, \end{aligned} \quad (1.13a)$$

$$s = 2, 3, \dots, S, v_{S+1}^{0,r} \equiv 0,$$

* К одной из частей первого уравнения можно приписать слагаемое $2m\pi i$ (m — целое число). Это не приводит, однако, к новым решениям.

где $\bar{\chi}^{(r)}$ и $\bar{v}_s^{(r)}$ определяются соотношением (1.8), в котором всем переменным величинам должен быть приписан индекс r .

Смещение импульса по временной оси за один проход от точки, соответствующей $\rho_0^{(r)}$ (положению максимума импульса при $z = 1$ на r -м проходе), до точки, соответствующей $\rho_0^{(r+1)}$ (положению максимума импульса при $z = 1$ на $(r+1)$ -м проходе), составляет

$$1 + \tau^{(r)} = 1 + x_p^{(r)} + \bar{f}^{(r+1)} = 1 + T \left(\frac{\alpha_1^{(r)}}{v_2^{0,r}} + \ln K^{(r+1)} \right). \quad (1.136)$$

В (1.136), как и всюду в дальнейшем, принято для упрощения выкладок, что амплитуда поля $E(\xi, z)$ — величина действительная.

1.4. Уравнение для преобразования коэффициента усиления K получаем из уравнения (1.1в), которое с помощью уравнения (1.1а) и с учетом замены (1.3) записывается в виде

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \mu (\bar{N}_0 - N) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{E}^2(\xi, z) \exp \left(2 \int_0^z N(z) dz \right) \right]. \quad (1.14)$$

Интегрируя это уравнение на r -м пробеге сначала по z от нуля до единицы, пренебрегая при этом зависимостью от ξ в интеграле от $N(\xi, z)$ в правой части (1.14) в силу малости μ , а затем интегрируя по ξ в пределах периода модуляции T_m от ξ_{min} до $\xi_{min} + T_m$, где ξ_{min} соответствует минимуму пропускания модулятора, и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \int_0^1 N(\xi_{min}^{(r)} + T_m, z) dz &= \ln K^{(r+1)}, \\ \int_0^1 N(\xi_{min}^{(r)}, z) dz &= \ln K^{(r)}, \end{aligned}$$

получаем уравнение преобразования коэффициента усиления

$$\ln K^{(r+1)} - \ln K^{(r)} = \mu (\bar{N}_0 - \ln K^{(r)}) - [(K^{(r)})^2 \bar{W}_{\text{вых}}^{(r)} - \bar{W}_{\text{вх}}^{(r)}]/2. \quad (1.15)$$

В (1.15) после интегрирования по ξ положено $T_m = 1$ и введены обозначения:

$$\begin{aligned} \int_{T_m}^1 [\bar{E}^{(r)}(\xi, 1)]^2 d\xi &= \bar{W}_{\text{вых}}^{(r)}, \\ \int_{T_m}^1 [\bar{E}^{(r)}(\xi, 0)]^2 d\xi &= \bar{W}_{\text{вх}}^{(r)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Уравнения (1.13а) и (1.15) образуют полную систему уравнений для преобразования параметров импульса и активной среды от прохода к проходу. К этим уравнениям должна быть добавлена еще формула (1.13б) для смещения импульса во времени за один пробег, которое должно определить преобразование величин $\alpha_s^{(r)}$.

2. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ

Из (1.13) и (1.15) получаем уравнения стационарного состояния

$$\begin{aligned} \ln(K_{\text{ст}} \rho_0, \text{ст}) - v_2, \text{ст} T \ln K_{\text{ст}} + T[(\alpha_1, \text{ст})^2 / 2 v_2, \text{ст}] &= 0, \\ \alpha_s, \text{ст} - (-1)^s Q_{s, \text{ст}} \ln K_{\text{ст}} - \alpha_1, \text{ст} (v_{s+1}, \text{ст} / v_2, \text{ст}) &= 0, \end{aligned}$$

$$s = 2, 3, \dots, v_{s+1,ct} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mu(\bar{N}_0 - \ln K_{ct}) - [(K_{ct})^2 \bar{W}_{vых,ct} - \bar{W}_{вх,ct}] / 2 = 0,$$

$$T(a_{1,ct}/v_{2,ct} + \ln K_{ct}) = \Delta,$$

где

$$Q_{s,ct} = Q_s[v_{s,ct}, v_{s-1,ct}, \dots, v_{2,ct}].$$

Уравнения (2.1) при заданном положении импульса относительно функции, описывающей пропускание модулятора (заданы величины $\rho_{0,ct}$, $a_{s,ct}$, $s = 1, 2, \dots, S$), определяют амплитуду (χ_{ct}) и форму ($v_{s,ct}$) импульса, состояние активной среды (коэффициент усиления K_{ct}) и расстройку Δ . Если ограничиться гауссовым приближением ($S = 2$), то первое и четвертое уравнения с точностью до величин $\sim T^2$ и второе уравнение с точностью до величин $\sim T$ из (2.1) совпадут с соответствующими (после исправления опечаток) уравнениями (6б) (с, б, а) работы [5]. Третье уравнение из (2.1) определяет максимальную амплитуду импульса (величину χ_{ct}). Если учесть большее число уравнений (например, $S = 4$), то для параметров импульса получатся формулы, несколько отличные от тех, которые следуют из гауссова приближения. Параметры режима генерации (величины $v_{2,ct}$, K_{ct} и Δ) совпадут с соответствующими параметрами для гауссова приближения только для импульса, сформированного в максимуме пропускания модулятора. По мере изменения расстройки в ту или иную сторону будет увеличиваться различие между параметрами, определенными для гауссова приближения, и параметрами, получаемыми из более высоких приближений. В частности, возникает несимметрия графиков длительности импульса для положительных и отрицательных расстроек (относительно точки максимума пропускания). Следует отметить, что учет более высоких приближений слабо влияет на форму импульса (он остается близким к гауссову), но приводит к изменению коэффициента $v_{2,ct}$, в результате чего изменяются параметры гауссова импульса. На рис. 3 приведены аналитические зависимости длительности импульса по уровню 0,5 (по интенсивности) от величины опережения (запаздывания) точки максимума импульса ξ_0 по отношению к точке максимума пропускания модулятора $\xi = T_m/2$ при значениях параметров $T = 10^{-2}$, $\mu = 10^{-5}$, $\bar{N}_0 = 1,1$. Пропускание модулятора описывается функцией $\rho(\xi) = (\rho_0/2)(1 - \cos 2\pi\xi T_m^{-1})$, $\rho_0 = 0,7$. Сплошной линией показан результат в гауссовом приближении $S = 2$, пунктирной — в приближении $S = 4$. Там же приведены результаты (отмечены крестиками) численного счета на ЭВМ* по исходным уравнениям (1.1а)–(1.1г) при тех же параметрах и $\exp(-i\varphi) = 1$, причем в счет специальным образом были введены коррекции, позволившие ускорить получение стационарного состояния. В численном счете получились следующие значения для периода T_m : для опережающего импульса (опережение на $\sim 15\%$ периода) $T_m^{(0)} = 1,015$, для запаздывающего импульса (запаздывание на $\sim 15\%$ периода) $T_m^{(3)} = 1,001$.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Анализ устойчивости стационарного состояния проведем по отношению к отклонениям величин K , χ , v_s^0 , ρ_0^{**} .

Линеаризуем систему уравнений преобразования (1.13) и (1.15) около стационарного состояния, полагая $\chi^{0,r} = \chi_{ct} + \delta\chi_r$, $K^{(r)} = K_{ct} + \delta K_r$, $v_s^{0,r} = v_{s,ct} + \delta v_s^{(r)}$, $\rho_0^{(r)} = \rho_{0,ct} + \delta \rho_r$, $a_s^{(r)} = a_{s,ct} + \delta a_s^{(r)}$, $\tau^{(r)} = \Delta + \delta \tau_r$.

* Автор благодарен И. Г. Зарнициной за проведение численного счета на ЭВМ.

** Устойчивость импульса в регенеративном генераторе по отношению к изменениям длительности импульса и частоты заполнения обсуждалась в [9].

В линеаризованные уравнения войдут величины $\delta\alpha_s^{(r)}$ — отклонения коэффициентов $\alpha_s^{(r)}$, определяющих пропускание модулятора (1.9) в окрестности максимума импульса. Эти величины можно выразить через $\delta\rho_r$, полагая в первом приближении

$$\delta\alpha_s^{(r)} = (\alpha'_{s,\text{ст}}/\rho'_{0,\text{ст}})\delta\rho_r, \quad (3.1)$$

где $\alpha'_{s,\text{ст}}$ и $\rho'_{0,\text{ст}}$ — производные соответствующих величин по координате точки разложения в (1.9). Учитывая периодичность функции $\rho(\xi)$ и смещение (1.13б), получаем следующее уравнение для преобразования величин $\delta\rho_r$:

$$\delta\rho_{r+1} - \delta\rho_r = \rho'_{0,\text{ст}} \delta\tau_r = \rho'_{0,\text{ст}} T \left(\frac{\delta\alpha_1^{(r)}}{v_{2,\text{ст}}} - \frac{\alpha_{1,\text{ст}}}{(v_{2,\text{ст}})^2} \delta v_2^{(r)} + \frac{\delta K_{r+1}}{K_{\text{ст}}} \right). \quad (3.2)$$

Заменяя в линеаризованной системе уравнение, соответствующее (1.13б), уравнением (3.2), учитывая (3.1) и выражая $\delta\bar{W}_{\text{вх}}^{(r)}$ и $\delta\bar{W}_{\text{вых}}^{(r)}$ через отклонения $\delta\chi_r$ и $\delta v_s^{(r)}$, получаем систему уравнений, связывающую отклонения $\delta\chi_{r+1}$, $\delta\rho_{r+1}$, $\delta v_s^{(r+1)}$, δK_{r+1} с соответствующими отклонениями на r -м проходе,

$$\begin{aligned} \rho'_{0,\text{ст}}(\delta\chi_{r+1} - \delta\chi_r) - a_{12}\delta\rho_r + \rho'_{0,\text{ст}}a_{13}\delta v_2^{(r)} - \rho'_{0,\text{ст}}a_1\delta K_r &= 0, \\ \delta\rho_{r+1} - a_{12}\delta\rho_r + \rho'_{0,\text{ст}}a_{23}\delta v_2^{(r)} - \rho'_{0,\text{ст}}A_2\delta K_{r+1} &= 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} a_{s+1,2}\delta\rho_r + \rho'_{0,\text{ст}} \sum_{k=2}^{s+1} a_{s+1,k+1}\delta v_k^{(r)} + \rho'_{0,\text{ст}}\delta v_s^{(r+1)} + \\ + \rho'_{0,\text{ст}}a_{s+1}\delta K_r &= 0, \\ s = 2, 3, \dots, S, \quad \delta v_{S+1}^{(r)} &\equiv 0, \\ b_1\delta\chi_r - b_2\delta v_2^{(r)} + B\delta K_{r+1} - b\delta K_r &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$1) \quad a_{12} = \alpha_{1,\text{ст}} \left(1 + T \frac{\alpha'_{1,\text{ст}}}{v_{2,\text{ст}}} \right), \quad a_{13} = T \left(\ln K_{\text{ст}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{1,\text{ст}}}{v_{2,\text{ст}}} \right)^2 \right), \\ a_1 = K_{\text{ст}}^{-1} (1 - T v_{2,\text{ст}});$$

$$2) \quad a_{22} = 1 + T \left(\frac{\alpha'_{1,\text{ст}}}{v_{2,\text{ст}}} \right), \quad a_{23} = T \left(\frac{\alpha_{1,\text{ст}}}{v_{2,\text{ст}}} \right), \quad A_2 = \frac{T}{K_{\text{ст}}};$$

$$3) \quad a_{s+1,2} = sT(v_{s+1,\text{ст}}v_{2,\text{ст}}^{-1}\alpha'_{1,\text{ст}} - \alpha'_{s,\text{ст}}) \quad (v_{S+1,\text{ст}} = 0),$$

$$a_{s+1,k+1} = -\delta_{sk} + (-1)^s sT \ln K_{\text{ст}} \frac{\partial Q_{s,\text{ст}}}{\partial v_{k,\text{ст}}} - sT \frac{\alpha_{1,\text{ст}} v_{s+1,\text{ст}}}{(v_{2,\text{ст}})^2} \delta_{k2},$$

$$k = 2, 3, \dots, s \quad (v_{S+1,\text{ст}} = 0), \quad \delta_{sk} — символ Кронекера,$$

$$a_{s+1,s+2} = sT\alpha_{1,\text{ст}}v_{2,\text{ст}}^{-1}, \quad a_{s+1} = (-1)^s s(T/K_{\text{ст}})Q_{s,\text{ст}},$$

$$s = 2, 3, \dots, S;$$

$$4) \quad b_1 = 2\mu(\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}}), \quad b_2 = (\mu/2v_{2,\text{ст}})(\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}}), \\ B = 1/K_{\text{ст}},$$

$$b = (1/K_{\text{ст}})[1 - \mu - 2\mu(\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}})K_{\text{ст}}^2(K_{\text{ст}}^2 - 1)^{-1}].$$

В последнем уравнении из (3.3) опущены члены с коэффициентами, имеющими порядок малости μT и выше.

3.2. Полагая в уравнениях (3.3) $\delta_x = \delta_x \cdot \lambda^r$, $\delta_{\rho} = \delta_{\rho} \cdot \lambda^r$, $\delta v_s^{(r)} = \delta v_s \cdot \lambda^r$, $\delta K_r = \delta K \cdot \lambda^r$, получаем систему $S + 2$ уравнений для $S + 2$ величин δ_x , δ_{ρ} , δK , δv_s ($s = 2, 3, \dots, S$) и характеристическое уравнение $(S + 2)$ -й степени относительно $\lambda - 1$.

Используя малость величин T и μ , можно в ряде случаев получить аналитические выражения для корней характеристического уравнения $\lambda - 1$.

3.3. При $\mu \rightarrow 0$ и некотором фиксированном $T \ll 1$ характеристическое уравнение имеет два корня $\lambda - 1$, модуль которых неограниченно уменьшается. В этом случае для квадрата модуля величины λ , сохраняя члены $\sim \mu/T$ и ограничиваясь областью вблизи максимума пропускания модулятора (сохраняя лишь линейный член по $a_{1,ct}$), получаем

$$|\lambda|^2 = 1 + (2\mu/T)(\bar{N}_0 - \ln K_{ct})a_{1,ct}(v_{2,ct})^2(a'_{1,ct})^{-2}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) видно, что для опережающего импульса ($a_{1,ct} > 0$) имеет место неустойчивость ($|\lambda|^2 > 1$), для запаздывающего ($a_{1,ct} < 0$) найденные корни не приводят к неустойчивости ($|\lambda|^2 < 1$)*.

Если импульс формируется точно в максимуме пропускания модулятора $a_{1,ct} = 0$, то добавка к единице в (3.4) обращается в нуль и требуется учет членов более высокого порядка малости $\sim \mu$; если их учесть, то получим при $a_{1,ct} = 0$ для этих двух корней

$$|\lambda|^2 = 1 - \mu \left[1 + \frac{2(\bar{N}_0 - \ln K_{ct})}{K_{ct}^2 - 1} \right] + \frac{\mu}{2} \frac{(v_{2,ct})^2}{a'_{1,ct}} (\bar{N}_0 - \ln K_{ct}). \quad (3.5)$$

Первый добавок к единице (отрицательный) тот же самый, какой следует из исследования устойчивости решения балансных уравнений при $\rho = \rho_{\max} = \text{const}$. Второй добавок тоже отрицательный, поскольку $a'_{1,ct} < 0$ в точке $a_{1,ct} = 0$, и он усиливает устойчивость, связанную с этими двумя корнями, по сравнению со случаем балансной схемы. Для остальных S корней в случае $a_{1,ct} = 0$ (что соответствует прохождению импульса при максимальном пропускании модулятора) характеристическое уравнение сводится к

$$[(\lambda - 1) + 1 - a_{22}] \prod_{s=3}^{S+1} [(\lambda - 1) + 1 + a_{ss}] = 0 \quad (3.6)$$

и соответствующие корни равны: $(\lambda - 1)^{(2)} = -(1 - a_{22}) = -T a'_{1,ct} v_{2,ct}^{-1} < 0$, $(\lambda - 1)^{(l)} = -(1 + a_{ll}) = -(-1)^{l-1}(l-1)T \ln K_{ct} \times (\partial Q_{l-1,ct} / \partial v_{l-1,ct})$. Подставляя величины $Q_{s,ct}$ из (1.7), получаем

$$(\lambda - 1)^{(3)} = -4T v_{2,ct} \ln K_{ct} < 0,$$

$$(\lambda - 1)^{(4)} = -6T v_{2,ct} \ln K_{ct} < 0,$$

$$(\lambda - 1)^{(5)} = -8T v_{2,ct} \ln K_{ct} < 0.$$

Все корни $(\lambda - 1)^{(l)}$, $l = 2, \dots, 5$, — отрицательные, и, следовательно, в приближении $S = 4$ в точке максимума пропускания модулятора для импульса имеет место устойчивость.

Отметим, что из требования малости соответствующих добавок более высокого порядка вытекает условие $\mu^{1/2}/T \ll 1$, и, следовательно, приведенные здесь вычисления справедливы при $\mu^{1/2} \ll T$.

* Вывод об областях неустойчивости, полученный ранее в [10], согласно которому устойчивый импульс может находиться только в области, где $\rho'(t) > 0$ ($a_{1,ct} > 0$), является следствием допущенной там неточности.

Можно проследить, какие из уравнений (3.3) ответственны за результат (3.4). Если проделать этот анализ, то можно прийти к следующим трем уравнениям:

$$\delta\chi_{r+1} = \delta\chi_r + \delta\rho_r/\rho_{0,\text{ст}} + \delta K_r/K_{\text{ст}}, \quad (3.7a)$$

$$\delta\rho_{r+1} = [1 + T(\alpha'_{1,\text{ст}} \nu_{2,\text{ст}}^{-1})] \delta\rho_r + T\rho'_{0,\text{ст}} (\delta K_r/K_{\text{ст}}); \quad (3.7b)$$

$$\delta K_{r+1}/K_{\text{ст}} = \delta K_r/K_{\text{ст}} - \bar{W}_{\text{вх. ст}} (K_{\text{ст}}^2 - 1) \delta\chi_r. \quad (3.7c)$$

Поскольку из полученной системы (3.7) выпали величины $\delta\chi_s^{(r)}$ ($s = 2, 3, \dots, S$), то возмущения формы импульса не дают вклада в инкремент (декремент), определяемый (3.4). Уравнения (3.7) имеют прозрачный физический смысл, а именно, они определяют энергетический баланс в системе при неизменной форме импульса и могут быть получены из простых соображений. Уравнение (3.7a) определяет отклонение максимальной амплитуды импульса на $(r+1)$ -м проходе, которое складывается, естественно, из отклонения на r -м проходе и из приращений, обусловленных изменением пропускания модулятора $\delta\rho_r$ и изменением коэффициента усиления δK_r . Уравнение (3.7b) определяет приращение коэффициента пропускания модулятора, которое складывается из приращения на r -м проходе и из добавок, связанных с изменением смещения импульса из стационарного положения. Это изменение смещения обусловлено, во-первых, изменением пропускания $\delta\rho_r$ (член с $\alpha'_{1,\text{ст}}$) и, во-вторых, изменением коэффициента усиления δK_r (изменение времени пробега импульса по активной среде). И, наконец, уравнение (3.7c) описывает изменение коэффициента усиления, определяемое изменением энергии импульса, которое при неизменной форме импульса определяется изменением максимальной амплитуды $\delta\chi_r$.

Характеристическое уравнение системы (3.7) имеет вид

$$(\lambda - 1)^2 \left[(\lambda - 1) - T \frac{\alpha'_{1,\text{ст}}}{\nu_{2,\text{ст}}} \right] + 2\mu (\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}}) \left[T\alpha'_{1,\text{ст}} - T \frac{\alpha'_{1,\text{ст}}}{\nu_{2,\text{ст}}} + (\lambda - 1) \right] = 0.$$

Для двух интересующих нас корней с малым модулем ($|\lambda|^2 - 1 \sim \mu/T$) получаем результат, полностью совпадающий с (3.4).

3.4. Можно рассмотреть аналогичным образом и другой предельный случай, а именно: $T \rightarrow 0$ при некотором фиксированном $\mu \ll 1$. При этом нужно учитывать, что при достаточно малых T может существенно сказываться эффект насыщения, и пренебрегать зависимостью разности населенностей $N(\xi, z)$ от ξ в уравнении (1.1б) нельзя.

Однако для твердотельных лазеров, для которых характерны следующие значения параметров: $T = T_2/T_L \sim 10^{-4}$ и $\mu = T_L/T_{1\text{ эф}} \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$, неравенство $\mu \ll T^{1/2}$, которое, по предварительному анализу, должно выполняться для того, чтобы пренебречь эффектом насыщения, еще выполняется. При $T \rightarrow 0$ и некотором фиксированном $\mu \ll 1$ характеристическое уравнение имеет два корня $\lambda = 1$, модуль которых является величиной $\sim \mu^{1/2}$. В этом случае для квадрата модуля величины λ получаем (отбрасывая члены $\sim \mu^{3/2}$ и более высокого порядка)

$$|\lambda|^2 = 1 - \mu [1 + 2(\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}})(K_{\text{ст}}^2 - 1)^{-1}] + \alpha'_{1,\text{ст}} T. \quad (3.8)$$

Из требования малости соответствующих поправок более высокого порядка вытекает условие $T \ll \mu^{1/2}$. Это соотношение выполняется для твердотельных лазеров ($T \sim 10^{-4}$, $\mu \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$).

Если неравенство $T \ll \mu^{1/2}$ выполняется не сильно, то для опережающего импульса ($\alpha'_{1,\text{ст}} > 0$) имеет место неустойчивость $|\lambda|^2 > 1$ при

$$\alpha'_{1,\text{ст}} T > \mu [1 + 2(\bar{N}_0 - \ln K_{\text{ст}})(K_{\text{ст}}^2 - 1)^{-1}]. \quad (3.9)$$

При значениях параметров $T = 10^{-4}$, $\mu = 10^{-4}$, $N_0 = 1,1$ и $\rho(\xi) = 0,7 \sin^2[2\pi\xi/(1+\Delta)]$ неравенство (3.9) выполняется, если импульс опережает момент максимального пропускания модулятора более чем на $\sim 9\%$ периода модуляции. Такому опережению соответствует увеличение периода модуляции более чем на $0,58 \cdot 10^{-4}$ ($\Delta > 0,94 \cdot 10^{-4}$), по сравнению с периодом модуляции, когда стационарный импульс формируется в максимуме пропускания модулятора.

Если неравенство $T \ll \mu^{1/2}$ выполняется сильно, то в (3.8) $|\lambda|^2 < 1$ и найденные корни не приводят к неустойчивости.

Остальные S корней характеристического уравнения при $a_{1,\text{ст}} = 0$ (что соответствует максимуму пропускания модулятора) определяются в рассматриваемом случае также уравнением (3.5), и корни определяются так же, как и в п. 3.3. Следовательно, в приближении $S = 4$ в точке максимума пропускания модулятора импульс устойчив.

Если проследить, какие из уравнений (3.3) ответственны за результат (3.8), то можно прийти к следующим трем уравнениям:

$$\delta\chi_{r+1} = \delta\chi_r + \delta\rho_r/\rho_{0,\text{ст}} + \delta K_r/K_{\text{ст}}; \quad (3.10a)$$

$$\delta\rho_{r+1} = (1 + T(a'_{1,\text{ст}}/\nu_{2,\text{ст}}))\delta\rho_r + T\rho'_{0,\text{ст}}(\delta K_r/K_{\text{ст}}); \quad (3.10b)$$

$$\begin{aligned} \delta K_{r+1}/K_{\text{ст}} = (1 - \mu - K_{\text{ст}}^2 \bar{W}_{\text{вх.ст}}) (\delta K_r/K_{\text{ст}}) - \\ - (K_{\text{ст}}^2 - 1) \bar{W}_{\text{вх.ст}} \delta\chi_r. \end{aligned} \quad (3.10b)$$

Эта система уравнений почти совпадает с (3.7). В соответствии с неравенством $T \ll \mu^{1/2}$ здесь остались члены $\sim \mu$ в коэффициенте при δK , уравнения (3.10b). Эти члены отражают изменение коэффициента усиления активной среды, обусловленное изменением энергии спонтанного излучения $\mu(\delta K_r/K_{\text{ст}})$ и изменением энергии выходного импульса $K_{\text{ст}} \bar{W}_{\text{вх.ст}} \delta K_r$. Как и в (3.7), в (3.10) не входят отклонения $\delta\chi_s^{(r)}$ и, следовательно, возмущения формы импульса не дают вклада в инкремент (декремент), определяемый (3.8).

Определяя из характеристического уравнения системы (3.10) величину $|\lambda|^2$ для двух корней, для которых $\lambda - 1 \sim \mu^{1/2}$ при $T \rightarrow 0$, найдем, что она полностью совпадает с (3.8).

Неустойчивость, определяемая формулой (3.8) (или (3.4)), по-видимому, связана с тем, что отклонение какой-либо из величин от стационарного значения (максимальной амплитуды $\delta\chi$, коэффициента усиления δK или положения импульса) приводит к такому отклонению времени пробега импульса по резонатору от стационарного и, соответственно, изменению пропускания модулятора в «точке прохождения импульса», что в определенных случаях имеет место раскачка амплитуды поля.

В основу проведенного анализа положено представление формы импульса в виде (1.5), которую можно считать гауссовой формой, несколько измененной благодаря учету более высоких степеней временной координаты x в показателе экспоненты. Такой подход позволяет описать состояние системы набором величин: χ_r — амплитуды импульса, K_r — коэффициента усиления активной среды, ν_s — параметров, описывающих форму импульса $s = 2, 3, \dots, S$, ρ_r — коэффициента пропускания модулятора, соответствующего точке максимума импульса, которые являются функциями номера r прохода импульса по резонатору. Для этих величин можно написать уравнения преобразования, из которых определяется стационарный режим работы генератора и которые позволяют провести исследование устойчивости стационарного режима. Исследование устойчивости сводится к исследованию корней алгебраического уравнения $(S+2)$ -й степени. В ряде случаев некоторые корни характеристического уравнения могут быть найдены анали-

тически. Анализ показывает, что при выполнении неравенства $\mu^{1/2} \ll T$, где $\mu = T_L/T_{1\text{эфф}}$, $T = T_2/T_L$, опережающий импульс (импульс опережает момент максимума пропускания модулятора) оказывается неустойчивым. При выполнении обратного неравенства $T \ll \mu^{1/2}$, что характерно для твердотельных лазеров, тоже имеет место неустойчивость в некоторой области опережения, если упомянутое неравенство выполнено недостаточно сильно. Когда максимум импульса проходит точно в момент максимального пропускания модулятора, то вплоть до приближения $S = 4$ этот режим оказывается устойчивым. Полное исследование (которое здесь не проводилось) заключалось бы в изучении поведения всех $S + 2$ корней характеристического уравнения системы (3.3) в комплексной плоскости $\lambda - 1$ в зависимости отстройки (или положения импульса относительно максимума пропускания модулятора).

Метод, с помощью которого здесь проводилось исследование стационарного режима генерации и его устойчивости, позволяет учесть также влияние насыщения активной среды на форму импульса (т. е. учесть влияние изменения разности населенностей на интервале, занятом импульсом, на форму импульса) и включить в рассмотрение также и фазовую модуляцию.

Автор благодарен В. И. Беспалову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Haken H, Pauthier M. — IEEE J. Quant. Electr., 1968, QE-4, p. 454.
2. Siegman A. E., Kuizenga D. J. — Appl. Phys. Lett., 1969, 14, p. 181.
3. Коваленко Е. С. — Изв. вузов — Физика, 1970, № 1, с. 65.
4. Беспалов В. И. — Диссертация. Горький, НИРФИ, 1970
5. Kuizenga D. J., Siegman A. E. — IEEE J. Quant. Electr., 1970, QE-6, p. 694.
6. Siegman A. E., Kuizenga D. J. — IEEE J. Quant. Electr., 1970, QE-6, p. 803.
- 7 Гуревич Г. Л., Ингель Л. Х — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 2, с. 219.
8. Haus H. A. — IEEE J. Quant. Electr., 1975, QE-11 (Part I), p. 323.
9. Cutler C. C. — Proc IRE, 1955, 43, p. 140.
10. Беспалов В. И., Гольдберг В. Н., Дауме Э. Я., Зарница И. Г. — Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике — М.: МГУ, 1974, с. 337.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
19 марта 1980 г.,
после доработки
декабря 1980 г.

STABILITY OF THE PULSE GENERATION IN LASER WITH PERIODIC MODULATION OF LOSSES

Eh. Ya. Daume

In a travelling wave laser with one-directional generation, the active material of which is two-level with uniformly broadened amplification line, the stationary pulsed generation is considered which is obtained in mode synchronization by the periodic loss modulation in a resonator. For the pulse form close to the Gaussian the stability of the periodic regime is studied. It is shown that the pulse formed in the maximum of the modulator passing is stable. For an advance pulse (relative to the point of the maximum of the modulator passing) the instability of the periodic regime takes place with a weak saturation effect in an active medium and the strong dispersion of the amplification coefficient. When the saturation increases and the dispersion of the amplification coefficient decreases the stability boundary may move to the side of advance.