

УДК 621.396 67

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ОСИ УЗКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

Л. А. Пазынин, В. Г. Сологуб

В рамках приближения заданного тока рассмотрена нестационарная задача о рассеянии собственного поля точечного заряда, равномерно движущегося вдоль оси бесконечно тонкого цилиндрического идеально проводящего кольца. На основе одного из вариантов метода частичного обращения оператора получены аналитические выражения для рассеянного поля, являющиеся асимптотически точными, когда длина образующей кольца много меньше его диаметра.

Число нестационарных задач, связанных с рассеянием поля движущегося заряда на одиночном идеально проводящем экране, для которых можно получить решение в замкнутой форме, весьма невелико [1-3]. Поэтому обычно решение таких задач строится с помощью численных или численно-аналитических методов. Однако часто имеется возможность получения аналитического решения для предельных значений какого-нибудь из параметров, входящих в описание задачи (см., например, [4]). В данной работе на основе метода, предложенного в [5] и развитого в [6], найдено аналитическое выражение для поля, возникающего при пролете точечного заряда вдоль оси конечного отрезка круглого волновода. Полученное решение является асимптотически точным в случае, когда длина отрезка волновода много меньше его диаметра (узкое кольцо).

Вдоль оси цилиндрической системы координат r, φ, z с началом координат в середине кольца, с постоянной скоростью v движется точечный заряд величины q . Отрезок круглого идеально проводящего волновода длиной d расположен, как показано на рис. 1. Полное поле $E^n(r, z, t)$, $H^n(r, z, t)$ представим в виде суммы собственного поля $E_0(r, z, t)$, $H^0(r, z, t)$ заряда, движущегося в свободном пространстве, и рассеянного поля $E(r, z, t)$, $H(r, z, t)$, обусловленного наличием экрана. Поле $E(r, z, t)$, $H(r, z, t)$ известным образом выражается через продольную компоненту электрического вектора Герца $\Pi_z(r, z, t)$, которую, учитывая спектральное представление собственного поля точечного заряда, будем искать в виде

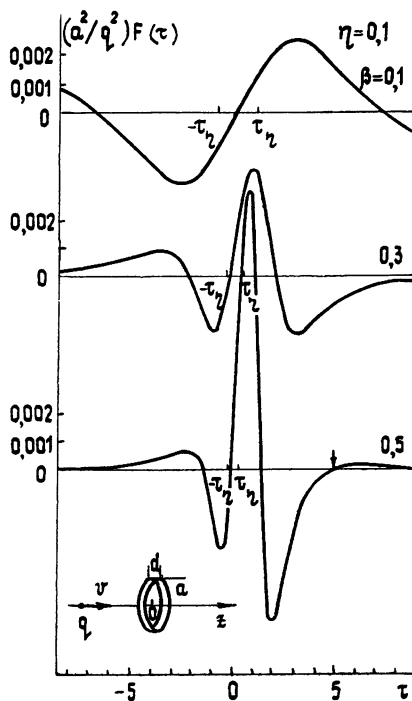


Рис. 1.

$$\Pi_z(\rho, \zeta, \tau) = (2q\gamma^2/\pi) \operatorname{Re} i \int_0^\infty \kappa K_0(\kappa\gamma) \exp(-i\kappa\tau) \times \quad (1)$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty X(s) \left\{ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g) J_0(\rho g) \\ J_0(g) H_0^{(1)}(\rho g) \end{array} \right\} \exp(i\zeta s) ds d\kappa.$$

Здесь верхняя строка берется при $\rho < 1$, нижняя — при $\rho > 1$, $\rho = r/a$, $\zeta = z/a$, $\tau = ct/a$, a — радиус волновода, c — скорость света, $\gamma = \sqrt{\beta^2 - 1}$, $\beta = v/c$, $\kappa = \omega c/a$, ω — частота, $K_0(x)$ — функция Макдональда, $J_0(x)$ и $H_0^{(1)}(x)$ — функции Бесселя первого и третьего рода соответственно, и выбрана та ветвь корня $g(s) = \sqrt{\kappa^2 - s^2}$, для которой $\operatorname{Im} g \geq 0$ (когда $\operatorname{Im} g = 0$, то $\operatorname{Re} g > 0$).

В работе [7] показано, что искомая функция $X(s)$, представляющая собой (с точностью до множителя, не зависящего от s) преобразование Фурье по ζ плотности поверхностного тока, будет удовлетворять следующему интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$X(s) = \eta \int_{-\infty}^\infty X(t) (|t|/s) \varepsilon(t) V_{\eta s}^{\eta t} dt - \quad (2)$$

$$- (\pi i \eta / s) V_{\eta s}^{\eta \beta^{-1}} \quad (-\infty < s < \infty),$$

где

$$V_{\eta s}^{\eta} = (\lambda/2) [J_0(\lambda) J_1(\mu) - J_0(\mu) J_1(\lambda)] / (\mu - \lambda),$$

$$\varepsilon(t) = 1 + i\pi |t|^{-1} g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g), \quad \eta = d/2a.$$

Интегральный оператор, порожденный ядром этого уравнения, как оператор, действующий из пространства $L_2(-\infty, \infty)$ в $L_2(-\infty, \infty)$, является вполне непрерывным, и для его нормы имеет место оценка

$$\|K\|_{L_2} < C \eta (1 + \kappa |\ln \kappa|^{1/2}).$$

Поэтому при любом фиксированном κ , выбрав η малым, так что

$$\eta \ll 1, \quad \kappa \eta \ll 1, \quad (3)$$

решение интегрального уравнения может быть получено методом последовательных приближений. Нулевое приближение дает правая часть интегрального уравнения. Нетрудно показать, что при условии (3)

$$X(s) = -(1/2)\pi i \eta^2 \int_0^1 y J_0(\eta sy) J_0(\eta \kappa \beta^{-1} y) dy (1 + O((\kappa + 1)\eta)). \quad (4)$$

При отыскании переходных характеристик рассеянного поля в дальнейшем ограничимся нулевым приближением. Для вычисления потенциала $\Pi_z(\rho, \zeta, \tau)$ при $\rho \neq 1$ можно воспользоваться разложением $X(s)$ в ряд по степеням ηs (так как подынтегральная функция убывает по s экспоненциально):

$$X(s) = -(1/2)\pi i \eta^2 [J_1(\kappa \eta \beta^{-1}) / \kappa \eta \beta^{-1}] (1 + O(\eta s)).$$

С точностью до величин $O(\eta)$ по сравнению с выписанным здесь главным членом потенциал Герца равен

$$\Pi_z(\rho, \zeta, \tau) = 2q\beta\gamma^2\eta \operatorname{Re} \int_0^\infty d\kappa \exp(-i\kappa\tau) K_0(\kappa\gamma) \times$$

$$\begin{aligned} & \times J_1(x\eta\beta^{-1}) \int_0^\infty J_0(y) J_0(\rho y) \frac{\exp(i|\zeta| \sqrt{x^2 - y^2})}{\sqrt{x^2 - y^2}} y dy = \\ & = 2q\beta\gamma^2\eta \operatorname{Im} \int_{|\zeta|}^\infty G_1(x, \tau) G_2(x, \rho, \zeta) dx, \end{aligned}$$

где

$$G_1(x, \tau) = \int_0^\infty K_0(x\gamma) J_1(x\eta\beta^{-1}) \exp[i(x - \tau)x] dx,$$

$$G_2(x, \rho, \zeta) = \int_0^\infty J_0(y) J_0(\rho y) J_0(y \sqrt{x^2 - \zeta^2}) y dy.$$

Здесь было использовано представление [8]

$$i \frac{\exp(i|\zeta| \sqrt{x^2 - y^2})}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \int_{|\zeta|}^\infty J_0(y \sqrt{x^2 - \zeta^2}) \exp(ixx) dx.$$

Подставив известные выражения [8] для интегралов G_1 и G_2 , получим

$$\begin{aligned} \Pi_z(\rho, \zeta, \tau) &= (q/2\pi) \beta^2 \gamma^2 \eta \int_{\sqrt{(1-\rho)^2 + \zeta^2}}^{\sqrt{(1+\rho)^2 + \zeta^2}} G(x - \tau) [-1 + \\ &+ 2(\rho^2 - \zeta^2 + x^2) - (\rho^2 + \zeta^2 - x^2)^2]^{-1/2} dx, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \Delta^{-1/4} \ln [(\beta^2 \gamma^2 + (\eta + \beta x)^2) / (\beta^2 \gamma^2 + (\eta - \beta x)^2)] \times \\ &\times K\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{1 - (\beta^2 \gamma^2 + \beta^2 x^2 - \eta^2) \Delta^{-1/2}}\right), \end{aligned}$$

где $\Delta = (\eta^2 + \beta^2 \gamma^2 - \beta^2 x^2)^2 + 4\beta^4 \gamma^2 x^2$, K — эллиптический интеграл первого рода. Исходя из данного выражения, получим следующее представление для потока вектора Пойнтинга через сферу радиуса $R = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \gg 1$ (мощность излучения):

$$\begin{aligned} P(\tau) &= (c/8\pi^2) \int_{S_R} [E(\rho, \zeta, \tau), H(\rho, \zeta, \tau)]_R ds = \\ &= (c/3\pi) [(q/4a) \beta^2 \gamma^2 (\partial^2 / \partial \tau^2) G(R - \tau)]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Единственная отличная от нуля компонента электрического поля на оси z при этом будет иметь вид

$$E_z(0, \zeta, \tau) = \frac{1}{4} qa^{-2} \beta^2 \gamma^2 \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \frac{1}{u} G(u - \tau), \quad (7)$$

где $u = \sqrt{1 + \zeta^2}$.

Как уже отмечалось, выражение для потенциала (5) справедливо во всем пространстве вне поверхности $\rho = 1$. Для вычисления поля при $\rho = 1$ воспользуемся выражением (4). Ограничимся вычислением поверхностного тока на кольце ($\rho = 1$, $|\zeta| < \eta$). Спектральная плотность поверхностного тока имеет вид

$$\tilde{j}_z(\zeta, \mathbf{x}) = (c/4\pi) [\tilde{H}_\varphi(1 + 0, \zeta, \mathbf{x}) - \tilde{H}_\varphi(1 - 0, \zeta, \mathbf{x})] =$$

$$\begin{aligned}
&= (-iqc\kappa^2\gamma^2/2\pi^3a^2) K_0(\kappa\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \exp(i\zeta s) ds = \\
&= (-qcx^2\gamma^2/2\pi^2a^2) K_0(\kappa\gamma) \int_{\zeta}^{\eta} J_0(\kappa\beta^{-1}t) (tdt/\sqrt{t^2-\zeta^2}) (1 + O(\eta)).
\end{aligned}$$

Отсюда плотность поверхностного тока с точностью до слагаемых порядка $O(\eta)$, по сравнению с выписанными, равна

$$\begin{aligned}
j_z(\zeta, \tau) &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \tilde{j}_z(\zeta, \kappa) \exp(-i\kappa\tau) d\kappa = \\
&= \frac{qc}{\pi^2a^2} \beta^3\gamma^2 \frac{\partial}{\partial\tau} \tau \int_{\zeta}^{\eta} \frac{K(k) - 2E(k)}{[(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\tau^2 - y^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2y^2]^{3/4}} \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - \zeta^2}},
\end{aligned} \tag{8}$$

где $K(k)$, $E(k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода,

$$k = 2^{-1/2} \{1 - (\beta^2\gamma^2 + \beta^2\tau^2 - y^2) [(\beta^2\gamma^2 + \beta^2\tau^2 - y^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2y^2]^{-1/2}\}^{1/2}.$$

Погрешность асимптотических формул для спектральных компонент рассеянного поля мала при выполнении неравенств (3).

Нетрудно показать, что для того, чтобы временные зависимости имели погрешность, не превышающую погрешности спектральных зависимостей, необходимо, чтобы выполнялось дополнительное ограничение на параметры задачи, связанное с экспоненциальным характером убывания спектральных характеристик поля с ростом частоты

$$\eta \ll \min(1, \gamma). \tag{9}$$

Отметим, что при выполнении более сильного неравенства

$$\eta \ll \beta\gamma \tag{10}$$

выражение для $\Pi_z(\rho, \zeta, \tau)$ можно существенно упростить. В этом случае функция $G(x) = 2\pi\beta^{-2}\eta x(\gamma^2 + x^2)^{-3/2}(1 + O(\eta^2))$. Соответствующее выражение для поля на оси кольца будет иметь вид

$$\begin{aligned}
E_z(0, \zeta, \tau) &= \frac{\pi q}{2a^2} \gamma^2\eta^2 \left\{ \frac{2\zeta^2 - 1}{u^5} \frac{u - \tau}{[\gamma^2 + (u - \tau)^2]^{3/2}} - \frac{2\zeta^2 - 1}{u^4} \times \right. \\
&\times \left. \frac{\gamma^2 - 2(u - \tau)^2}{[\gamma^2 + (u - \tau)^2]^{5/2}} + \frac{3}{u^3} \frac{(u - \tau) [3\gamma^2 - 2(u - \tau)^2]}{[\gamma^2 + (u - \tau)^2]^{7/2}} \right\} (1 + O(\eta^2)).
\end{aligned} \tag{11}$$

При анализе этого выражения ограничимся наиболее важным частным случаем $\zeta = \beta\tau$, т. е. рассмотрим зависимость силы реакции излучения $F(\tau) = qE_z(0, \beta\tau, \tau)$ от времени. Для больших времен $|\tau| \gg 1$

$$F(\tau) = -\frac{\pi q^2}{a^2} \gamma^2\eta^2 \frac{1}{\beta^3 |\tau|^3} \frac{\tau - 3\beta|\tau|}{|\tau - \beta|\tau|^3} (1 + O(\tau^{-2})), \tag{12}$$

и, следовательно, при отрицательных τ независимо от величины скорости $F > 0$, т. е. при подлете к кольцу на заряд со стороны рассеянного поля действует ускоряющая сила, что говорит о квазистатическом характере взаимодействия для $\tau < 0$ между движущимся зарядом и кольцом. При этом $F(\tau) = O(\tau^{-5})$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Для положительных τ ($\tau \gg 1$) знак F зависит от величины скорости заряда. Если $\beta = 1/3$, то

главный член разложения $F(\tau)$ (12) обращается в нуль и $F(\tau)$ убывает, как τ^{-7} . Для $\beta \neq 1/3$ $F(\tau) = O(\tau^{-5})$. При этом для $\beta < 1/3$ $F < 0$, для $\beta > 1/3$ $F > 0$. Значение $\beta = 1/3$ характеризуется тем, что при $\beta < 1/3$ сила реакции $F(\tau)$ имеет три корня, при $\beta > 1/3$ — четыре (рис. 1).

Интересно, что подобная ситуация имеет место и при движении заряженной нити вблизи идеально проводящей полуплоскости. В работе Кузнецова и Рубина [3] приведено соответствующее аналитическое выражение (формула (7) в [3]) для силы реакции. Из него следует, что при движении нити параллельно полубесконечному экрану в направлении «к экрану» (т. е. в обозначениях работы [3] при $\theta = \pi$) сила реакции $F(\tau)$ равна нулю при $\tau_0 = \beta^{-1}(1 - \beta)[(1 + \beta)(3\beta - 1)]^{-1/2}$. Поэтому при $\beta < 1/3$ $F(\tau)$ не обращается в нуль, а при $\beta > 1/3$ существует единственный корень τ_0 , при этом оказывается, что порядок убывания $F(\tau)$ при $\beta = 1/3$ на две единицы больше, чем при $\beta \neq 1/3$.

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что вклад главного члена в разложении F по степеням η (т. е. вклад $E_z(0, \zeta, \tau)$ из (11) при $\zeta = \beta\tau$) в полную работу силы реакции за все время движения заряда равен нулю. Ненулевой вклад в эту работу дает следующий член разложения F , имеющий порядок $O(\eta^4)$. На рис. 1 показана зависимость безразмерной силы реакции $(a^2/q^2)F$ от времени, рассчитанная с помощью формулы (7). Стрелкой отмечено положение четвертого корня. Точки $\pm\tau_\eta = \pm\eta/\beta$ — моменты времени, в которые заряд пролетает на минимальном расстоянии от кромок кольца.

Потенциал Герца вдали от кольца при выполнении условия (10) имеет вид

$$\Pi_z(\rho, \zeta, \tau) = q\gamma^2\eta^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{R} \frac{R - \tau}{[\gamma^2 + (R - \tau)^2]^{3/2}} (1 + O(R^{-1})).$$

Поляризация рассеянного поля вдали от кольца и его угловое распределение оказываются в точности такими же, как и у электрического диполя, находящегося в начале координат, с моментом, ориентированным в направлении движения заряда. Мощность излучения в рассматриваемом случае равна

$$P(\tau) = \frac{3}{4} \pi \frac{q^2 c}{a^2} \gamma^4 \eta^4 (R - \tau)^2 \frac{[3\gamma^2 - 2(R - \tau)^2]^2}{[\gamma^2 + (R - \tau)^2]^7} \quad (13)$$

и имеет два максимума при $\tau_{1,2} = R \pm (1/2)\gamma\sqrt{6 - \sqrt{30}}$, связанные с наличием двух максимумов у тангенциальной компоненты E_z^0 собственного поля точечного заряда на поверхности кольца при $\tau_{1,2}^0 = \zeta\beta^{-1} \pm \gamma/\sqrt{2}$. При этом временной интервал $\tau_2 - \tau_1$ между максимумами в рассеянном поле примерно в два раза меньше соответствующего интервала $\tau_2^0 - \tau_1^0$ для собственного поля заряда.

Важной характеристикой рассеянного поля являются полные потери на излучение за все время движения заряда. В случае малых скоростей ($\beta \ll 1$) интегрирование выражения (13) дает

$$W = \frac{a}{c} \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau) d\tau = \frac{q^2}{a} \frac{375}{4096} \pi^2 \beta^3 \eta^4. \quad (14)$$

Эту же характеристику можно найти, воспользовавшись следующим представлением для спектральной плотности потерь на излучение:

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} \int_{S_R} [\tilde{E}(\rho, \zeta, \mathbf{x}), \tilde{H}^*(\rho, \zeta, \mathbf{x})]_R dS =$$

$$= \frac{\tilde{q}^2 x^3 \gamma^4}{\pi^2 c} K_0^2(x\gamma) \operatorname{Re} X^*(x\beta^{-1}) =$$

$$= \frac{q^2}{16c} (x\gamma\gamma)^4 \frac{J_1^2(x\gamma\beta^{-1})}{(x\gamma\beta^{-1})^2} K_0^2(x\gamma) \{4x^2 J_0(2x) +$$

$$+ 2x J_1(2x) + (\pi/2) (4x^2 - 1) [J_1(2x) H_0(2x) - J_0(2x) H_1(2x)]\} (1 + O(\eta^2)),$$

которое следует из уравнения (2) при $\eta \ll 1$. Здесь $H_i(x)$ — функции Струве ($i = 0, 1$). Выражение для полных потерь на излучение, найденное по формуле

$$W = 2(c/a) \int_0^\infty \tilde{P}(x) dx,$$

является справедливым в более широком диапазоне скоростей движения заряда, включая релятивистские скорости.

В заключение на примере плотности индуцированного на кольце поверхностного тока выясним, к чему приводит учет в его асимптотическом разложении следующего по параметру малости η слагаемого. Пренебрегая величинами порядка $O(\eta^3)$, получим при $\eta \ll \beta\gamma$

$$j_z(\zeta, \tau) = \frac{-qc}{4\pi a^2} \gamma^{2\beta-1} \left\{ 2\beta \frac{\gamma^2 - 2\tau^2}{(\gamma^2 + \tau^2)^{5/2}} + 3\zeta\tau \frac{3\gamma^2 - 2\tau^2}{(\gamma^2 + \tau^2)^{7/2}} \right\} \sqrt{\eta^2 - \zeta^2}.$$

Главный член здесь описывает симметричное как вдоль образующей кольца, так и во времени распределение тока. Второе слагаемое указывает на небольшое (для узкого кольца) отклонение в распределении тока от симметричного как по пространственной, так и по временной переменной. Поэтому максимум в распределении индуцированного тока вдоль образующей кольца не совпадает с его серединой при $\tau \neq 0$. Для небольших τ ($\tau < \gamma/\sqrt{2}$), когда рассеяние наиболее велико, максимум в распределении j_z по ζ смещен от средней точки $\zeta = 0$ на величину $O(\beta\tau\eta^2)$ в ту сторону, где в данный момент находится движущийся заряд. Следствием этого для кольца, длиной которого нельзя пренебречь по сравнению с его диаметром, будет нарушение симметрии в угловом распределении поля, характер которого к тому же будет меняться с течением времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанцев А. П., Сурдутович Г. И — ДАН СССР, 1962, 147, № 1, с. 74.
2. Гишинский И. А. — ДАН СССР, 1963, 150, № 4, с. 767.
3. Кузнецов А. Б., Рубин С. Б. — ЖТФ, 1971, 41, № 9, с. 1851.
4. Lee K. S. H., Liu Tom K., Marin Lennart. — IEEE Trans., 1977, AP-25, № 5, p. 671.
5. Сологуб В. Г. — ЖВМ и МФ, 1971, 11, № 4, с. 837.
6. Лапта С. И., Сологуб В. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 10, с. 1588.
7. Пазынин Л. А., Сологуб В. Г. — Тезисы докладов II Всесоюзного симпозиума по миллиметровым и субмиллиметровым волнам. — Харьков: ИРЭ АН УССР, 1978, 1, с. 298.
8. Градштейн И. С., Рыжик М. И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 мая 1981 г.

RADIATION OF A POINT CHARGE UNIFORMLY MOVING ALONG THE AXIS OF A NARROW CYLINDRICAL RING

L. A. Pazyinin, V. G. Sologub

In the frames of the given current approximation a nonstationary problem is considered on scattering of a point charge self-field uniformly moving along the axis of an infinitely thin cylindrical ideally conducting ring. Based on a variant of the method of partial operator reversion, analytical expressions have been derived for a scattering field. They are asymptotically accurate when the length of the ring element is much smaller than its diameter.