ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 621.372.8.029

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ В ОТКРЫТОМ ВОЛНОВОДЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ ГРАНИЦАМИ

Н. П. Жук, О. А. Третьяков

На основе двухсторонних эквивалентных граничных условий для шероховатой поверхности в приближении Бурре получены выражения для сдвига собственных волновых чисел в слоистом нерегулярном волноводе. Рассмотрены случаи звукового и электромагнитного полей. Показано, в частности, что влияние шероховатостей может быть определяющим в формировании потерь

1. Волноводные системы со статистически неровной границей рассматривались во многих работах [1–4]. Из имеющихся методов исследования таких волноводов особенно результативным представляется метод, который позволяет сформулировать краевую задачу для волнового поля, усредненного по ансамблю неровностей, с эквивалентными граничными условиями, которые учитывают многократное рассеяние на неровностях границы [2–4]. Основные применения этого метода связаны с исследованием распространения волн в закрытых волноводах. В работе [5] получены двухсторонние граничные условия в случае шероховатой границы раздела двух сред, что позволяет применить методику решения краевых задач к исследованию открытых нерегулярных волноводных систем.

Основное содержание работы — вычисление собственных волн дискретного спектра для слоистой среды, которая обладает волноводными свойствами, при наличии шероховатой границы раздела. Полученные результаты могут найти применение при расчете планарных волноводов интегральной оптики с учетом неровностей границ.

2. Рассмотрим сначала случай скалярного волнового поля, например акустического. Пусть слоистая среда занимает все пространство x, y, z и ее свойства описываются вещественными кусочно-непрерывными функциями $\mu(z)$, $k(z)$, которые при $z \to \pm\infty$ стремятся к предельным значениям $\mu_{2,0}$, $k_{2,0}$. Величина $k(z)$ является локальным волновым числом и пропорциональна частоте ω. Собственно планарному волноводу соответствует случай, когда область неоднородности среды заключена в конечном интервале $|z| < b$, вне которого ее характеристики постоянны и равны μ_2, k_2 во внешнем пространстве $z > b$, μ_0, k_0 — в подложке $z < -b$. При $z = d$ расположена средняя граница раздела, покрытая малыми и пологими неровностями, высота которых распределена по гауссову закону с нулевым средним и дисперсией σ. Неровности статистически однородные с коэффициентом корреляции $W(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = (x, y)$.

Функция $u(z, \boldsymbol{\varkappa})$ описывает распределение поля собственной волны по координате z, $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — волновой вектор. Величина $\mathrm{Re}\,\varkappa$ определяет набег фазы, $\mathrm{Im}\,\varkappa$ — затухание собственной волны $u(z, \boldsymbol{\varkappa})\exp[i\varkappa(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]$ в направлении распространения, которое определяется азимутальным углом φ. С помощью методов, изложенных в работах [1–4], краевую задачу для среднего поля $u(z, \boldsymbol{\varkappa})$ можно сформулировать следующим образом:

$$\left[\mu(z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu(z)}\frac{\partial}{\partial z}+k^2(z)+\lambda\right]u(z,\ \varkappa)=0; \qquad (1)$$

$$|u(z,\ \varkappa)|\to 0, \qquad |z|\to\infty; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\mu_+}\frac{\partial u_+}{\partial z}-\frac{1}{\mu_-}\frac{\partial u_-}{\partial z}=\left(A_--B\frac{\partial}{\partial z}\right)u_-+\left(A_++B\frac{\partial}{\partial z}\right)u_+; \qquad (3)$$

$$u_+-u_-=\left(E_--F\frac{\partial}{\partial z}\right)u_-+\left(E_++F\frac{\partial}{\partial z}\right)u_+,$$

$$\varkappa=\sqrt{-\lambda}, \qquad \operatorname{Im}\varkappa\geqslant 0, \qquad (4)$$

$$k_{\max,\min}=\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\ (k_2,\ k_0).$$

Здесь $u_\pm\equiv u(z,\ \varkappa)$, $\mu_\pm\equiv\mu(z)$ при $z\gtrless d$. Уравнение (1) рассматривается при $z\neq d$, а условия сопряжения (3) суть эквивалентные граничные условия на гладкой границе $z=d$. Коэффициенты $A_\pm$, B, $E_\pm$, F учитывают наличие шероховатостей и пропорциональны малому параметру σ^2. Они являются функциями переменных $\varkappa$, φ и не зависят от направления распространения φ для изотропных шероховатостей, для которых коэффициент корреляции зависит только от $r=(x^2+y^2)^{1/2}$. Мы будем пользоваться приближением Бурре для этих коэффициентов, которым учитывается определенная последовательность многократных рассеяний на шероховатой границе [4].

Решение краевой задачи на собственные значения (1)—(3) ищется обычным образом: вводим функции $\Phi^\pm(z,\ \lambda)$, которые являются решением уравнения (1) на всем интервале $|z|<\infty$ и подчиняются граничным условиям из (2): Φ^+ при $z\to+\infty$, Φ^- при $z\to-\infty$. Последние требования, в частности, определяют общий правильный лист римановых поверхностей $\Phi^\pm(z,\ \lambda)$ как аналитических функций комплексного переменного λ, имеющих точки ветвления при $\lambda=-k_{2,0}$ [6]. Пронормируем эти функции так, чтобы в некоторой точке $z=b$, которая для планарного волновода совпадает с его верхней границей, выполнялись равенства

$$\Phi^\pm(b,\ \lambda)=1. \qquad (5)$$

Функции

$$u_\pm(z,\ \varkappa)=\Phi^\pm(z,\ \lambda)\left[\Phi^\pm(d,\ \lambda)\ \pm E_\mp\Phi^\mp(d,\ \lambda)-F\dot{\Phi}^\mp(d\mp 0,\ \lambda)\right] \qquad (6)$$

(точкой обозначено дифференцирование по z) удовлетворяют (1), (2) и последнему из условий в (3). «Сшивая» эти функции при $z=d$ в соответствии с первым условием в (3), получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\varkappa,\ \varphi)=0. \qquad (7)$$

Из выражения (6) видно, что шероховатости вносят возмущение порядка σ^2 в распределение мод волновода по координате z. Последнее обусловливает неортогональность собственных волн при интегрировании по поперечному сечению волновода. Это связано с тем, что оператор краевой задачи (1)—(3) для среднего поля является несамосопряженным.

Корни $\tilde{\varkappa}_n$ уравнения (7) зависят в общем случае от направления распространения φ. Эта зависимость отсутствует, как отмечалось выше, для изотропных шероховатостей.

Предполагая, что наличие шероховатостей не приводит к существенной перестройке дискретного спектра по сравнению со спектром волн регулярного волновода, вычислим добавки $\delta \varkappa_n = \tilde{\varkappa}_n - \varkappa_n$ к корням $\varkappa_n$ невозмущенного ($\sigma = 0$) дисперсионного уравнения

$$\Delta^0(\lambda) = 0, \qquad\qquad (8)$$
$$\Delta^0(\lambda) \equiv W[\Phi^+(z, \lambda), \Phi^-(z, \lambda)]/\mu(z)$$

(W — вронскиан) при фиксированном φ. В результате в приближении Бурре [4] получаем

$$\delta\varkappa_n = -\frac{\sigma^2}{2\varkappa_n M_n^2}\left\{\int W(\boldsymbol{\varkappa}_n - \boldsymbol{\varkappa}')\left[p^2\Phi^2(z, \lambda_n)\,\mathrm{H} + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu_-}{\mu_+}\beta\right)^2 \dot\Phi^2(z, \lambda_n)\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z\partial\xi} - 2\frac{\mu_-}{\mu_+}\beta p\Phi(z, \lambda_n)\dot\Phi(z, \lambda_n)\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right]d\boldsymbol{\varkappa}' + \qquad (9)$$

$$\left. + \frac{\mu_-}{\mu_+}[q + \beta(k_+^2 - \varkappa_n^2)]\,\Phi(z, \lambda_n)\dot\Phi(z, \lambda_n)\right\}, \qquad \mathrm{H} \equiv \mathrm{H}(z, \xi, -\varkappa'^2),$$

$$z = d + 0, \qquad \xi = d + 0, \qquad \beta = \frac{1}{\mu_+} - \frac{1}{\mu_-},$$

$$p \equiv p(\boldsymbol{\varkappa}_n, \boldsymbol{\varkappa}') = (k_+^2 - \boldsymbol{\varkappa}_n\cdot\boldsymbol{\varkappa}')/\mu_+ - (k_-^2 - \boldsymbol{\varkappa}_n\cdot\boldsymbol{\varkappa}')/\mu_-, \qquad q \equiv p(\boldsymbol{\varkappa}_n, \boldsymbol{\varkappa}_n),$$

$$M_n^2 = -\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta^0(\lambda)\Big|_{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = -\varkappa_n^2. \quad \Phi(z, \lambda_n) = \Phi^+.$$

Здесь $W(\boldsymbol{\varkappa}) = (2\pi)^{-2}\int W(\boldsymbol{r})\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$ — энергетический спектр шероховатостей, $k_\pm = k(d \pm 0)$, $\mu_\pm$ берется при $z = d$. Интегрирование по $\boldsymbol{\varkappa}'$ ведется в бесконечных пределах, $\Phi(z, \lambda_n) \equiv \Phi^+(z, \lambda_n)$ описывает моду гладкого волновода. Характеристическая функция Грина $\mathrm{H}(z, \xi, \lambda)$ при $|z| < \infty$ удовлетворяет уравнению, которое получается из (1), если в его правой части поставить точечный источник $\mu(z)\delta(z - \xi)$, и подчиняется условиям поглощения при $\mathrm{Im}\,k(z) = +0$ на бесконечности.

Вычислим интеграл в правой части формулы (9) путем интегрирования на плоскости $\boldsymbol{\varkappa}'$ в полярных координатах $\varkappa'$, φ' с учетом представления функции Грина

$$\mathrm{H}(z, \xi, \lambda) = \sum_m \frac{\Psi(z, \lambda_m)\Psi(\xi, \lambda_m)}{N^2(\lambda_m)(\lambda - \lambda_m)} + \int_{-k_{\max}^2}^{+\infty} \frac{\Psi(z, \lambda')\Psi(\xi, \lambda')}{N^2(\lambda')(\lambda - \lambda')}\,d\lambda' \qquad (10)$$

в виде разложения по собственным функциям дискретного спектра и интеграла по непрерывному спектру задачи

$$\left[\mu(z)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\mu(z)}\frac{\partial}{\partial z} + k^2(z) + \lambda\right]\Psi(z, \lambda) = 0, \qquad (11)$$
$$|\Psi(z, \lambda)| < \infty, \quad |z| \to \infty.$$

Собственные функции $\Psi(z, \lambda)$ удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z, \lambda)\Psi(z, \lambda')\frac{dz}{\mu(z)} = N^2(\lambda)\,\delta_{\lambda\lambda'}, \qquad (12)$$

где $\delta_{\lambda\lambda'}$ — дельта-функция Кронеккера или Дирака, $N^2(\lambda)$ — нормировочный коэффициент. Точки λ_m дискретного спектра лежат на отрицательной части вещественной оси левее точки $\lambda = -k^2_{\max}$. Вычисляя возникающий в (9) интеграл по $\varkappa'$ переходом к переменному λ' путем замены (4) и последующим контурным интегрированием с применением формул Племеля — Сохоцкого [8], получаем, что

$$\delta\varkappa_n = \delta\varkappa_n' + i\gamma_n. \tag{13}$$

Выражение для $\delta\varkappa'_n$ получается формально из формулы (9) для $\delta\varkappa_n$, если в последней заменить всюду $\mathrm{H}(z, \xi, \lambda')$ на $\operatorname{Re}\mathrm{H}(z, \xi, \lambda')$ и вычислять соответствующий интеграл по $\varkappa'$ в смысле главного значения (подынтегральное выражение имеет полюсы первого порядка в точках дискретного спектра $\varkappa' = \varkappa_m$).

Для γ_n получаем выражение

$$\gamma_n = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \left[\sum_m w(\varkappa_n, \varkappa_m) + \int\limits_0^{k_{\max}} w(\varkappa_n, \varkappa')\, d\varkappa' \right],$$

$$\left.\begin{aligned} w(\varkappa_n, \varkappa) = \sigma^2 [\pi W(\varkappa_n - \varkappa)/4\varkappa_n M_n^2 N^2(\varkappa)]\, [p(\varkappa_n, \varkappa) \times \\ \times \Psi(d, \varkappa)\Phi(d, \varkappa_n) - (\mu_-/\mu_+)\beta\dot{\Psi}(d+0, \varkappa)\dot{\Phi}(d+0, \varkappa_n)]^2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$N^2(\varkappa) = \begin{cases} N^2(\lambda)/2\varkappa & (\varkappa = \varkappa') \\ N^2(\lambda_m) & (\varkappa = \varkappa_m) \end{cases}.$$

Здесь через $\Psi(z, \varkappa)$, $\Phi(z, \varkappa)$ обозначены прежние функции $\Psi(z, \lambda)$, $\Phi(z, \lambda)$, но явно указана зависимость от волнового числа $\varkappa$, связанного со спектральным параметром λ соотношением (4), $N^2(\varkappa)$ — нормировочный коэффициент собственных функций по z.

Формулы (9), (14) справедливы для сдвига произвольных нулей невозмущенного дисперсионного уравнения. Наличие такого сдвига для волновых чисел вытекающих волн означает определенную перестройку непрерывного спектра [7]. Для собственных волн $\operatorname{Re}\delta\varkappa_n = \delta\varkappa'_n$, $\operatorname{Im}\delta\varkappa_n = \gamma_n$. Нетрудно показать, что в этом случае

$$M_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(z, \lambda_n)\, \frac{dz}{\mu(z)} > 0. \tag{15}$$

Таким образом, собственные волновые числа дискретного спектра приобретают положительную мнимую часть за счет рассеяния в паразитные собственные волны, распространяющиеся во всех направлениях (интеграл по φ' в (14)). Это вызывает затухание собственной волны в направлении ее распространения. Своеобразие открытого волновода проявляется в том, что выражение для затухания (14) содержит как сумму вкладов волн дискретного спектра, так и интеграл по непрерывному спектру, учитывающий вклад волн излучения. Непрерывный спектр задачи (11), как известно, двукратно вырожден при $-k^2_{\min} < \lambda$, $\lambda < +\infty$ [6], поэтому в формуле для затухания интеграл по $\varkappa'$ на участке $0 \leqslant \varkappa' \leqslant k_{\min}$ содержит сумму вкладов вырожденных волн излучения. Соответствующий знак суммы здесь и далее, как в формуле (10), опускается. Вклад в затухание дают только распространяющиеся собственные волны. Нераспространяющиеся волны излучения, у которых волновое число — мнимая величина, энергии вдоль волновода не переносят и ослабления собственной волны не вызывают. На дополнительный набег фазы за счет $\delta\varkappa'_n$ влияет связь со всеми собственными волнами — распространяющимися и нераспространяющимися.

В предельном случае анизотропных шероховатостей, зависящих только от координаты y, $W(\varkappa) = \delta(\varkappa_x) W(\varkappa_y)$. Выражения для $\delta\varkappa'_n$, γ_n получаются с помощью описанной выше методики из формулы (9) после интегрирования по переменной $\varkappa'_x$.

Полученные выше формулы относятся к весьма общей ситуации. Конкретизируем их применительно к однородному акустическому волноводу толщиной $b = 0{,}497$ на абсолютно мягкой подложке с шероховатой верхней границей $z = b$. Корреляционная функция шероховатостей — гауссова, с интервалами корреляции $l_x = 4{,}8$; $l_y = 0{,}5$ (числовые величины приводятся здесь в условных единицах). Плотность среды всюду равна единице; волновое число во внешнем пространстве $k_2 = 2\pi$, в волноводе $k_1 = 4\pi$. При этих условиях существуют две моды с волновыми числами $\varkappa_0 = 11{,}32$ и $\varkappa_1 = 7{,}01$. При распространении вдоль оси x ($\varphi = 0$) трансформация падающей волны в другие типы волн отсутствует, так как неровности очень длинные: $(\varkappa_0 - \varkappa_1) l_x \gg 1$. Для этого направления $\gamma_0 = 705$, $\gamma_1 = 11060$. В направлении $\varphi = \pi/2$ размер неровностей на порядок меньше и затухание волн уменьшается: $\gamma_0 = 257$, $\gamma_1 = 2523$.

3. Отмеченные выше особенности присущи также собственным волнам слоистого диэлектрического волновода при наличии шероховатой границы $z = d$. Своеобразие векторного поля сказывается, в частности, в деполяризации волн. Будем рассматривать волны, распространяющиеся вдоль направления y. Как следует из работы [5], среднее электромагнитное поле скаляризуется при помощи потенциалов $\widetilde{E}(z)$, $\widetilde{H}(z)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= [\widetilde{E},\ (i/k_0\,\varepsilon(z))\partial\widetilde{H}/\partial z,\ \ (\varkappa/k_0\,\varepsilon(z))\widetilde{H}]\exp(i\varkappa y), \\ \boldsymbol{H} &= [\widetilde{H},\ (1/ik_0)\partial\widetilde{E}/\partial z,\ \ -(\varkappa/k_0)\widetilde{E}]\exp(i\varkappa y), \end{aligned} \tag{16}$$

$\varepsilon(z)$ — диэлектрическая проницаемость, временная зависимость $\exp(-i\omega t)$ опущена. В отсутствие шероховатостей собственные волны распадаются на две группы: $\widetilde{E} \neq 0$, $\widetilde{H} \equiv 0$ (ТЕ-волны) и $\widetilde{E} \equiv 0$, $\widetilde{H} \neq 0$ (ТМ-волны). Если положить в уравнении (11) $k(z) = k_0\sqrt{\varepsilon(z)}$, то функция $\widetilde{E}(z)$ удовлетворяет ему при $\mu(z) \equiv 1$, а $\widetilde{H}(z)$ — при $\mu(z) \equiv \varepsilon(z)$. Собственные функции уравнения (11), в котором произведены эти замены коэффициентов, обозначим $\Psi_{1,\varepsilon}(z, \varkappa)$, $N^2_{1,\varepsilon}(\varkappa)$ — их нормировочные коэффициенты по $\varkappa$. Аналогичную индексацию применим и для других величин. Так, $\Phi^{\pm}_{1,\varepsilon}(z, \varkappa)$ совпадают с функциями $\Phi^{\pm}(z, \varkappa)$ предыдущего пункта, если в уравнении для последних положить $k(z) = k_0\sqrt{\varepsilon(z)}$, $\mu(z) \equiv 1$ или $\mu(z) \equiv \varepsilon(z)$ соответственно.

Деполяризация проявляется в том, что, например, для квази-ТМ-волн возникает отличный от нуля потенциал $\widetilde{E}(z)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_{\pm}(z) &= \Phi^{\pm}_{\varepsilon}(z, \widetilde{\varkappa}_n), \\ \widetilde{E}_{\pm}(z) &= \nu\Phi^{\pm}_{1}(z, \varkappa_n)\Phi^{\mp}_{1}(d, \varkappa_n), \end{aligned} \tag{17}$$

где величина ν равна

$$\nu = -\sigma^2\beta^2_{\varepsilon}\frac{ik_0\,\varepsilon_-}{\Delta^0_1(\lambda_n)}\int W(\varkappa_n - \varkappa')\left[\varkappa_n\varkappa'_x\frac{\partial \mathrm{H}_{\varepsilon}}{\partial z}\Phi_{\varepsilon}(d, \varkappa_n) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_+\varepsilon_-\frac{\varkappa'_x\varkappa'_y}{\varkappa'^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2_+}\frac{\partial^2 \mathrm{H}_{\varepsilon}}{\partial z\partial\xi} - k_0^2\mathrm{H}_1\right)\dot{\Phi}_{\varepsilon}(d+0, \varkappa_n)\right]d\varkappa' \tag{18}$$

$$(z = d+0,\ \ \xi = d+0), \qquad \mathrm{H}_{1,\varepsilon} \equiv \mathrm{H}_{1,\varepsilon}(z, \xi, -\varkappa'^2),$$

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon(d \pm 0), \qquad \beta_\varepsilon = (1/\varepsilon_+) - (1/\varepsilon_-);$$

$$\Delta^0_\mu(\lambda) \equiv W\,[\Phi^+_\mu(z, \lambda),\ \Phi^-_\mu(z, \lambda)]/\mu(z) \qquad (\mu = 1,\ \varepsilon). \tag{19}$$

Смысл обозначения $H_\mu(z, \xi, \lambda)$ $(\mu = 1, \varepsilon)$ понятен из предыдущего. Отметим, что невозмущенное дисперсионное уравнение волн ТМ-типа имеет вид $\Delta^0_\varepsilon(\lambda_n) = 0$, поэтому величина $\Delta^0_1(\lambda_n) \neq 0$ в (18), так как вырождение отсутствует. Для изотропных или зависящих только от y шероховатостей $\nu = 0$ и деполяризация отсутствует.

Затухание собственных волн дается выражением

$$\gamma_n = \sum_{\mu=1,\,\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} \left[\ \sum_m w_\mu(\varkappa_n,\ \varkappa_m) + \int\limits_0^{k_{\max}} w_\mu(\varkappa_n,\ \varkappa')\,d\varkappa'\right] d\varphi',$$

$$w_\mu(\varkappa_n,\ \varkappa) = \sigma^2\beta^2_\varepsilon\,[\pi W(\varkappa_n - \varkappa)/4\varkappa_n M^2_n N^2(\varkappa)]\ \delta^n_\mu(\varkappa), \tag{20}$$

$$k_{\max} = \max k_0 \sqrt{\varepsilon(\mp\infty)}.$$

Коэффициент $w_\varepsilon(\varkappa_n, \varkappa)$ описывает вклад в затухание за счет рассеяния в волну типа ТМ, а $w_1(\varkappa_n, \varkappa)$ — в волну типа ТЕ. Под знаком суммы в квадратных скобках в (20) производится суммирование по собственным волнам дискретного спектра соответствующей поляризации. Собственные волновые числа для обеих поляризаций обозначены одинаково — $\varkappa_m$, хотя они, разумеется, различны.

Для затухания квази-ТМ-волн величины δ^n_μ, M^2_n равны

$$\delta^n_\varepsilon(\varkappa) = [\varkappa_n\,\varkappa\Psi_\varepsilon(d,\ \varkappa_n) + (\varepsilon_-\varkappa_y/\varepsilon_+\varkappa)\dot{\Psi}_\varepsilon(d+0,\ \varkappa) \times$$
$$\times\ \dot{\Phi}_\varepsilon(d+0,\ \varkappa_n)/\Phi_\varepsilon(d,\ \varkappa_n)]^2\,\Phi^2(d,\ \varkappa_n),$$

$$\delta^n_1(\varkappa) = k^2_0\varepsilon_-(\varkappa^2_x/\varkappa^2)\,\Psi^2_1(d,\ \varkappa)\,\dot{\Phi}^2_\varepsilon(d+0,\ \varkappa_n), \tag{21}$$

$$M^2_n \equiv -\left.\frac{\partial\,\Delta^0_\varepsilon(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2_\varepsilon(z,\ \lambda_n)\,\frac{dz}{\varepsilon(z)},$$

$$\Delta^0_\varepsilon(\lambda_n) = 0.$$

Для затухания квази-ТЕ-волн эти величины равны

$$\delta^n_\varepsilon(\varkappa) = k^2_0\varepsilon^2_-(\varkappa^2_x/\varkappa^2)\,\Phi^2_1(d,\ \varkappa_n)\,\dot{\Psi}^2_\varepsilon(d+0,\ \varkappa),$$

$$\delta^n_1(\varkappa) = k^4_0\varepsilon^2_-\varepsilon^2_+(\varkappa^2_y/\varkappa^2)\,\Phi^2_1(d,\ \varkappa_n)\,\Psi^2_1(d,\ \varkappa), \tag{22}$$

$$M^2_n \equiv -\left.\frac{\partial\,\Delta^0_1(\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda_n} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2_1(z,\ \lambda_n)\,dz, \qquad \Delta^0_1(\lambda_n) = 0.$$

В заключение отметим, что с помощью полученных в [5] граничных условий, даваемых формулой (19) этой работы, аналогичным образом можно рассмотреть планарный волновод $0 \leqslant z \leqslant b$ на идеально проводящей шероховатой подложке. Затухание при этом по-прежнему определяется формулой (20). В частности, для однородной при $z \geqslant b$ среды затухание ТМ-волн, распространяющихся вдоль y, определяется следующими выражениями для коэффициентов $w_\mu(\varkappa_n, \varkappa)$:

$$\dot{w}_\varepsilon(\varkappa_n, \varkappa) = (\pi\sigma^2/\varkappa_n N_{n\varepsilon}^2 c_\varepsilon^2(b, \varkappa_n)) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{W(\varkappa_n - \varkappa_m)\,[k_0^2\varepsilon_1(0)\varkappa_{ym} - \varkappa_m^2\varkappa_n]^2}{\varkappa_m^2 N_{m\varepsilon}^2 c_\varepsilon^2(b, \varkappa_m)} & (\varkappa = \varkappa_m), \\ \dfrac{W(\varkappa_n - \varkappa)\,[k_0^2\varepsilon_1(0)\varkappa_y - \varkappa^2\varkappa_n]^2}{\pi c_\varepsilon^2(b, \varkappa_n)\varkappa\gamma(\varkappa)} \left[1 + \left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(b)\gamma(\varkappa)}\, \dfrac{\dot{c}_\varepsilon(b, \varkappa)}{c_\varepsilon(b, \varkappa)}\right)^2\right]^{-1} & (\varkappa = \varkappa'), \end{cases} \tag{23}$$

$$w_1(\varkappa_n, \varkappa) = (\pi\sigma^2\varepsilon_1(0)\, k_0^2/\varkappa_n c_\varepsilon^2(b, \varkappa_n) N_{n\varepsilon}^2) \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{W(\varkappa_n - \varkappa_m)\varkappa_{mx}^2}{\varkappa_m^2 N_{m1}^2 s_1^2(b, \varkappa_m)} & (\varkappa = \varkappa_m), \\ \dfrac{W(\varkappa_n - \varkappa)}{\varkappa s_1^2(b, \varkappa)\pi\gamma(\varkappa)} \left[1 + \left(\dfrac{\dot{s}_1(b, \varkappa)}{\gamma(\varkappa) s_1(b, \varkappa)}\right)^2\right]^{-1} & (\varkappa = \varkappa'), \end{cases}$$

$$N_{m,\varepsilon}^2 = \frac{1}{\varepsilon_2\rho_m} + 2\int_0^b \frac{c_\varepsilon^2(z, \varkappa_m)}{c_\varepsilon^2(b, \varkappa_m)}\, \frac{dz}{\varepsilon_1(z)},$$

$$N_{m1}^2 = \frac{1}{\rho_m} + 2\int_0^{+\infty} \frac{s_1^2(z, \varkappa_m)}{s_1^2(b, \varkappa_m)}\, dz,$$

$$k_i = k_0\sqrt{\varepsilon_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$\gamma(\varkappa) = \sqrt{k_2^2 - \varkappa^2}, \qquad \operatorname{Im}\gamma \geqslant 0.$$

Здесь $\rho_m \equiv \rho(\varkappa_m)$, $\rho(\varkappa) = \sqrt{\varkappa^2 - k_2^2}$, $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$; $c_\mu(z, \varkappa)$, $s_\mu(z, \varkappa)$ — решения уравнения (1) на интервале $0 \leqslant z \leqslant b$ при $k(z) \equiv k_1(z)$, $\mu = 1, \varepsilon$, удовлетворяющие начальным условиям $c_\mu = \dot{s}_\mu = \sqrt{\mu(0)}$, $\dot{c}_\mu = s_\mu = 0$ при $z = 0$.

Для $\delta\varkappa'_n$ получается выражение

$$\delta\varkappa'_n = -(\sigma^2/\varkappa_n N_{n\varepsilon}^2 c_\varepsilon^2(b, \varkappa_n))\, \mathrm{P}\int W(\varkappa_n - \varkappa) F(\varkappa)\, d\varkappa, \qquad F = F_2 - F_1, \tag{24}$$

$$F_1(\varkappa) = [k_0^2\varepsilon_1(0)\varkappa_y - \varkappa_n\varkappa^2]^2 \varkappa^{-2} \times$$

$$\times \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_1^2(b)\gamma^2(\varkappa) c_\varepsilon(b, \varkappa) s_\varepsilon(b, \varkappa) + \varepsilon_2^2 \dot{c}_\varepsilon(b, \varkappa)\dot{s}_\varepsilon(b, \varkappa)}{\varepsilon_1^2(b)\gamma^2(\varkappa) c_\varepsilon^2(b, \varkappa) + \varepsilon_2^2 \dot{c}_\varepsilon^2(b, \varkappa)}, \\ \dfrac{\varepsilon_1(b)\rho(\varkappa) s_\varepsilon(b, \varkappa) + \varepsilon_2 \dot{s}_\varepsilon(b, \varkappa)}{\varepsilon_1(b)\rho(\varkappa) c_\varepsilon(b, \varkappa) + \varepsilon_2 \dot{c}_\varepsilon(b, \varkappa)}. \end{cases}$$

Символ P в выражении для $\delta\varkappa'_n$ означает, что интеграл берется в смысле главного значения. В формуле для F_1 верхняя строка в фигурных скобках относится к области $|\varkappa| \leqslant k_2$, нижняя — $|\varkappa| \geqslant k_2$.

Выражение для F_2 получается из F_1, если в формуле для F_1 сомножитель перед фигурной скобкой заменить на $k_0^2 \varepsilon_1(0) \varkappa_x^2 \varkappa^{-2}$, а за скобкой заменить $\varepsilon_1(b)$, ε_2 на единицу, $c_\varepsilon(b, \varkappa)$—на $s_1(b, \varkappa)$, $s_\varepsilon(b, \varkappa)$—на $c_1(b, \varkappa)$.

Наличие шероховатой границы может быть одной из основных причин потерь энергии в открытом волноводе. Рассмотрим, к примеру, симметричный однородный диэлектрический волновод толщиной $2b$ с двумерными шероховатостями верхней границы и волны, распространяющиеся в поперечном к ним направлении. При $b = 0{,}5$ *мкм*, $\varepsilon_1 = 2{,}89$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 = 2{,}31$, $k_1 b = 5{,}34$ (это соответствует длине волны в свободном пространстве 1 *мкм*) в волноводе существуют по две ТЕ- и ТМ-моды. В случае очень длинных неровностей $l \gg b$ (l — характерный размер неровностей) затухание собственных волн равно $10^8 l \sigma^2 \eta$ *дБ/км*, где $\eta \approx 10$ для низших и $\eta \approx 70$ для высших мод, l, σ берутся в *мкм*. Видно, что при $l = 20$, $\sigma = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ потери за счет рассеяния на шероховатостях составляют 5000 *дБ/км*, тогда как омические потери в волноводах интегральной оптики обычно не превышают 20 *дБ/км* [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркузе Д Оптические волноводы — М: Мир, 1974.
2. Басс Ф. Г., Фрейлихер В. Д, Фукс И М. — Письма в ЖЭТФ, 1968, **7**, № 12, с 485.
3. Басс Ф Г., Фрейлихер В Д, Фукс И М — Изв вузов — Радиофизика, 1969, **12**, № 10, с 1521
4. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М: Наука, 1972.
5. Жук Н П, Третьяков О. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 12, с. 1476
6. Шевченко В В. — Дифференциальные уравнения, 1979, **15**, № 11, с. 2004.
7 Шевченко В. В — Изв вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 8, с. 1242.
8. Лаврентьев М. А, Шабат Б В. Методы теории функций комплексного переменного. — М: Наука, 1973.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию 25 ноября 1980 г.

NATURAL WAVES IN AN OPEN WAVEGUIDE WITH ROUGH BOUNDARIES

N. P. Zhuk, O. A. Tret'yakov

Based on bilateral equivalent boundary conditions for a rough surface expressions have been derived in the Bourret approximation for a shift of natural wave numbers in a stratified unregular waveguide. Cases of sound and electromagnetic fields have been considered It is shown that an effect of roughnesses may determine the formation of losses.