

УДК 681.513.6

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛА ОШИБКИ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА

А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, И. Е. Позументов

Исследуются статистические характеристики сигнала ошибки адаптивного фильтра, предназначенного для идентификации неизвестных систем. Анализ проводится при узкополосных входных воздействиях, огибающая которых имеет гауссово или телеграфное вероятностное распределение и является марковским случайным процессом. При телеграфной статистике огибающей получены точные выражения для мощности, корреляционной функции и спектра мощности сигнала ошибки, справедливые при любой мощности и времени корреляции входного сигнала

1. Как известно [1, 2], достаточно широкий круг задач адаптивной фильтрации можно свести к исследованию характеристик адаптивных фильтров по идентификации неизвестных систем. Функциональная схема адаптивной системы с обратной связью, реализующей алгоритм поиска минимума среднеквадратичной ошибки (СКО), приведена на рис. 1. Адаптивный фильтр, идентифицирующий  $2N$ -мерный вектор параметров  $H^T = (h_{1c}, \dots, h_{Nc})$  неизвестной системы, предполагается выполненным в виде трансверсального фильтра с регулируемыми весовыми коэффициентами  $w_i$  в отводах.

Для непрерывного градиентного алгоритма поиска минимума СКО дифференциальное уравнение, описывающее поведение вектора весовых коэффициентов  $W^T = (w_{1c}, \dots, w_{Nc})$  адаптивного фильтра, имеет вид

$$\frac{d}{dt} W = \gamma \epsilon(t) X(t), \quad \epsilon(t) = X^T(t) [H - W(t)] + n(t), \quad (1)$$

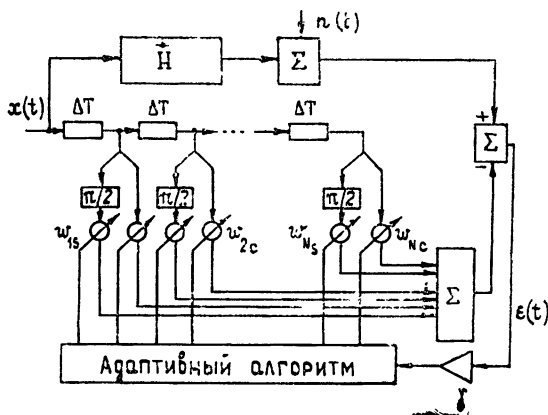


Рис. 1. Идентификация неизвестной системы  $H$  адаптивным трансверсальным фильтром  $W$  по критерию минимума среднеквадратичной ошибки  $\langle \epsilon^2 \rangle_{ст}$ .

где  $\gamma$  — коэффициент усиления цепей корреляционной обратной связи,

$$X^r(t) = (x_{1c}(t), x_{1s}(t), \dots, x_{Nc}(t), x_{Ns}(t)).$$

Считая входное воздействие  $x(t)$  достаточно узкополосным случайным процессом, статистически не связанным с аддитивным шумом идентифицируемой системы  $n(t)$ , запишем его следующим образом:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)), \quad (2)$$

где  $a(t)$  и  $\theta(t)$  — медленные (по сравнению с  $2\pi/\omega_0$ ) амплитуда и фаза колебания. Тогда, используя (1) и (2), для сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$  несложно получить следующее скалярное стохастическое уравнение второго порядка\*:

$$\frac{d^2}{dt^2} \varepsilon(t) + \gamma \frac{d}{dt} [\alpha(t)\varepsilon(t)] + \omega_0^2 \varepsilon(t) = \eta(t), \quad (3)$$

где  $\alpha(t) = \sum_{i=1}^N a_i^2(t)$ ,  $a_i(t) = a(t - (i-1)\Delta T)$ ,  $\eta(t) = (d^2/dt^2 + \omega_0^2)n(t)$ .

Это уравнение будет использоваться в дальнейшем для нахождения статистических характеристик сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$  адаптивного фильтра.

2. Одной из основных характеристик при исследовании точности идентификации неизвестной системы является мощность сигнала ошибки  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{ст}$ , для определения которой из (3) получим следующую систему уравнений для моментов совокупности  $\{\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle &= 2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle &= \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \varepsilon^2 \rangle - \gamma \left\langle \varepsilon \frac{d}{dt} [\alpha(t)\varepsilon] \right\rangle + \langle \eta(t)\varepsilon \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle &= 2 \langle \eta(t)\dot{\varepsilon} \rangle - 2\omega_0^2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle - 2\gamma \left\langle \dot{\varepsilon} \frac{d}{dt} [\alpha(t)\varepsilon] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее необходимо задать статистические характеристики случайной амплитуды  $a(t)$  входного воздействия  $x(t)$ .

Предположим, что  $a(t)$  является гауссовым марковским процессом, удовлетворяющим вспомогательному стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} a(t) + \nu a(t) = \xi(t). \quad (5)$$

Здесь  $\xi(t)$  — гауссов  $\delta$ -коррелированный случайный процесс,  $\nu$  — поло-са флуктуаций  $a(t)$ .

Используя (5), из (4) найдем

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle = 2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle,$$

\* Отметим, что при сделанных выше предположениях вектор весовых коэффициентов  $W$  и флуктуации фазы входного сигнала  $\theta(t)$  не входят в уравнение для сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle &= \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \varepsilon^2 \rangle - \gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle + \\ &+ 2\nu\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \varepsilon^2 \rangle - 2\gamma \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) a_i(t) \varepsilon^2 \rangle + \langle \eta(t) \dot{\varepsilon} \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle &= 2 \langle \eta(t) \dot{\varepsilon} \rangle - 2\omega_0^2 \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle - 2\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) (\dot{\varepsilon})^2 \rangle + \\ &+ 4\nu\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle - 4\gamma \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) a_i(t) \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Считая для простоты, что  $\eta(t)$  является белым гауссовым шумом и  $a_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , статистически независимы, применим для вычисления моментов, содержащих процессы  $\eta(t)$  и  $\xi_i(t)$ , формулу Фуруцу — Новикова [3]:

$$\langle \alpha(t) R[\alpha] \rangle = \int_0^t B_\alpha(t-\tau) \left\langle \frac{\delta R[\tau]}{\delta \alpha(\tau)} \right\rangle d\tau,$$

где  $R[\alpha]$  — произвольный функционал гауссова случайного процесса  $\alpha(t)$  с ковариационной функцией  $B_\alpha(\tau)$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle &= 2 \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle &= \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \varepsilon^2 \rangle - \gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle + \\ &+ 2\nu\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \varepsilon^2 \rangle - 2\nu N\gamma \langle a^2 \rangle \langle \varepsilon^2 \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle &= D_\eta - 2\omega_0^2 \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle - 2\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) (\dot{\varepsilon})^2 \rangle + \\ &+ 4\nu\gamma \sum_{i=1}^N \langle a_i^2(t) \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle - 4\nu N\gamma \langle a^2 \rangle \langle \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Для размыкания оставшихся в (7) смешанных моментов воспользуемся методом кумулянтных приближений [4] по совокупности  $\{a_i(t), Z\}$ , где  $Z = \varepsilon^2, \dot{\varepsilon} \dot{\varepsilon}, (\dot{\varepsilon})^2$  [5].

а) В качестве первого приближения рассмотрим гауссово приближение. В результате из (7) найдем замкнутое дифференциальное уравнение для мощности сигнала ошибки адаптивного фильтра:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^3}{dt^3} + 3N\gamma \langle a^2 \rangle \frac{d^2}{dt^2} + 2(\gamma^2 N^2 \langle a^2 \rangle^2 + 2\omega_0^2) \frac{d}{dt} + \right. \\ \left. + 4N\gamma \langle a^2 \rangle \omega_0^2 \right] \langle \varepsilon^2 \rangle = 2D_\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $D_\eta$  — спектральная плотность мощности процесса  $\eta(t)$ .

Из (8) следуют выражения для постоянных времени релаксации мощности сигнала ошибки на выходе схемы идентификации

$$\tau_{11}^{-1} = N\gamma \langle a^2 \rangle, \quad \tau_{2,3}^{-1} = N\gamma \langle a^2 \rangle \pm \sqrt{(N\gamma \langle a^2 \rangle)^2 - 4\omega_0^2} \quad (9)$$

и для величины СКО в стационарном состоянии

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст. г}} = \frac{D_\gamma}{2N\gamma \langle a^2 \rangle \omega_0^2}. \quad (10)$$

Из (9) при достаточно больших коэффициентах усиления цепи обратной связи  $\gamma$  ( $N\gamma \langle a^2 \rangle \gg 2\omega_0$ ) получим

$$\tau_2^{-1} \approx 2N\gamma \langle a^2 \rangle, \quad \tau_3^{-1} \approx 2\omega_0^2/N\gamma \langle a^2 \rangle. \quad (11)$$

Из (10), (11) видно, что ошибка идентификации появляется вследствие наличия аддитивного шума идентифицируемой системы  $n(t)$  и монотонно уменьшается с увеличением эквивалентной мощности входного воздействия  $\gamma \langle a^2 \rangle$  и числа каналов  $N$ . Однако при достаточно больших коэффициентах усиления в цепи обратной связи  $\gamma$  ( $N\gamma \langle a^2 \rangle \gg 2\omega_0$ ) время релаксации СКО может быть весьма большим ( $\tau_3 \sim \sim N\gamma \langle a^2 \rangle / 2\omega_0^2$ )\*.

б) Для нахождения следующих приближений решения системы уравнений (7) нужно записать уравнения для высших моментов (кумулянтов)  $\langle \tilde{a}_{i1}^2 \tilde{a}_{i2}^2 \dots \tilde{a}_{in}^2 Z \rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ;  $\tilde{a}_{ij}^2 \equiv a_{ij}^2 - \langle a_{ij}^2 \rangle$ . Замыкание системы уравнений на  $n$ -м шаге производится путем пренебрежения совместным кумулянтном совокупности  $\{a_i(t), Z\}$  порядка  $(2n+3)$  в уравнении для  $\langle \tilde{a}_{i1}^2 \dots \tilde{a}_{in}^2 Z \rangle$  [5, 6].

Таким образом, в следующем (эксцессном, в терминологии [4]) приближении несложно, например, получить выражение для мощности сигнала ошибки в стационарном состоянии:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст. э}} = \frac{D_\gamma (1 + \gamma \langle a^2 \rangle / \nu)}{2N\gamma \langle a^2 \rangle \omega_0^2}. \quad (12)$$

Заметим, что (12) справедливо только при

$$\gamma \langle a^2 \rangle / \nu \ll 1, \quad (13)$$

т. е. при эффективной полосе фильтров в цепи обратной связи, много меньшей полосы флуктуаций амплитуды входного сигнала.

Аналогично можно получить и более точные выражения для  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}}$ , однако их анализ значительно усложняется. Поэтому рассмотрим другой класс входных воздействий, для которых могут быть получены точные выражения для  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}}$  без ограничения (13).

3. Практически важным является случай амплитудно-модулированного сигнала с телеграфной статистикой огибающей. Пусть  $U_1$  и  $U_2$  — значения, которые с равной вероятностью принимает процесс  $a(t)$ . Для удобства анализа введем новые обозначения:  $\langle a^2 \rangle = (U_1^2 + U_2^2)/2$ ,  $\mu = (1 - m^2)/(1 + m^2)$ ,  $m = U_1/U_2$  ( $U_2 > U_1$ ). Представляя  $a_i^2(t) = \langle a^2 \rangle (1 + \mu \xi_i(t))$ , где  $\xi_i(t)$  — независимые случайные телеграфные процессы, принимающие два значения  $\pm 1$ , запишем систему уравнений (4) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle = 2 \langle \dot{\varepsilon} \varepsilon \rangle,$$

\* Впервые факт уменьшения скорости настройки адаптивного фильтра при больших коэффициентах усиления в цепи обратной связи  $\gamma$  был обнаружен в [2] для нестохастических входных воздействий.

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle = \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \varepsilon^2 \rangle - N\gamma \langle a^2 \rangle \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle -$$

$$- \mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle - \mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \dot{\xi}_i(t) \varepsilon^2 \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle = D_\eta - 2\omega_0^2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle - 2N\gamma \langle a^2 \rangle \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle -$$

$$- 2\mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - 2\mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \dot{\xi}_i(t) \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle.$$

Далее будем полагать, что моменты скачков процессов  $\xi_i(t)$  образуют пуассоновский поток событий и, следовательно,  $\xi_i(t)$  являются стационарными марковскими процессами с ковариационными функциями

$$B_{ij}(\tau) = \delta_{ij} e^{-\nu|\tau|},$$

где  $(1/2)\nu$  — средняя частота перескоков. Тогда для размыкания смешанных моментов в (14) можно использовать формулу дифференцирования функционалов марковских процессов [3, 7]:

$$M \left( \frac{d}{dt} + s\nu \right) \langle \alpha^{[s]}(t), Z(t) \rangle = \left\langle \alpha^{[s]}(t), M \left( \frac{d}{dt} \right) Z(t) \right\rangle, \quad (15)$$

где  $M \left( \frac{d}{dt} \right)$  — любой дифференциальный оператор, не зависящий явно от времени,  $\alpha(t)$  — произвольный марковский процесс. В результате получим

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon^2 \rangle = 2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle = \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle - \omega_0^2 \langle \varepsilon^2 \rangle - N\gamma \langle a^2 \rangle \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle -$$

$$- \mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle + \mu\nu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) \varepsilon^2 \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle = D_\eta - 2\omega_0^2 \langle \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle - 2N\gamma \langle a^2 \rangle \langle (\dot{\varepsilon})^2 \rangle -$$

$$- 2\mu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) (\dot{\varepsilon})^2 \rangle + 2\mu\nu\gamma \langle a^2 \rangle \sum_{i=1}^N \langle \xi_i(t) \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle.$$

Для нахождения замкнутой системы уравнений относительно  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  запишем уравнения для смешанных моментов (кумулянтов)  $\varphi_l(t) = \langle \xi_1 \dots \xi_l \varepsilon^2 \rangle$ ,  $\psi_l(t) = \langle \xi_1 \dots \xi_l \varepsilon \dot{\varepsilon} \rangle$ ,  $\chi_l(t) = \langle \xi_1 \dots \xi_l (\dot{\varepsilon})^2 \rangle$ :

$$\left( \frac{d}{dt} + l\nu \right) \varphi_l(t) = 2\psi_l(t),$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{dt} + l\nu \right) \psi_l(t) = \chi_l(t) - \omega_0^2 \varphi_l(t) - N\gamma \langle a^2 \rangle \psi_l(t) + \\
& + \mu\gamma \langle a^2 \rangle \left\{ \frac{\langle z^2 \rangle}{N} l [\nu\varphi_{l-1}(t) - \psi_{l-1}(t)] + (N-l) [\nu\varphi_{l+1}(t) - \psi_{l+1}(t)] \right\}, \\
& \left( \frac{d}{dt} + l\nu \right) \chi_l(t) = D_\eta \delta_{0,l} - 2\omega_0^2 \psi_l(t) - 2N\gamma \langle a^2 \rangle \chi_l(t) + \\
& + 2\mu\gamma \langle a^2 \rangle \left\{ \frac{\langle z^2 \rangle}{N} l [\nu\psi_{l-1}(t) - \chi_{l-1}(t)] + (N-l) [\nu\psi_{l+1}(t) - \chi_{l+1}(t)] \right\}, \\
& l = 0, 1, \dots, N, \quad z(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t).
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (17) являются замкнутой системой  $3(N+1)$  уравнений для определения точного значения мощности сигнала ошибки адаптивного фильтра. Однако при большом числе весовых коэффициентов анализ этой системы уравнений может быть проведен только с помощью ЭВМ.

При  $N \rightarrow \infty$  случайный процесс  $z(t)$  переходит в гауссов [3], а система уравнений (17) переходит в бесконечную зацепляющуюся цепочку уравнений.

4. В качестве примера рассмотрим решение системы уравнений (17) при  $N=1$ . Эта задача эквивалентна адаптивной компенсации узкополосной помехи  $x(t)$  квадратурным одноканальным автокомпенсатором в присутствии аддитивного шума  $n(t)$  в основном канале (см., например, [8]).

Из (17) можно найти стационарное значение СКО:

$$\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст}} = \frac{D_\eta}{2\gamma \langle a^2 \rangle \omega_0^2} \frac{2\omega_0^2(\nu + \gamma \langle a^2 \rangle) + \nu\gamma^2 \langle a^2 \rangle^2 (1 - \mu^2)}{2\omega_0^2\nu + \gamma \langle a^2 \rangle (2\omega_0^2 + \nu\gamma \langle a^2 \rangle) (1 - \mu^2)}. \tag{18}$$

Интересно отметить, что при отсутствии случайной модуляции входного сигнала ( $\mu=0$ ) выражение (18) переходит в (10), а при  $\mu=1$  совпадает с (12). Это связано с тем, что при  $\mu=0$  огибающая входного воздействия  $a(t)$  становится нестохастической (постоянной), а гауссово приближение (10) как раз эквивалентно пренебрежению статистической зависимостью  $\varepsilon(t)$  и  $a(t)$ . При  $\mu=1$   $x(t)$  представляет собой импульсный процесс и эксцессное приближение (12) в рамках рассмотренной процедуры нахождения  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст}}$  становится точным (см., например, [3, 5]).

На рис. 2 приведен график зависимости нормированной мощности сигнала ошибки  $E = 2\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст}} / S_n(0)\omega_0$  от безразмерного параметра  $\gamma \langle a^2 \rangle / \nu$  ( $S_n(\omega) = D_\eta / (\omega_0^2 - \omega^2)^2$  — спектр мощности шума  $n(t)$ ). Из графиков видно, что флуктуации огибающей входного сигнала (а следовательно, и весовых коэффициентов автокомпенсатора помех) приводят к увеличению СКО по сравнению с нестохастическими  $a(t)$  ( $\mu=0$ ). Отметим, что при  $\gamma \langle a^2 \rangle / \nu \rightarrow 0$   $E \rightarrow \infty$ . Это обусловлено тем, что мощность сигнала ошибки  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст}}$  стремится к мощности аддитивного шума  $n(t)$  (см. (3)), которая при сделанном предположении о белом шумовой модели  $\eta(t)$  является величиной неограниченной\*.

\* Заметим также, что при  $\gamma \langle a^2 \rangle / \nu \rightarrow 0$ , вообще говоря, необходимо учитывать неидеальность интегрирующих фильтров в цепи обратной связи адаптивного фильтра, что приведет к ограничению  $E$

5. Помимо величины СКО адаптивного фильтра важное значение имеют спектрально-корреляционные характеристики сигнала ошибки [6]. Из (3) легко получить следующее уравнение для корреляционной функции  $K_\varepsilon[\tau]$  сигнала  $\varepsilon(t)$ :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} K_\varepsilon[\tau] + \gamma \frac{d}{d\tau} \langle \alpha(\tau) \varepsilon(t) \varepsilon(t+\tau) \rangle + \omega_0^2 K_\varepsilon[\tau] = 0, \quad (19)$$

$$K_\varepsilon[0] = \langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}}$$

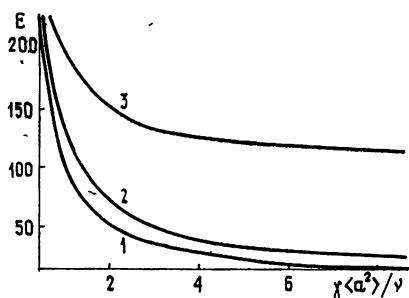


Рис 2. Нормированная величина СКО  $E = 2 \langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}} / S_n(0) \omega_0$  при разных значениях коэффициента модуляции входного сигнала  $x(t)$ : 1 —  $\mu = 0$ , 2 —  $\mu = \sqrt{2}/2$ , 3 —  $\mu = 1$ . Кривые построены при  $\omega_0/\nu = 10^2$ .

Отсюда можно получить конечную или бесконечную цепочку уравнений для  $K_\varepsilon[\tau]$  в зависимости от вероятностного распределения огибающей  $a(t)$  входного воздействия  $x(t)$  (аналогичные (7), (17)). Приведем, например, результаты, полученные для входного сигнала с телеграфной статистикой огибающей. В этом случае система уравнений для  $K_\varepsilon[\tau]$  аналогична (17). Тогда для преобразования Лапласа  $K_\varepsilon(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} K_\varepsilon[\tau] d\tau$  получим следующее выражение в виде конечного отрезка цепной дроби:

$$K_\varepsilon(p) = p \langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}} \left[ L(p) - \frac{u_1}{L(p_1)} - \frac{u_2}{L(p_2)} - \dots - \frac{u_N}{L(p_N)} \right]^{-1}, \quad (20)$$

где  $L(p) = p^2 + N \gamma \langle a^2 \rangle p + \omega_0^2$ ,  $p_l = p + l\nu$ ,  $u_l = \frac{\langle z^2 \rangle}{N} l(N+1-l) \times \times \gamma^2 \langle a^2 \rangle^2 \mu^2 p_l p_{l-1}$ .

Из (20) можно найти выражение для спектра мощности сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$  адаптивного фильтра. В частном случае одноканального квадратурного автокомпенсатора помех ( $N=1$ ) оно примет вид

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2 \gamma \langle a^2 \rangle A(\omega) \langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}}}{B^2(\omega) + \omega^2 \gamma^2 \langle a^2 \rangle^2 A^2(\omega)}, \quad (21)$$

где

$$A(\omega) = 1 - \mu^2 \gamma \langle a^2 \rangle \frac{\nu [\nu^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \langle a^2 \rangle \nu] + \omega^2 (2\nu + \gamma \langle a^2 \rangle)}{[\nu^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \langle a^2 \rangle \nu]^2 + \omega^2 (2\nu + \gamma \langle a^2 \rangle)^2},$$

$$B(\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 \gamma^2 \langle a^2 \rangle^2 \omega^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - \nu^2}{[\nu^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + \gamma \langle a^2 \rangle \nu]^2 + \omega^2 (2\nu + \gamma \langle a^2 \rangle)^2},$$

а величина  $\langle \varepsilon^2 \rangle_{\text{ст.}}$  определяется из (18).

Из (21) нетрудно видеть, что при эквивалентной полосе фильтров в цепях обратных связей, много меньшей полосы флуктуаций входного сигнала ( $\gamma \langle a^2 \rangle / \nu \ll 1$ ), спектр сигнала ошибки совпадает со спектром аддитивного шума  $n(t)$  и не зависит от коэффициента модуляции  $\mu$  (флуктуации  $W(t)$  очень малы).

На рис. 3 приведены графики нормированного спектра мощности сигнала ошибки адаптивного фильтра  $G(\omega) = 2S_\varepsilon(\omega)/S_n(0)$  при разных значениях коэффициента модуляции помехи  $\mu$  и параметра  $\gamma \langle a^2 \rangle / \nu$ .

Заметим, что с увеличением эффективной полосы фильтров в цепи обратной связи по сравнению с полосой флуктуаций входного сигнала  $x(t)$  происходит уменьшение центральной составляющей спектра  $G(\omega)$  и увеличение полосы флуктуаций  $\varepsilon(t)$ . Первое связано с «отслеживанием» адаптивным фильтром некоррелированного с  $x(t)$  аддитивного шума  $\eta(t)$  (см. также [8]), а последнее — с модуляцией входного сигнала  $x(t)$  шумом  $n(t)$  через цепи корреляционной обратной связи. При этом необходимо отметить, что мощность сигнала ошибки  $\varepsilon(t)$  с ростом  $\gamma \langle a^2 \rangle$  уменьшается (см. рис. 2), т. е. уменьшение центральной составляющей  $G(\omega)$  превалирует над увеличением полосы флуктуаций  $\varepsilon(t)$ .

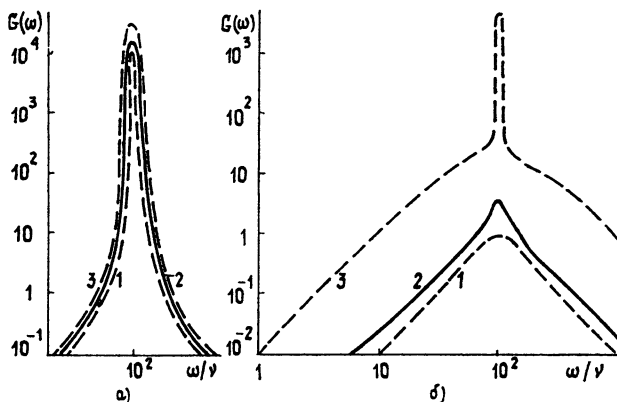


Рис 3. Нормированный спектр мощности сигнала ошибки адаптивного фильтра  $G(\omega) = 2S_\varepsilon(\omega)/S_n(0)$ . Кривые 1 —  $\mu = 0$ , 2 —  $\mu = \sqrt{2}/2$ , 3 —  $\mu = 1$  построены для  $\omega_0/v = 10^2$  и  $\gamma \langle a^2 \rangle/v = 1$  (рис. 3а),  $\gamma \langle a^2 \rangle/v = 10^2$  (рис. 3б).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sondhi M. — Bell. Syst. Tech. J., 1967, 46, № 3, p. 497.
2. Сондхи М, Митра Д. — ТИИЭР, 1976, 64, № 11, с. 35.
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М: Наука, 1980.
4. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований — М: Сов радио, 1978.
5. Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1279.
6. Арзамасов С. Н., Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 3, с. 545.
7. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 10, с. 1246.
8. Мальцев А. А., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 7, с. 1401

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
12 ноября 1980 г.

#### STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE ADAPTIVE FILTER ERROR SIGNAL

A. N. Malakhov, A. A. Mal'tsev, I. E. Rozumentov

Statistical characteristics of the error signal of the adaptive filter are investigated. The latter is intended for identification of unknown systems at narrow-band input actions the envelope of which has the Gaussian or telegraph probable distribution and being the Markov random process. In the telegraph statistics of the envelope the exact expressions have been derived for the power, correlation function and the error signal power spectrum which are valid for any power and time of the input signal correlation.