ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 1 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538 56 : 519.25

К АНАЛИЗУ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАТУХАНИЕМ

С. Ю. Медведев, О. В. Музычук

Выполнено статистическое описание нелинейной резонансной системы с одной степенью свободы, находящейся под воздействием аддитивного шума и параметрических случайных сил Рассмотрены случаи резонансного и низкочастотного параметрических шумов. Получены выражения для стационарной плотности вероятностей и моментов интенсивности выходного колебания Выяснен относительный вклад различных спектральных компонент параметрических воздействий в возбуждение системы.

1. Настоящая работа посвящена статистическому описанию нелинейной резонансной системы с одной степенью свободы, находящейся под воздействием как аддитивного шума, так и параметрических случайных сил:

$$y'' + 2h(\pm 1 + \nu y^2 + \beta(t))y' + \Omega^2(1 + \alpha(t))y = \Omega^2 x(t), \tag{1}$$

где α, β, x — гауссовы случайные процессы с заданными корреляционными функциями (взаимные корреляции положим для простоты равными нулю). Это уравнение может описывать как томсоновский генератор с аддитивными шумами и флуктуациями параметров (при отрицательной линейной части затухания), так и параметрический усилитель или генератор с шумовой накачкой. В отличие от большинства работ, связанных с анализом подобных систем (см., например, [1, 2] и библиографию в [1]), мы не будем делать априорных предположений о малости нелинейности или случайных сил, а используем для отыскания статистических характеристик диффузионное приближение (см., например, [3]), имеющее гораздо более широкие границы применимости. В отличие от работ [4, 5], где случайные силы полагались дельта-коррелированными, мы ограничимся лишь требованием широкополосности спектра параметрических воздействий по сравнению с эффективной полосой системы. При этом рассмотрим два типа воздействий: резонансный параметрический шум со спектром вблизи основной параметрической частоты 2Ω и низкочастотный шум, имеющий максимум спектральной плотности на нулевой частоте.

2. Полагая, что система (1) обладает большой добротностью ($Q = \Omega/2h \gg 1$), введем обычным образом синфазную и квадратурную огибающие выходного колебания:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_s(t)\sin\Omega t + A_c(t)\cos\Omega t, \\ y'(t) &= \Omega A_s(t)\cos\Omega t - \Omega A_c(t)\sin\Omega t. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть параметрические случайные воздействия $\alpha(t)$, $\beta(t)$ имеют симметричные спектры с максимумом на основной параметрической частоте. Представим их аналогичным образом:

$$\alpha(t) = \alpha_s(t)\sin 2\Omega t + \alpha_c(t)\cos 2\Omega t,$$
$$\beta(t) = \beta_s(t)\sin 2\Omega t + \beta_c(t)\cos 2\Omega t. \tag{3}$$

Огибающие параметрических шумов, как и огибающие выходного колебания, будем считать медленными по сравнению с периодом колебаний*. Аддитивный шум $x(t)$ будем полагать белым.

На основании (1)—(3) после усреднения по «быстрому» времени можно прийти к следующим уравнениям:

$$\frac{dA_s}{d\tau} \pm A_s + \frac{\nu}{4} A_s (A_s^2 + A_c^2) = \frac{1}{2}(\beta_s A_c - \beta_c A_s) - \frac{Q}{2}(\alpha_s A_s + \alpha_c A_c) + \\ + 2Q\overline{x(t)\cos\Omega t},$$
$$\frac{dA_c}{d\tau} \pm A_c + \frac{\nu}{4} A_c (A_s^2 + A_c^2) = \frac{1}{2}(\beta_s A_s + \beta_c A_c) + \frac{Q}{2}(\alpha_s A_c - \alpha_c A_s) - \\ - 2Q\overline{x(t)\sin\Omega t}. \tag{4}$$

Здесь $\tau = ht$, черта сверху означает усреднение по периоду колебаний. В (4) и ниже верхние знаки в формулах соответствуют положительной линейной части потерь. Наибольший интерес представляют статистические характеристики интенсивности выходного колебания

$$I(t) = A_s^2 + A_c^2. \tag{5}$$

В случае, когда огибающие параметрических воздействий $\alpha_{s,c}(t)$, $\beta_{s,c}(t)$ имеют ширину спектра, большую полосы системы, удается получить замкнутое уравнение диффузионного приближения для одноточечных вероятностных характеристик интенсивности. Пусть $\psi(I)$ — произвольная, «физически хорошая» функция. На основании (4), (5) и сделанных предположений придем к следующему кинетическому уравнению для $\langle \psi(I) \rangle$ **:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial\tau} \pm 2\left\langle I\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle + \frac{\nu}{2}\left\langle I^2\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle - \tilde{\mu}\left(\left\langle I\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle + \left\langle\left(I\frac{\partial}{\partial I}\right)^2\psi\right\rangle\right) = \\ = 2\langle I\rangle_0\left(\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle + \left\langle I\frac{\partial^2\psi}{\partial I^2}\right\rangle\right). \tag{6}$$

Здесь

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\mu_\alpha + \mu_\beta), \quad \mu_\alpha = (4h)^{-1}\Omega^2 D_\alpha, \quad \mu_\beta = hD_\beta \tag{7}$$

— безразмерный параметр, характеризующий эффективную мощность параметрических воздействий, $D_\xi = 2\int\limits_0^\infty \langle \xi(t)\xi(t-\tau)\rangle d\tau$, $\xi(t) \equiv \alpha_{s,c}(t)$, $\beta_{s,c}(t)$ — спектральные плотности огибающих параметрических воздействий на нулевой частоте. $\langle I\rangle_0 = (2h)^{-1}\Omega^2 D_x$ — средняя интенсивность выходного колебания невозмущенной линейной системы ($\tilde{\mu} = 0$, $\nu = 0$). Следует отметить, что в отличие от дельта-коррелиро-

* Условия применимости сделанных предположений обсудим в дальнейшем.

** Уравнение (6) адекватно уравнению Фоккера — Планка для рассматриваемой системы. Последнее получается из (6), если выбрать $\psi(I) = \delta(I - I(t))$, где δ — дельта-функция. Следует отметить, что (6) имеет более простой вид, чем соответствующие связанные уравнения ФП для синусной (косинусной) амплитуды.

ванных шумов [4] в рассматриваемом случае эффективные мощности μ_α и μ_β входят в кинетическое уравнение совершенно симметрично.

Положив в (6) $\psi(I) = I^n$, получим уравнение релаксации моментов интенсивности:

$$\frac{d\langle I^n\rangle}{d\tau} + n(\pm 2 - (n+1)\tilde{\mu})\langle I^n\rangle + \frac{\nu n}{2}\langle I^{n+1}\rangle = 2n^2\langle I\rangle_0\langle I^{n-1}\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

В частности, для линейного стохастического осциллятора ($\nu=0$) из (8) следует рекуррентная формула для стационарных значений моментов (которые существуют только в случае диссипативной системы):

$$\langle I^n\rangle = \frac{2n\langle I\rangle_0}{2-(n+1)\tilde{\mu}}\langle I^{n-1}\rangle, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Соответствующие времена релаксации определяются выражением

$$T_n = \frac{h}{\gamma(2-(n+1)\tilde{\mu})}, \qquad \tilde{\mu} < 2/(n+1).$$

Здесь, как и в [4, 5], параметр $\tilde{\mu}$ выбран таким образом, что при значении $\tilde{\mu} = 1$ средняя интенсивность обращается в бесконечность ($\tilde{\mu} < 1$ — область среднеквадратичной устойчивости линейной системы).

Заметим, что вытекающие из (9) условия моментной устойчивости $\langle I^n\rangle < \infty$ при $\tilde{\mu} < 2/(n+1)$ несколько отличны от соответствующих условий для белых параметрических воздействий [5]. В частности, для случая белых флуктуаций $\alpha(t)$ хорошо известное условие среднеквадратичной устойчивости имеет вид $D_\alpha < 4h/\Omega^2$; здесь же мы имеем $D_\alpha < 8h/\Omega^2$. Отсюда можно сделать вывод, что при параметрическом возбуждении системы белым шумом на долю «параметрических» спектральных компонент в полосе системы около частоты 2Ω приходится только половина энергии, а остальная энергия поступает из высших параметрических зон $\omega = 2\Omega/n$, $n = 2, 3, \ldots$ Аналогичная ситуация имеет место и для параметрического возбуждения флуктуациями диссипативного параметра $\beta(t)$ (см. ниже).

При наличии нелинейности система (8) приводит к зацепляющимся уравнениям для моментов; в частности, цепочка уравнений для стационарного значения средней интенсивности такова:

$$\begin{gathered}(1-\tilde{\mu})\langle I\rangle + \frac{\nu}{4}\langle I^2\rangle = \langle I\rangle_0, \\ \left(1-\frac{n+1}{2}\tilde{\mu}\right)\langle I^n\rangle + \frac{\nu}{4}\langle I^{n+1}\rangle = n\langle I\rangle_0\langle I^{n-1}\rangle, \\ n = 2, 3, \ldots\end{gathered} \tag{10}$$

Однако, найдя плотность вероятностей интенсивности, можно получить точные выражения для стационарных значений моментов. На основании (6) приходим к уравнению Фоккера — Планка для плотности вероятностей $W(I;\tau)$:

$$\frac{\partial W}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial I}\left[\pm 2IW + \frac{\nu}{2}I^2W + (\tilde{\mu}I^2 + 2\langle I\rangle_0 I)\frac{\partial W}{\partial I}\right]. \tag{11}$$

Отсюда нетрудно найти стационарную плотность вероятностей $W(I) \equiv W(I;\infty)$ (в тех случаях, когда последняя существует):

$$W(I) = C \exp\left(-\frac{\nu I}{2\tilde{\mu}}\right)\left(1+\frac{\tilde{\mu} I}{2\langle I\rangle_0}\right)^s, \qquad s = \frac{2}{\tilde{\mu}}\left(\frac{\nu\langle I\rangle_0}{2\tilde{\mu}} \mp 1\right),$$
$$C = \left(\frac{\nu\langle I\rangle_0}{\tilde{\mu}^2}\right)^s \frac{\nu}{2\tilde{\mu}} \exp\left(-\frac{\nu\langle I\rangle_0}{\tilde{\mu}^2}\right) \Gamma^{-1}\left(s+1, \frac{\nu\langle I\rangle_0}{\tilde{\mu}^2}\right). \tag{12}$$

Предельным переходом $\tilde{\mu} \to 0$ из (12) можно получить известное выражение для плотности вероятностей интенсивности нелинейного осциллятора (для томсоновского генератора с аддитивными шумами см. [2]). При $\nu \to 0$ из (12) следует распределение интенсивности колебаний линейного осциллятора, параметрически возбуждаемого резонансным шумом:

$$W(I)\big|_{\nu=0} = \frac{2-\tilde{\mu}}{2\langle I\rangle_0}\left(1+\frac{\tilde{\mu} I}{2\langle I\rangle_0}\right)^{-2/\tilde{\mu}}, \qquad \tilde{\mu} < 2. \tag{13}$$

Эта формула отличается от полученной в [5] для белых шумов лишь выражением для параметра $\tilde{\mu}$. Для случая «параметрического генератора» $\langle I\rangle_0 \equiv 0$ из (12) находим*

$$W(I)\big|_{\langle I\rangle_0=0} = \left(\frac{\nu}{2\tilde{\mu}}\right)^{1\mp 2/\tilde{\mu}} \Gamma^{-1}\left(1 \mp \frac{2}{\tilde{\mu}}\right) I^{-2/\tilde{\mu}} \exp\left(-\frac{\nu I}{2\tilde{\mu}}\right), \qquad \tilde{\mu} > 2. \tag{14}$$

Зависимости, описываемые выражениями (12)—(14), качественно совпадают с полученными в [5]. Некоторые количественные отличия обусловлены отмеченным выше различным характером возбуждения системы резонансным и белым шумом. Зависимость вероятностных распределений (12), (14) от параметров ν и $\tilde{\mu}$ показана на рис. 1, 2.

Из формулы (12) следует, что моменты интенсивности могут быть выражены через вырожденные гипергеометрические функции [5, 8]. В случае же «параметрического генератора» ($\langle I\rangle_0 \equiv 0$, $\tilde{\mu} > 2$) на основании (14) находим простое выражение

$$\langle I^n\rangle = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{-n} (\tilde{\mu}-2)\ldots(n\tilde{\mu}-2), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, в частности, следует, что флуктуации интенсивности выходного шума пропорциональны средней интенсивности

$$\sigma_I^2 = \langle I^2\rangle - \langle I\rangle^2 = 4\nu^{-1}\langle I\rangle.$$

* Заметим, что стационарное вероятностное распределение линейной системы (13) существует при $\tilde{\mu} < 2$, а стационарное вероятностное распределение «параметрического генератора» — в области значений $\tilde{\mu} > 2$ (ср. с [5, 6])

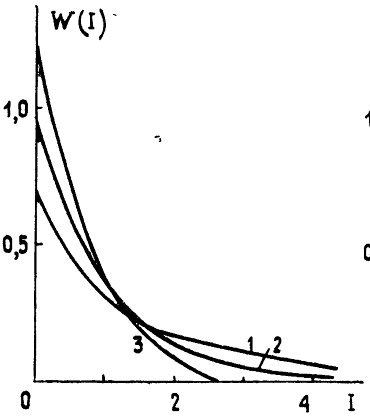

Рис. 1.

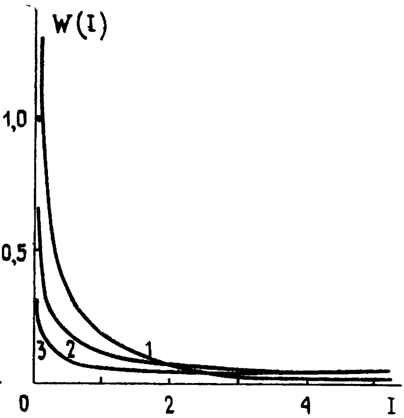

Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость плотности вероятностей интенсивности колебаний осциллятора от величины нелинейности и мощности параметрического воздействия.

Кривая *1* — $\nu = 0{,}4$, $\tilde{\mu} = 1$; *2* — невозмущенный осциллятор и случай «компенсации», *3* — $\nu = 2$, $\tilde{\mu} = 0{,}2$.

Рис. 2. Плотность вероятностей интенсивности выходного колебания «параметрического генератора» в зависимости от нелинейности и мощности параметрической шумовой накачки.

Кривая *1* — $\nu = 2$, $\tilde{\mu} = 3$; *2* — $\nu = 0{,}2$, $\tilde{\mu} = 3$; *3* — $\nu = 0{,}2$, $\tilde{\mu} = 5$

3. Рассмотрим теперь низкочастотные параметрические воздействия, полагая ширину спектра флуктуаций μ_α, μ_β малой по сравнению с Ω, но достаточно большой по сравнению с эффективной полосой системы. На основании (1), (2) после усреднения по быстрому времени получим

$$\frac{dA_s}{d\tau} \pm A_s + \frac{\nu}{4} A_s(A_s^2 + A_c^2) = \beta(t)A_s + Q\,\alpha(t)A_c + 2Q\overline{x(t)\cos\Omega t},$$

$$\frac{dA_c}{d\tau} \pm A_c + \frac{\nu}{4} A_c(A_s^2 + A_c^2) = \beta(t)A_c + Q\,\alpha(t)A_s - 2Q\overline{x(t)\sin\Omega t}.$$

Перейдя, как и ранее, к интенсивности выходного колебания, можно прийти к следующему кинетическому уравнению диффузионного приближения:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial\tau} \pm 2\left\langle I\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle - 2\mu_\beta\left\langle\left(I\frac{\partial}{\partial I}\right)^2\psi\right\rangle + \frac{\nu}{2}\left\langle I^2\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle = 2\langle I\rangle_0\left(\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial I}\right\rangle + \left\langle I\frac{\partial^2\psi}{\partial I^2}\right\rangle\right). \qquad (15)$$

Главное отличие (15) от (6) состоит в том, что низкочастотные флуктуации собственной частоты (фактор μ_α) не влияют на вероятностные характеристики интенсивности. Это вполне понятно и из физических соображений

Для случая линейной стохастической системы ($\nu=0$) из (15) можно получить такую рекуррентную формулу для стационарных моментов:

$$\langle I^n \rangle = \frac{n \langle I \rangle_0 \langle I^{n-1} \rangle}{1 - n\mu_\beta}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(ср. с (9)). Отсюда вытекает условие моментной устойчивости*

$$\langle I^n \rangle < \infty \quad \text{при} \quad \mu_\beta < 1/n, \tag{16}$$

отличное даже при $\mu_\alpha \equiv 0$ как от полученного выше для резонансного шума, так и от случая белого параметрического воздействия [4, 5]. Объединяя эти и полученные выше результаты, запишем условия среднеквадратичной устойчивости линейной системы с флуктуациями собственной частоты или затухания в виде таблицы

Белый шум	$D_\alpha < 4h/\Omega^2$,	$D_\beta < 1/2h \equiv D^*$
Низкочастотный шум	—	$D_\beta < 2D^*$
Резонансный шум	$D_\alpha < 8h/\Omega^2$,	$D_\beta < 4D^*$

Отсюда следует, что, как и в случае параметрического воздействия на собственную частоту, систему легче всего возбудить белыми флуктуациями затухания, причем половина энергии возбуждения содержится в низкочастотной части спектра, четвертая часть — в спектре вблизи основной параметрической частоты и четвертая часть приходится на высшие параметрические зоны.

На основании (15) можно получить уравнение Фоккера — Планка, стационарное решение которого имеет вид (ср. с (12))

$$W(I) = C \exp\left(-\frac{\nu I}{4\mu_\beta}\right)\left(1 + \frac{\mu_\beta I}{\langle I \rangle_0}\right)^s, \qquad s = \frac{\nu \langle I \rangle_0}{4\mu_\beta^2} - \frac{1}{\mu_\beta} - 1,$$
$$C = 4\mu_\beta \left(\frac{\nu \langle I \rangle_0}{8\mu_\beta^2}\right)^{s+1} \exp\left(-\frac{\nu \langle I \rangle_0}{4\mu_\beta^2}\right) \Gamma^{-1}\left(s + 1, \frac{\nu \langle I \rangle_0}{2\mu_\beta^2}\right). \tag{17}$$

Здесь, как и в рассмотренном выше случае, при определенном соотношении между μ_β и ν возможна «компенсация» факторов параметрического возбуждения и нелинейного затухания [7]. Условие такой компенсации имеет вид $s = 0$ (ср. с полученным в [7]).

Предельным переходом $\nu \to 0$ из (17) получим вероятностное распределение интенсивности колебаний линейной системы с флуктуациями затухания:

$$W(I)\,|_{\nu=0} = C_1 \left(1 + \frac{\mu_\beta I}{\langle I \rangle_0}\right)^{-1-1/\mu_\beta}. \tag{18}$$

Отметим, что в отличие от (13) и соответствующего результата в [4] эта плотность вероятностей интегрируема при любых значениях μ_β. Другими словами, ни при каком конечном значении эффективной мощности шума $\beta(t)$ вероятность превышения некоторого заданного уровня интенсивности не достигает единицы. Это означает, с одной стороны, асимптотическую устойчивость линейной системы по вероятности, а с другой — невозможность режима параметрической генерации в такой системе при наличии нелинейного затухания. Медленные флуктуации собственной частоты $\alpha(t)$, не влияя на вероятностные характеристики амплитуды колебания, оказывают, разумеется, влияние на фазовые характеристики. Как легко показать, при сделанных выше предположениях в от-

* Отметим, что (16) совпадает с хорошо известным условием моментной устойчивости выходной координаты стохастической системы первого порядка.

сутствие аддитивных шумов имеет место диффузионный рост дисперсии фазы:

$$\langle \varphi^2(t) \rangle = \mu_\alpha t.$$

4 Оценим условия применимости используемого выше диффузионного приближения. Естественно считать, что для пассивной колебательной системы приближение хорошо работает, если эффективное время затухания системы (время релаксации моментов интенсивности) много больше времени корреляции воздействующих шумов $T_{эфф} \gg \tau_{\alpha,\beta}$. Возьмем для простоты в качестве $T_{эфф}$ время релаксации средней интенсивности. Ограничиваясь в первом уравнении (10) рэлеевским размыканием второго момента $\langle I^2 \rangle \approx 2 \langle I \rangle^2$, получим такое выражение для эффективного времени:

$$T_{эфф} = T_0 \left[1 - \tilde{\mu} + \sqrt{(1-\tilde{\mu})^2 + 4\nu \langle I \rangle_0} \right]^{-1}, \quad T_0 = h^{-1}. \qquad (19)$$

Отсюда легко получить следующие ограничения на величину нелинейности и интенсивности параметрических воздействий:

$$\nu \langle I \rangle_0 \ll \left(\frac{T_0}{2\tau_{\alpha,\beta}} \right)^2 \quad \text{при } \tilde{\mu} \ll 1, \qquad \frac{\nu \langle I \rangle_0}{\tilde{\mu}} \ll \frac{T_0}{\tau_{\alpha,\beta}} \quad \text{при } \tilde{\mu} > 1.$$

Отметим, что в случае компенсации факторов $\tilde{\mu}$ и ν (см. [7]) при любых интенсивностях $\tilde{\mu}$ $T_{эфф} \approx T_0$.

При анализе активных систем — томсоновского или параметрического генераторов — эффективное время системы следует определять как величину, обратную ширине спектра амплитудных флуктуаций $T_{эфф} = \Pi_a^{-1}$. Делая те же предположения, что и при выводе кинетического уравнения (6), несложно получить дифференциальное уравнение для корреляционной функции амплитуды колебаний, из которого следует, что в рамках «рэлеевского» приближения полоса амплитудных флуктуаций имеет вид $\Pi_a = h\tilde{\mu}/8$. Таким образом, условие применимости диффузионного приближения при анализе активных систем имеет вид $\tilde{\mu} \ll 8T_0 \tau_{\alpha,\beta}^{-1}$.

Следует иметь в виду, что для использованного выше усреднения по быстрому времени необходимо выполнение условия $T_{эфф} \gg \Omega^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
2. Рытов С М. Введение в статистическую радиофизику. Ч I. — М · Наука, 1976.
3. Кляцкин В. И Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1976.
4. Диментберг М Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М: Наука, 1980.
5. Медведев С Ю, Музычук О. В — Изв вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 1, с. 49.
6. Музычук О. В — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 6, с. 707.
7. Медведев С Ю, Музычук О В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 6, с 701.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 9 октября 1980 г.

TO THE ANALYSIS OF PROBABLE CHARACTERISTICS OF A STOCHASTIC OSCILLATOR WITH NONLINEAR DAMPING

S. Yu. Medvedev, O. V. Muzychuk

The authors made a statistical description of a nonlinear resonance system with one degree of fredom being under the action of additive noise and parametric random forces. Cases of resonance and low frequency parametric noises have been considered. Expressions have been derived for the stationary density of probabilities and intensity moments of the output oscillation. A relative contribution of different spectral components of parametric actions to the system excitation is found out.