ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 1 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538 3

О СИНТЕЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Г. Н. Бочков, А. Л. Орлов

Исследуются тепловые флуктуации в нелинейной распределенной системе на основе флуктуационно-диссипационной теории [4–6]. Выведены термодинамически корректные стохастические уравнения системы, описывающие критические флуктуации у границ областей устойчивости. Анализируются усредненные уравнения кольцевой распределенной системы с нелинейными активными элементами

Известные подходы к исследованию тепловых флуктуаций в распределенных моделях радиофизических систем (см., например, [1, 2]) применимы лишь в тех случаях, когда отклонения систем от равновесия или неравновесных автоколебательных состояний невелики. При этом в той или иной форме используются «методы возмущений», и феноменологическая теория флуктуаций опирается на флуктуационно-диссипационную теорему, обобщенную на распределенные диссипативные системы [3].

В настоящей статье на основе нелинейных флуктуационно-диссипационных соотношений (ФДС), их обобщений и модификаций [4–6] показано, как синтезировать термодинамически корректную стохастическую модель распределенной системы, адекватную известной феноменологической модели (см., например, [7]), при любой степени неравновесности, произвольной нелинейности и произвольной интенсивности флуктуаций в системе.

1. Рассмотрим сначала (следуя в основном [6]) произвольную диссипативную нелинейную сосредоточенную систему (от нее нетрудно будет перейти к интересующей нас распределенной системе). Феноменологические уравнения движения системы (находящейся в тепловом равновесии с термостатом при температуре T) для макропеременных $\boldsymbol{X}(t) = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ запишем в виде

$$\dot{X}_i = A_i(\boldsymbol{X}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{1}$$

Полные стохастические уравнения системы имеют вид* [6]

$$\dot{X}_i = a_i(\boldsymbol{X}) + \eta_i(\boldsymbol{X}, t), \tag{2}$$

где $\eta_i(\boldsymbol{X}, t)$ — шумовые источники, порожденные «термостатом» [6],

$$A_i(\boldsymbol{X}) = a_i(\boldsymbol{X}) + b_i(\boldsymbol{X}),$$

* Макропеременные $X(t) = \{X_1, \dots, X_N\}$ (и уравнения (2)) относятся либо к замкнутой системе (к которой применимы строгие ФДС), либо представляют собой расширенный набор переменных, описывающих открытую физическую систему как часть медленно релаксирующей к равновесию замкнутой системы [6] В последнем случае переменные X включают две группы X_{I} и X_{II}, причем дополняющая группа переменных — X_{II} — должна релаксировать к равновесию значительно медленнее, чем первая. В пределе бесконечного времени релаксации переменных X_{II} подсистема, описываемая переменными X_{I}, оказывается в стационарном неравновесном состоянии, т. е. превращается в открытую систему

$b_i(X)$ характеризуют диссипативную компоненту в эволюции системы (см. также (6′)). Совокупность макропеременных $X(t)$, образующих полный набор, считаем марковской, а источники $\eta_i(X, t)$ — соответственно δ-коррелированными.

В ряде случаев при удобном выборе обобщенных макропеременных выражение для рассеиваемой мощности имеет вид

$$\frac{d}{dt} H(X) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(X_i), \tag{3}$$

где $H(X)$ — энергия макропеременных, $\beta_i(X_i)$ — функции, вид которых зависит от конкретной модели. Соотношение (3) означает, что каждой переменной соответствует свой «канал» связи с термостатом и процессы в различных каналах некоррелированы. Будем считать, что диссипативные компоненты в феноменологическом уравнении для i-й переменной зависят только от этой переменной, т. е.

$$b_i(X) \equiv b_i(X_i) \tag{4}$$

(в интересующем нас случае эти условия выполняются).

Как и в [6], примем следующую статистическую трактовку феноменологических уравнений (1): (1) являются результатом условного усреднения (2), т. е.

$$\langle \dot{X}_i \rangle_X = a_i(X) + \langle \eta_i(X, t) \rangle_X = A_i(X), \qquad K_1^i(X) = A_i(X), \tag{5}$$

где $K_1^i(X)$ — первые кинетические коэффициенты, $\langle \ldots \rangle_X$ — знак условного среднего (при заданном X). Из (5) следует, что $\langle \eta_i(X, t) \rangle_X = b_i(X)$, т. е. диссипативные члены в (1) равны средним значениям макропеременных. Стохастическое уравнение (2) следует понимать в смысле Ито.

Используя нелинейные ФДС [4–6] для кинетических коэффициентов (в наиболее удобной форме они записаны в [5]), экстремальные свойства термодинамически равновесных состояний и формулы (3), (4), можно получить выражения для флуктуационных источников, вводимых в уравнение (1), в виде

$$\eta_i(X, t) = \sqrt{K_2^i(X)}\, \xi_i(X, t) + q_i(X); \tag{6}$$

$$K_2^i(X_i) = -2\sigma_i^2 G(X_i), \quad K_n^i(X_i) = 0, \quad n \geqslant 3, \tag{6′}$$

где $G(u)$ является решением уравнения

$$\left(u - \sigma_i^2 \frac{d}{du}\right) G(u) = b_i(u),$$

σ_i^2 — равновесные дисперсии соответствующих переменных, $\xi_i(t)$ — стандартные δ-коррелированные гауссовы статистически независимые процессы (с нулевыми средними значениями и единичными интенсивностями). Решение (6), (6′) является одним из простейших вариантов решений нелинейных ФДС, оно становится единственным в предположении гауссовости флуктуационных источников.

2. Рассматривая теперь непрерывную цепь идентичных сосредоточенных систем (каждая из которых представляет собой вышеописанную модель), предельным переходом при увеличении до бесконечности числа систем, получим стохастическую модель распределенной системы и адекватное ей стохастическое уравнение,

В качестве примера рассмотрим кольцевую распределенную систему (КРС) с нелинейным активным элементом — туннельным диодом (ТД) (рис. 1). Каждая ее ячейка представляет собой нелинейный сосре-

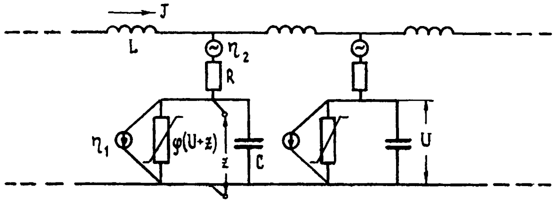

Рис 1 Распределенная кольцевая линия: η_1 и η_2 — флуктуационные источники тока и напряжения, z — постоянное смещение (параметр неравновесности системы).

доточенный осциллятор, для которого интенсивности шумовых источников выражаются формулами (6), (6′). С помощью предельного перехода получим следующую систему уравнений для КРС с ТД:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{R}{L}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - \frac{1}{L}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\eta_2(x, t),$$

$$C\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial t} - \varphi(U+z) - \eta_1(x, t), \tag{7}$$

$$U(0, t) = U(l, t), \quad J(0, t) = J(l, t),$$

где

$$\eta_1(x, t) = \{2TG(U+z)\}^{1/2}\xi_1(x, t),$$

$$\eta_2(x. t) = \left\{2T\frac{R}{L}\right\}^{1/2}\xi_2(x, t), \tag{7′}$$

$\xi_{1,2}(x, t)$ — стандартные δ-коррелированные (по координате и времени) гауссовы статистически независимые процессы (с нулевыми средними значениями и единичными интенсивностями);

$$\left(U - \sigma_0^2\frac{d}{dU}\right)G(U) = \varphi(U) \tag{7″}$$

($\sigma_0^2 = T/C$ — равновесная дисперсия напряжения на нелинейном элементе)*.

Стохастическое телеграфное уравнение для напряжения на ТД имеет вид

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{RC}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{L}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mu\left[-R\omega_0\frac{\partial^2\varphi(U+z)}{\partial x^2} + L\omega_0\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2} + \right. \tag{8}$$

$$\left. + L\omega_0\frac{\partial\varphi(U+z)}{\partial t} - R\omega_0\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2} + L\,\omega_0\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right], \quad \mu = (RC\,\omega_0)^{-1}.$$

* Еще раз обратим внимание на то, что рассматриваемая система является открытой (источник постоянного смещения z вызывает постоянный поток заряда и совершает над системой работу) Поэтому для изучения неравновесных стационарных флуктуаций здесь (как и в [6]) система представляется как часть медленно релаксирующей системы (в данном случае роль X_{II} играет z).

Переходя от стохастического уравнения (8), понимаемого в смысле Ито (в соответствии с (5)), к его «симметризованной» форме [8] (см. также [9]), будем иметь

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}+\frac{1}{RC}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{L}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\mu\left[-R\omega_0\frac{\partial^2\tilde{\varphi}(U+z,\delta)}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+L\omega_0\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2}+L\omega_0\frac{\partial\tilde{\varphi}(U+z,\delta)}{\partial t}-R\omega_0\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2}+L\omega_0\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right], \tag{9}$$

где $\langle\eta_1\rangle=\langle\eta_2\rangle=0$, $\tilde{\varphi}(x,\delta)$ — «эффективная» нелинейная характеристика,

$$\tilde{\varphi}(x,\delta)=\varphi(x)+g(x,\delta),$$
$$g(x,\delta)=-\frac{1}{2}[\varphi(x)-xG(x)],\quad \delta=\frac{\sigma_0^2}{x_0^2}. \tag{10}$$

Соотношение (10) определяет универсальную структуру «эффективной» нелинейной характеристики $\tilde{\varphi}(x,\delta)$ для любой нелинейности $\varphi(x)$ и произвольной интенсивности тепловых флуктуаций в системе.

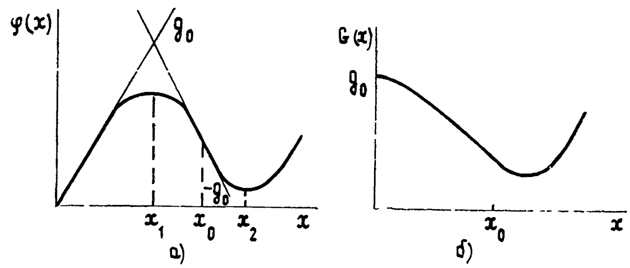

Рис. 2. а) Нелинейная вольт-амперная характеристика активного элемента линии (ТД): g_0 — крутизна линейного участка, $-g=g_0(a-1)$ — отрицательная крутизна в точке перегиба x_0.
б) Интенсивность флуктуационного источника тока (при $\delta \ll 1$).

Уравнение (8) позволяет проследить все возможные режимы поведения системы при любой степени неравновесности (которая в данном случае определяется величиной постоянного смещения z). В общем случае такой анализ достаточно сложен, поэтому здесь рассмотрим лишь уравнения для усредненной волны напряжения.

3. Будем считать, что $\mu \ll 1$ (выполнено условие осцилляторности системы). Кроме того, предположим, что в системе селектируются волны, бегущие только в одном направлении, а вольт-амперная характеристика ТД имеет вид (рис. 2)

$$\varphi(x)=g_0x\left[1-\frac{2}{3}a\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\frac{1}{5}a\left(\frac{x}{x_0}\right)^4\right]. \tag{11}$$

С помощью стандартного метода усреднения можно получить укороченную систему уравнений для медленной амплитуды и фазы волны напряжения $U(x,t)=V(\mu x,\mu t)\cos[\omega t-kx+\theta(\mu x,\mu t)]$. В данном случае процедура усреднения эквивалентна усреднению по распределению быстрых начальных фаз возмущений, заданных на кольце. Поэтому укороченные уравнения для средней амплитуды и фазы волны напряжения будут иметь точно такой же вид, как и в чисто динамической задаче без учета тепловых флуктуаций, но с «эффективной» нелинейной характеристикой. Выбирая $\varphi(x)$ в виде (11) и разрешая (7″), получим из (10)*

$$g(x,\ \delta) = -2ag_0 x\delta\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\delta - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]. \tag{12}$$

На рис. 3 изображена «эффективная» нелинейная характеристика ТД для различных величин равновесной дисперсии σ_0^2.

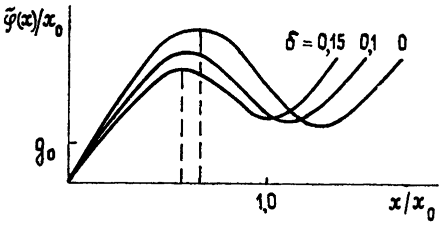

Рис 3 «Эффективная» нелинейная характеристика активного элемента. Построена для реальных ТД (у которых $-g/g_0 \sim \sim 0{,}5 \div 0{,}8$) при $\delta \ll 1$ Для определенности выбраны следующие параметры: $g_0 = 10$, $a = 8/5$.

Полагая в укороченной системе $V = V_0 + \alpha(x,\ t)$, $\theta = \theta_0 + \psi(x,\ t)$, где V_0, θ_0 — стационарные значения амплитуды и фазы волны, α, ψ — малые отклонения** (здесь V, V_0, α отнесены к x_0), и приравнивая $V_0 = 0$, получим уравнение для определения условия самовозбуждения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{k}{LC\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = -ag_0\frac{R\omega_0 M}{4}\alpha, \\ &\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{2\omega}{k}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = -ag_0\frac{R\omega_0 M}{2}\alpha, \end{aligned} \tag{13}$$

где $M \equiv a^{-1} - \left(2 + \frac{3}{5}\delta\right)\frac{z^2}{x_0^2} + \frac{z^4}{x_0^4} + 4q(\delta)$, $q(\delta) = \delta\left[\frac{2}{5}\delta - \frac{1}{3}\right]$.

Условие устойчивости (13) имеет вид

$$M > 0. \tag{14}$$

При $T \equiv 0$ (в отсутствие тепловых флуктуаций) (13) совпадает с условиями устойчивости нулевой амплитуды, полученными в [10]. Действительно, $M > 0$ означает

$$z < x_1 = \sqrt{1 - \sqrt{1 - a^{-1}}},\quad z > x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 - a^{-1}}}, \tag{15}$$

т. е. «рабочая точка» находится на участке с положительной крутизной (см. рис. 2).

При $T \neq 0$ и z из области (15) следует возможность

$$M < 0 \tag{16}$$

при

$$q(\delta) < 0,\quad a^{-1} - \left(2 + \frac{3}{5}\delta\right)\frac{z^2}{x_0^2} + \frac{z^4}{x_0^4} < -4q(\delta).$$

* Точное значение интенсивности $G(x)$, вычисленное для нелинейной характеристики ТД, заданной выражением (11), равно

$$G(x) = g_0\left\{1 - 4a\delta\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\delta\right] - \frac{2}{3}a\left[1 - 2\delta\right]\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{1}{5}a\frac{x^4}{x_0^4}\right\}.$$

** Отметим, что уравнения (8), (9) и выражение для «эффективности» нелинейной характеристики (10) справедливы и при сильных флуктуациях в системе.

Неравенство (16) есть условие неустойчивости нулевой амплитуды для КРС с ТД, учитывающее особенности тепловых флуктуаций в системе. Этот результат легко объяснить, обращаясь к эффективной нелинейной характеристике $\tilde{\varphi}(x)$ (см. рис. 3)*. Смещение z_A, удовлетворяющее неравенству (15), относит «рабочую точку» на участок с отрицательной крутизной (при $\delta \neq 0$).

В заключение подчеркнем, что найденная стохастическая модель распределенной системы (стохастические телеграфные уравнения (8), (9) и выражение для нелинейной «эффективной» характеристики (10)) справедлива при произвольной интенсивности тепловых флуктуаций в системе, что дает возможность исследовать также сильные тепловые флуктуации в существенно неравновесной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1 Волновые и флуктуационные процессы в лазерах. / Под ред Ю. Л. Климонтовича. — М. Наука, 1974.
2. Малахов А Н, Сандлер М С — Изв вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 6, с 845.
3 Левин М. Л., Рытов С. М Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М · Наука, 1967.
4. Стратонович Р. Л. — Вестник МГУ. Сер физика, астрономия, 1962, № 5, с 16; 1967, № 4, с 84
5. Бочков Г Н, Кузовлев Ю Е — ЖЭТФ, 1977, **72**, с. 237.
6 Бочков Г Н, Кузовлев Ю. Е — Изв вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 10, с 1467
7. Гапонов А. В., Островский Л А, Рабинович М И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **12**, № 2, с 163
8. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления — М Гос. ун-т, 1966.
9 Тихонов В И, Миронов Н А Марковские процессы — М: Сов. радио, 1977.
10 Рабинович М. И — Радиотехника и электроника, 1966, **11**, с. 1467.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 23 января 1981 г.

ON THE SYNTHESIS OF NONLINEAR STOCHASTIC MODELS OF DISTRIBUTED SYSTEMS

G. N. Bochkov, A. L Orlov

Based on fluctuation dissipative theory, thermal fluctuations are investigated in a nonlinear distributed system. Thermodynamic corrective stochastic equations of the system describing critical fluctuations near the boundary of stability regions are derived. Averaged equations of a ring distributed system with nonlinear active elements are analysed.

---

* Условие самовозбуждения (16) относится к средним амплитудам. Как правило, $\sigma_0^2 \ll x_0^2$, поэтому $\tilde{\varphi}(x)$ мало отличается от $\varphi(x)$, и (16) выполняется для смещений z, близких к границам интервала (15) (см. рис. 2).