ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

УДК 538.56 : 519.25

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ НА ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Н. Теохаров, А. Б. Шмелев

Выведена замкнутая система интегральных уравнений типа уравнений Дайсона и Бете — Солпитера для среднего значения и корреляционной функции рассеянного поля в задаче многократного рассеяния плоской звуковой волны на безграничной статистически неровной поверхности Уравнения справедливы при произвольной высоте неровностей, но при условии их пологости

1. В настоящее время наиболее полно исследовано однократное рассеяние волновых полей на статистически неровной поверхности, которое описывается методом малых возмущений и методом Кирхгофа (см., например, [1, 2]). Задачи многократного рассеяния изучены значительно меньше. В работе [3] при помощи диаграммной техники получены замкнутые уравнения для среднего значения и корреляционной функции многократно рассеянного поля в случае достаточно малых неровностей поверхности. В этом случае многократное рассеяние будет значительным, если волна последовательно отражается от шероховатой поверхности, что имеет место, например, в волноводах с шероховатыми стенками [1]. В работе [4] методом Кирхгофа вычислена мощность вторично рассеянной волны. Учет двукратного рассеяния и затенений при геометрооптическом описании волнового поля выполнен в [5].

В данной работе на основе точного интегрального уравнения для рассеянного поля получены замкнутые уравнения типа Дайсона и Бете — Солпитера для спектральных функций, через которые выражаются среднее значение и корреляционная функция многократно рассеянного поля в свободном пространстве над шероховатой поверхностью. Вывод уравнений проведен без ограничения высоты неровностей, но при условии их пологости. Необходимость введения указанных спектральных функций вызвана тем, что в случае немалых неровностей статистические характеристики рассеянного поля в пространстве не выражаются через их значения на самой поверхности.

2. Применяемый в данной работе способ вывода уравнений аналогичен методу «сглаживания» Фриша [6]. Разновидности этого метода применялись ранее для решения задач распространения волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления [7]. Суть метода состоит в следующем. Пусть дано операторное уравнение

$$\varphi - \Phi = \hat{G}\varphi, \tag{1}$$

где Φ — падающее поле, φ — полное поле, $\hat{G}$ — линейный оператор со случайными параметрами. Вводя операторы $\hat{\delta} = \hat{G}\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta} f = f - \langle f \rangle$ и обозначая угловыми скобками статистическое усреднение, перепишем уравнение (1) в виде $\varphi - \hat{\delta}\varphi = \Phi + \hat{G}\langle\varphi\rangle$. Отсюда итерациями получаем замкнутое уравнение для $\langle\varphi\rangle$:

$$\langle \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{\delta}^n \Phi \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{\delta}^n \hat{G} \rangle \langle \varphi \rangle . \tag{2}$$

Можно ожидать достаточно быстрой сходимости этого ряда, поскольку на каждом шаге оператор $\hat{G}$ применяется фактически не к полному полю, а к его флуктуациям.

Для оператора $\langle \hat{\delta}^n \hat{G} \rangle$ имеет место рекуррентная формула

$$\langle \hat{\delta}^n \hat{G} \rangle = \langle \hat{G}^{n+1} \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle \hat{\delta}^{k-1} \hat{G} \rangle \langle \hat{G}^{n-k+1} \rangle . \tag{3}$$

Ниже приведено несколько таких операторов:

$$\langle \hat{\delta}^0 \hat{G} \rangle = \langle \hat{G} \rangle ,$$

$$\langle \hat{\delta} \hat{G} \rangle = \langle \hat{G}^2 \rangle - \langle \hat{G} \rangle^2 ,$$

$$\langle \hat{\delta}^2 \hat{G} \rangle = \langle \hat{G}^3 \rangle - \langle \hat{G} \rangle \langle \hat{G}^2 \rangle - \langle \hat{G}^2 \rangle \langle \hat{G} \rangle + \langle \hat{G} \rangle^3 ,$$

$$\langle \hat{\delta}^3 \hat{G} \rangle = \langle \hat{G}^4 \rangle - \langle \hat{G} \rangle \langle \hat{G}^3 \rangle - \langle \hat{G}^3 \rangle \langle \hat{G} \rangle - \langle \hat{G}^2 \rangle^2 + \langle \hat{G} \rangle^2 \langle \hat{G}^2 \rangle +$$
$$+ \langle \hat{G} \rangle \langle \hat{G}^2 \rangle \langle \hat{G} \rangle + \langle \hat{G}^2 \rangle \langle \hat{G} \rangle^2 - \langle \hat{G} \rangle^4 .$$

Для корреляционной функции рассеянного поля имеем аналогичное уравнение

$$\langle \Gamma \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{\delta}_2^n R \rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{\delta}_2^n \hat{G}_2 \rangle \langle \Gamma \rangle , \tag{4}$$

где $\Gamma = \varphi \cdot \varphi^*$, $\hat{G}_2 = \hat{G} \cdot \hat{G}^*$, $R = \varphi \cdot \Phi^* + \Phi \cdot \varphi^* - \Gamma_\Phi$, $\Gamma_\Phi = \Phi \cdot \Phi^*$, $\hat{\delta}_2 = \hat{G}_2 \hat{\Delta}$, а для оператора $\langle \hat{\delta}_2^n \hat{G}_2 \rangle$ справедливо рекуррентное разложение, аналогичное (3).

3. В задаче о рассеянии скалярной волны $\Phi(\boldsymbol{x})$ на абсолютно жесткой в среднем плоской поверхности S полное поле над поверхностью выражается формулой Грина

$$\varphi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}) = - \int_S \varphi(\boldsymbol{x}'_S) \frac{\partial}{\partial n'} G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_S)\, dS' , \tag{5}$$

где $\boldsymbol{x}_S = (\boldsymbol{x}_\perp, h(\boldsymbol{x}_\perp))$ — точка на S, а $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_\perp, z)$ — точка наблюдения, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к неровной поверхности, $G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_S) = -\exp(ik|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_S|) / 4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'_S|$ — функция Грина в свободном пространстве.

Опуская точку наблюдения на S, получаем интегральное уравнение для полного поля на неровной поверхности. Но применять описанную выше процедуру к этому интегральному уравнению нецелесообразно, так как в результате получилось бы замкнутое уравнение для среднего поля на поверхности $\langle \varphi(\boldsymbol{x}_S) \rangle$, через которое еще нельзя определить среднее поле в пространстве из-за случайного характера функции Грина в (5).

Введем трехмерные спектры полей на неровной поверхности $\tilde{\varphi}(\varkappa)$, $\tilde{\Phi}(\varkappa)$ и шестимерные спектры их билинейных комбинаций $\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2)$, $\Gamma_\Phi(\varkappa_1, \varkappa_2)$ следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(\varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(\boldsymbol{x})\,\delta(z - h(\boldsymbol{x}_\perp))\,e^{-i\varkappa\boldsymbol{x}}\,d^3x,$$

$$\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2) = \tilde{\varphi}(\varkappa_1)\,\tilde{\varphi}^*(\varkappa_2)$$

(для $\tilde{\Phi}$ и Γ_Φ аналогично).

Используя разложение функции Грина G_0 в трехкратный интеграл Фурье по плоским волнам,

$$G_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_S) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\exp[i\varkappa(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S)]}{k^2 - \varkappa^2}\,d^3\varkappa, \tag{6}$$

и предполагая неровности достаточно пологими ($|\nabla h| \ll 1$), нетрудно выразить из (5) среднее значение и корреляционную функцию рассеянного поля в пространстве через эти спектральные функции:

$$\langle \varphi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\rangle = i\int \frac{\varkappa_z\,d^3\varkappa}{k^2 - \varkappa^2}\,e^{i\varkappa\boldsymbol{x}}\langle\tilde{\varphi}(\varkappa)\rangle; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\langle(\varphi(\boldsymbol{x}_1) - \Phi(\boldsymbol{x}_1))(\varphi^*(\boldsymbol{x}_2) - \Phi^*(\boldsymbol{x}_2))\rangle = \\ &= \int \frac{\varkappa_{z1}\varkappa_{z2}\,d^3\varkappa_1\,d^3\varkappa_2}{(k^2 - \varkappa_1^2)(k^2 - \varkappa_2^2)}\exp(i\varkappa_1\boldsymbol{x}_1 - i\varkappa_2\boldsymbol{x}_2)\langle\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2)\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

В отличие от обычно используемого в подобных задачах разложения функции Грина по формуле Вейля, описывающего только уходящие от поверхности плоские волны, разложение (6) содержит волны со всевозможными направлениями волновых векторов и, таким образом, является более естественным в задачах многократного рассеяния.

Поместив точку $\boldsymbol{x}$ на поверхность S и выделив дельтаобразную особенность, при условии $|\nabla h| \ll 1$ получаем из (5) интегральные уравнения уже для спектров $\tilde{\varphi}$ и Γ:

$$\tilde{\varphi}(\varkappa) - 2\tilde{\Phi}(\varkappa) = \frac{2i}{(2\pi)^3}\int \frac{\varkappa'_z\,d^3\varkappa'\,d^3x}{k^2 - \varkappa'^2}\,e^{ix(\varkappa' - \varkappa)}\,\tilde{\varphi}(\varkappa')\,\delta(z - h(\boldsymbol{x}_\perp)); \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma(\varkappa_1, \varkappa_2) + 4\Gamma_\Phi(\varkappa_1, \varkappa_2) - 2\tilde{\varphi}(\varkappa_1)\,\tilde{\Phi}^*(\varkappa_2) - 2\tilde{\Phi}(\varkappa_1)\,\tilde{\varphi}^*(\varkappa_2) = \\ &= \frac{4}{(2\pi)^6}\int \frac{\varkappa'_{z1}\varkappa'_{z2}d^3\varkappa'_1 d^3\varkappa'_2 d^3x_1 d^3x_2}{(k^2 - \varkappa_1'^2)(k^2 - \varkappa_2'^2)}\exp[i\boldsymbol{x}_1(\varkappa'_1 - \varkappa_1) - \\ &- i\boldsymbol{x}_2(\varkappa'_2 - \varkappa_2)]\,\Gamma(\varkappa'_1, \varkappa'_2)\,\delta(z_1 - h(\boldsymbol{x}_{\perp 1}))\,\delta(z_2 - h(\boldsymbol{x}_{\perp 2})).\end{aligned} \tag{10}$$

Эти выражения мы и возьмем за основу при выводе замкнутых уравнений для среднего поля и корреляционной функции. В данном случае имеем

$$\hat{G}(\varkappa;\,\varkappa')f(\varkappa') = \frac{2i}{(2\pi)^3}\int \frac{\varkappa'_z\,d^3\varkappa'\,d^3x}{k^2 - \varkappa'^2}\,e^{ix(\varkappa' - \varkappa)}\,\delta(z - h(\boldsymbol{x}_\perp))\,f(\varkappa'),$$

$$\hat{G}_2(\varkappa_1, \varkappa_2;\,\varkappa'_1, \varkappa'_2)\,f(\varkappa'_1, \varkappa'_2) = \hat{G}(\varkappa_1;\,\varkappa'_1)\,\hat{G}(\varkappa_2;\,\varkappa'_2)\,f(\varkappa'_1, \varkappa'_2).$$

Заметим, что уравнение (4) не замкнуто относительно $\tilde{\Gamma}$, так как его свободный член содержит линейный функционал R от $\tilde{\varphi}$. Для замыкания этого уравнения положим $R \approx \Gamma\Phi$, что возможно в пренебрежении корреляцией между падающим и рассеянным полями. Кроме того, ограничимся для простоты случаем плоской падающей волны $\Phi(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$.

Нетрудно показать, что в случае однородного распределения высот в плоскости $\boldsymbol{x}_\perp$ $\langle\tilde{\varphi}\rangle$ и $\langle\tilde{\Gamma}\rangle$ могут быть представлены в виде

$$\langle\tilde{\varphi}(\boldsymbol{\varkappa})\rangle = \frac{1}{2\pi}\delta(\boldsymbol{k}_\perp - \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\, q(\varkappa_z),$$

$$\langle\Gamma(\boldsymbol{\varkappa}_1, \boldsymbol{\varkappa}_2)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\delta(\boldsymbol{\varkappa}_{2\perp} - \boldsymbol{\varkappa}_{1\perp})\, Q(\varkappa_{1z};\ \varkappa_{2z};\ \boldsymbol{\varkappa}_{\perp 1}). \tag{11}$$

Выражения (7) и (8) при этом принимают более простой вид:

$$\langle\varphi(\boldsymbol{x})\rangle - e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = \frac{i}{2\pi}e^{i\boldsymbol{k}_\perp\boldsymbol{x}_\perp}\int\frac{\varkappa_z\, d\varkappa_z}{k_z^2 - \varkappa_z^2}e^{i\varkappa_z z}q(\varkappa_z),$$

$$\langle(\varphi(\boldsymbol{x}_1) - e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_1})(\varphi^*(\boldsymbol{x}_2) - e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_2})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\varkappa_{z1}\, d\varkappa_{z1}\, \varkappa_{z2}\, d\varkappa_{z2} \times$$

$$\times \exp(i\varkappa_{z1}z_1 - i\varkappa_{z2}z_2)\, Q(\varkappa_{z1};\ \varkappa_{z2};\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\int\frac{d^2\varkappa_\perp \exp[i\boldsymbol{\varkappa}_\perp(\boldsymbol{x}_{1\perp} - \boldsymbol{x}_{2\perp})]}{(k^2 - \boldsymbol{\varkappa}_\perp^2 - \varkappa_{z1}^2)(k^2 - \boldsymbol{\varkappa}_\perp^2 - \varkappa_{z2}^2)}. \tag{12}$$

Вычисляя последовательно все члены рядов уравнения (2), получаем интегральное уравнение для $q(\varkappa_z)$:

$$q(\varkappa_z) = J(k_z, \varkappa_z) + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J(p, \varkappa_z)\, q(p)\,\frac{p\,dp}{k_z^2 - p^2}, \tag{13}$$

где

$$J(p, \varkappa_z) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(p, \varkappa_z), \qquad I_0(p, \varkappa_z) = 2f_1(p - \varkappa_z),$$

$$I_n(p, \varkappa_z) = \left[\frac{i}{(2\pi)^3}\right]^n \int\frac{\prod_{k=1}^{n}\varkappa_z^{(k)}\, d^3\boldsymbol{\varkappa}^{(k)}\, d^2\boldsymbol{y}^{(k)}}{\prod_{k=1}^{n}(k^2 - \boldsymbol{\varkappa}^{(k)2})}\exp\left[i\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}^{(k)}(\boldsymbol{\varkappa}_\perp^{(k)} - \boldsymbol{k}_\perp)\right]\times$$

$$\times 2^{n+1}\delta_{n+1}f(\varkappa_z' - \varkappa_z,\ \varkappa_z'' - \varkappa_z',\ \ldots,\ p - \varkappa_z^{(n)};\ \boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{y}'',\ \ldots,\ \boldsymbol{y}^{(n)}), \tag{14}$$

а функции $\delta_n f(\varkappa_1, \ldots;\ \boldsymbol{y}', \ldots)$ строятся из характеристических функций неровной поверхности $f_k(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k;\ \boldsymbol{y}', \ldots, \boldsymbol{y}^{(k-1)}) = \left\langle\exp\left\{i\sum_{m=1}^{k}\varkappa_m \times\right.\right.$ $\left.\left.\times\, h(\boldsymbol{x}_\perp^{(m)})\right\}\right\rangle$ следующим образом: $\delta_1 f(\varkappa) = f_1(\varkappa)$, $\delta_2 f(\varkappa_1, \varkappa_2;\ \boldsymbol{y}) = f_2(\varkappa_1, \varkappa_2;\ \boldsymbol{y}) - f_1(\varkappa_1)f_1(\varkappa_2)$, $\delta_3 f(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3; \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'') = f_3(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3;\ \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}'') - f_1(\varkappa_1)f_2(\varkappa_2, \varkappa_3;\ \boldsymbol{y}'') - f_2(\varkappa_1, \varkappa_2;\ \boldsymbol{y}')f_1(\varkappa_3) + f_1(\varkappa_1)f_1(\varkappa_2)f_1(\varkappa_3)$ и т. д. аналогично соотношениям (3) (здесь $\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{x}_\perp^{(k)} - \boldsymbol{x}_\perp^{(k+1)}$).

Для функции $Q(\varkappa_{1z};\ \varkappa_{2z};\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)$ имеем уравнение, аналогичное (13):

$$Q(\varkappa_{z1},\ \varkappa_{z2};\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)=J_2(k_z,\ k_z;\ \varkappa_{1z},\ \varkappa_{2z};\ \boldsymbol{k}_\perp,\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)+(2\pi)^{-4}\times$$
$$\times\int\frac{p_1p_2\,dp_1\,dp_2\,d^2\varkappa_p}{(k^2-p_1^2-\varkappa_p^2)\,(k^2-p_2^2-\varkappa_p^2)}J_2(p_1,\ p_2;\ \varkappa_{1z},\ \varkappa_{2z};\ \boldsymbol{\varkappa}_p,\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\,Q(p_1;\ p_2;\ \boldsymbol{\varkappa}_p), \tag{15}$$

где

$$J_2=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n,$$

$$Y_0=4\int d^2\Delta x_\perp\exp\left[i(\boldsymbol{\varkappa}_p-\boldsymbol{\varkappa}_\perp)\Delta\boldsymbol{x}_\perp\right]f_2(p_1-\varkappa_{1z},-(p_2-\varkappa_{2z});\ \Delta\boldsymbol{x}_\perp),$$

$$Y_n(p_1,\ p_2;\ \varkappa_{1z},\ \varkappa_{2z};\ \boldsymbol{\varkappa}_p,\ \boldsymbol{\varkappa}_\perp)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{6n}}\int\frac{d^2\Delta x_\perp^{(n+1)}\prod\limits_{k=1}^{n}\varkappa_{z1}^{(k)}\varkappa_{z2}^{(k)}\,d^3\varkappa_1^{(k)}\,d^3\varkappa_2^{(k)}\,d^2\Delta x_\perp^{(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k^2-\varkappa_1^{(k)2})\,(k^2-\varkappa_2^{(k)2})^*}\,2^{2(n+1)}\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}^{(k)}(\boldsymbol{\varkappa}_{1\perp}^{(k)}-\boldsymbol{\varkappa}_{2\perp}^{(k)})+\sum_{k=1}^{n}(\Delta\boldsymbol{x}_\perp^{(k)}-\Delta\boldsymbol{x}_\perp^{(k+1)})\frac{\boldsymbol{\varkappa}_{1\perp}^{(k)}+\boldsymbol{\varkappa}_{2\perp}^{(k)}}{2}+\right.\right. \tag{16}$$
$$\left.\left.+\,\boldsymbol{\varkappa}_p\Delta\boldsymbol{x}_\perp^{(n+1)}-\boldsymbol{\varkappa}_\perp\Delta\boldsymbol{x}'_\perp\right]\right\}\delta_{n+1}f_2(\varkappa'_{1z}-\varkappa_{1z},\ \varkappa''_{1z}-\varkappa'_{1z},\ \ldots,\ p_1-\varkappa_{1z}^{(n)};$$
$$-(\varkappa'_{2z}-\varkappa_{2z}),-(\varkappa''_{2z}-\varkappa'_{2z}),\ \ldots,-(p_2-\varkappa_{2z}^{(n)});\ \Delta\boldsymbol{x}'_\perp,\ \ldots,\ \Delta\boldsymbol{x}_\perp^{(n+1)};\ \boldsymbol{y}',\ \ldots,\ \boldsymbol{y}^{(n)})$$

а функции $\delta_n f_2$ строятся подобно $\delta_n f$ из характеристических функций четного порядка f_{2k}, например, $\delta_2 f_2(\varkappa'_1,\ \varkappa''_1;\ \varkappa'_2,\ \varkappa''_2;\ \Delta\boldsymbol{x}'_\perp,\ \Delta\boldsymbol{x}''_\perp;\ \boldsymbol{y}')=$ $=f_4(\varkappa'_1,\ \varkappa''_1;\ \varkappa'_2,\ \varkappa''_2;\ \Delta\boldsymbol{x}'_\perp,\ \Delta\boldsymbol{x}''_\perp;\ \boldsymbol{y}')-f_2(\varkappa'_1,\ \varkappa'_2;\ \Delta\boldsymbol{x}'_\perp)f_2(\varkappa''_1,\ \varkappa''_2;\ \Delta\boldsymbol{x}''_\perp)$, в (16) введены следующие обозначения:

$$\Delta\boldsymbol{x}_\perp^{(k)}=\boldsymbol{x}_{1\perp}^{(k)}-\boldsymbol{x}_{2\perp}^{(k)},\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

$$\boldsymbol{y}^{(k)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{1\perp}^{(k)}+\boldsymbol{x}_{2\perp}^{(k)})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{1\perp}^{(k+1)}+\boldsymbol{x}_{2\perp}^{(k+1)}),\quad k=1,\ \ldots,\ n-1,$$

где $\boldsymbol{x}_{1\perp}^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}_{2\perp}^{(k)}$ — координаты точек интегрирования.

Для приближенного вычисления ядер J и J_2 можно ограничиться конечным числом членов рядов (14) и (16). В частности, если ограничиться членами второго порядка в J, то уравнение (13) будет соответствовать приближению Бурре для среднего поля в теории многократного рассеяния. Аналогично можно получить уравнение лестничного приближения для корреляционной функции из (15), (16).

Уравнения (15) и (13) являются аналогами уравнений Дайсона и Бете — Солпитера в теории многократного рассеяния.

4. В случае абсолютно мягкой поверхности поле в точке наблюдения связано с нормальной производной поля на поверхности соотношением

$$\varphi(\boldsymbol{x})-\Phi(\boldsymbol{x})=\int\limits_S\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}'_S)}{\partial n'}G_0(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'_S)\,dS'.$$

Беря производную по нормали к неровной поверхности в точке x_S от обеих частей этого равенства, при условии $|\nabla h| \ll 1$ приходим к тому же уравнению (1), в котором падающее поле Φ заменено на

$$\Phi_1(x) = n\nabla\Phi(x) \approx ik_z e^{ikx},$$

а полное поле φ — на

$$\varphi_1(x) = n\nabla\varphi(x).$$

Нетрудно видеть, что решение задачи в этом случае сводится к решению задачи с абсолютно жесткой поверхностью, а среднее поле и корреляционная функция в пространстве по аналогии с (7), (8), (12) выражаются через спектральные функции следующим образом:

$$\langle \varphi(x) - \Phi(x) \rangle = \int \frac{d^3\varkappa}{k^2 - \varkappa^2} e^{i\varkappa x} \langle \tilde{\varphi}_1(\varkappa) \rangle =$$

$$= \frac{e^{ik_\perp x_\perp}}{2\pi} \int \frac{d\varkappa_z}{k_z^2 - \varkappa_z^2} e^{i\varkappa_z z} q_1(\varkappa_z),$$

$$\langle (\varphi(x_1) - \Phi(x_1))(\varphi^*(x_2) - \Phi^*(x_2)) \rangle =$$

$$= \int \frac{d^3\varkappa_1 d^3\varkappa_2}{(k^2 - \varkappa_1^2)(k^2 - \varkappa_2^2)} \exp(i\varkappa_1 x_1 - i\varkappa_2 x_2) \langle \Gamma_1(\varkappa_1, \varkappa_2) \rangle,$$

где $\tilde{\varphi}_1$ и Γ_1 — соответственно трехмерный и шестимерный спектры билинейной комбинации поля φ_1 на поверхности, q_1 и Q_1 определяются из φ_1 и Γ_1 аналогично (11).

5. В случае смешанного граничного условия на поверхности

$$\alpha\varphi(x) + \beta \left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\right|_S = 0,$$

выражая $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S$ через поле на S и подставляя в формулу Грина, получаем замкнутое интегральное уравнение для φ:

$$\varphi(x) - \Phi(x) = -\int \varphi(x'_S) \left[\frac{\partial G_0(x, x'_S)}{\partial n'} + \frac{\alpha}{\beta} G_0(x, x'_S) \right] dS'.$$

В этом случае остается в силе весь описанный выше формализм для нахождения спектров $\tilde{\varphi}$ и Γ, только в качестве оператора $\hat{G}$ используется оператор

$$\hat{G}_1(\varkappa; \varkappa') f(\varkappa') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{i\varkappa_z + \dfrac{\alpha}{\beta}}{k^2 - \varkappa'^2} d^3\varkappa' \, d^3x \exp[ix(\varkappa' - \varkappa)] \delta(z - h(x_\perp)) f(\varkappa').$$

Таким образом, задача в данном случае, в принципе, сводится к уже рассмотренной.

ЛИТЕРАТУРА

1 Басс Ф Г., Фукс И. М Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М: Наука, 1972
2. Шмелев А Б — УФН, 1972, **106**, № 3, с 459
3. Фрейлихер В Д, Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1970, **13**, № 1, с 98
4 Павельева И В, Павельев А. Г — Радиотехника и электроника, 1972, **17**, № 3, с 471.
5. Lynch P. I., Wagner R. I. — J. Math. Phys., 1970, **11**, № 10, p. 3032.
6. Frish U. — In: Probabilistic Methods in Applied Mathematics. / ed. A. T. Bharuche — Reid., Acad Press, 1968
7. Татарский В И, Герценштейн М Е — ЖЭТФ, 1963, **44**, вып 2, с 676

Поступила в редакцию
13 января 1981 г

EQUATIONS FOR STATISTICAL CHARACTERISTICS OF A SOUND FIELD IAN MULTIPLE SCATTERING ON A ROUGH SURFACE

A. N. Teokharov, A. B. Shmelev

A closed system of integral equations of the Dyson and Bethe — Salpeter type for the average value and correlation function of a scattered field in the problem of multiple scattering of a plane sound wave on an infinite randomly rough surface has been derived Equations are valid for roughnesses of arbitrary height and small slopes

---

Аннотации депонированных статей

УДК 535 31 : 551 46

ФЛУКТУАЦИИ ОСВЕЩЕННОСТИ ЗА ЛИНЗОЙ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ДИФФУЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

В. У. Заворотный

Рассмотрена задача определения пространственно-временной корреляции флуктуаций интенсивности света за линзой, которая освещается рассеянным от диффузной поверхности излучением Источник излучения и линза, с одной стороны, и рассеиватель, с другой стороны, разделены слоем турбулентной среды. Получено общее операторное выражение для четвертого момента поля рассеянной волны в плоскости линзы. В предположении «замороженности» турбулентности и отсутствия корреляции между волнами, движущимися в противоположных направлениях, подробно изучен случай слабых флуктуаций интенсивности. Найдены условия, при которых корреляционная функция флуктуаций интенсивности $B_I(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ в плоскости изображения линзы имеет тот же вид, что и $B_I(\boldsymbol{\rho}, \tau)$ на рассеивающем экране

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег № 5728-81. Деп. от 17 декабря 1981 г.
