ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 1 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 537.86 : 530.182

О РЕШЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

И. Г. Якушкин

Рассмотрено модифицированное уравнение Бюргерса, описывающее нелинейные волны в среде с низкочастотной накачкой или поглощением При больших числах Рейнольдса с помощью подстановки Хопфа — Коула получено асимптотическое решение уравнения, описывающее эволюцию начального распределения поля $u(x)$ к стационарному или квазистационарному режиму. Исследованы различные частные случаи.

1. Одномерные нелинейные волны не очень большой амплитуды в активной среде без дисперсии могут быть описаны модифицированным уравнением Бюргерса [1–4]

$$\partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x) = \nu(\partial^2 u/\partial x^2) + \gamma u, \qquad (1)$$

где ν — коэффициент вязкости, γ — инкремент, связанный с низкочастотной неустойчивостью.

Уравнение (1) используется при изучении капиллярной неустойчивости жидких струй [4], ионно-звуковых волн в плазме [1], акустических волн конечной амплитуды в неоднородной среде [10] и может считаться модельным для распределенных колебательных систем с активным заполнением [2, 3]. При $\gamma = 0$ (1) переходит в хорошо изученное уравнение Бюргерса [5], при $\gamma < 0$ оно описывает акустические волны конечной амплитуды в среде с низкочастотным поглощением [6]. Представляет интерес и более общее по сравнению с [1] уравнение

$$\partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x) = \nu(\partial^2 u/\partial x^2) + \psi(u). \qquad (2)$$

При $\psi = \gamma u(1 - \beta u^2)$ (2) также может считаться одним из модельных уравнений для активных сред [2].

Умножая (2) на u и интегрируя, получим соотношение

$$(1/2)(\partial/\partial t)\int u^2 dx = -\nu\int(\partial u/\partial x)^2 dx + \int u\psi(u) dx.$$

При $\int \psi u dx > 0$ система (2) может стремиться к стационарному состоянию, если члены, описывающие накачку и поглощение энергии, компенсируются. Численные и экспериментальные исследования системы (1) при $\gamma > 0$ [1, 4] показали, что при больших числах Рейнольдса в системе устанавливается режим пилообразных волн, между которыми возникают крутые ударные фронты, где происходит поглощение энергии. Общая картина весьма напоминает поведение решений уравнения Бюргерса, за исключением установления стационарного режима.

Стационарное решение (1) исследовалось аналитически и методами фазовой плоскости [1–3]. Из (1) непосредственно следует, что для пологого участка пилы $u = \gamma x$, откуда находим $u_{\max} \sim \gamma L/2$, где L — пространственный масштаб волны. Стационарное решение оказывается устойчивым при $L > L_0$, где $L_0 = 2\pi\sqrt{\nu/\gamma}$. Стационарные решения (2) исследовались на фазовой плоскости [2].

В настоящей работе рассматривается задача об эволюции начального возмущения. Для уравнения (1) при синусоидальном начальном распределении скорости она была рассмотрена в [10] методами газовой динамики. Более строгое и полное исследование возможно для уравнения Бюргерса, которое решается точно с помощью подстановки Хопфа — Каула [5].

2. Будем искать решение (2) при начальном условии $u = v_0(x)$ при $t = 0$. Подстановка Хопфа — Коула имеет вид

$$Q = \exp(-\varphi/2\nu), \qquad \varphi = \int\limits_{-\infty}^{x} u dx.$$

Примененная к (2), она приводит к уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{1}{2\nu} \int\limits_{-\infty}^{x} \psi\left(-2\nu \frac{\partial \ln Q}{\partial x}\right) Q dx \tag{3}$$

с начальным условием $Q = \exp(-s_0(x)/2\nu)$ при $t = 0$, где $s_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} v_0(x) dx.$

При больших числах Рейнольдса $aL/\nu = 1/\mu \gg 1$, где a — характерная амплитуда v_0, решение (3) можно искать в виде квазиклассической асимптотики

$$Q = \exp(-s/2\nu).$$

Для главного члена разложения действия s по степеням μ получаем уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) dx. \tag{4}$$

Для $v = (\partial s/\partial x)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \psi(v),$$

которое можно получить и непосредственно из (2), если искать решение в виде разложения по степеням μ.

Уравнению (4) эквивалентна характеристическая система

$$\frac{dv}{dt} = \psi(v), \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(v) dx. \tag{5}$$

Решая (5) с начальными условиями при $t = t_0$, $x = x_0$, $v = v_0$, $s = s_0$, имеем

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{\psi(v)} = t, \qquad x = x_0 + \int\limits_{v_0}^{v} \frac{v dv}{\psi(v)},$$
$$s = s_0 + \int\limits_{0}^{t} \left[\frac{v^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(v) dx\right] d\tau. \tag{6}$$

Для уравнения (1), т. е. при $\psi(u) = \gamma u$, получаем

$$v = v_0(x_0)\exp(\gamma t), \quad x = x_0 + [v_0(x_0)/\gamma][\exp(\gamma t) - 1],$$
$$s = s_0 \exp(\gamma t) + (v_0^2/2\gamma)\exp(\gamma t)[\exp(\gamma t) - 1]. \tag{7}$$

Выражения (6), (7) описывают систему лучей с заданными на них величинами v и s. Остановимся на некоторых свойствах этой системы:

1) Лучи, выходящие из точек, для которых $dv_0/dx_0 < 0$, представляют собой сходящийся пучок и образуют каустику, которая описывается системой уравнений $dx/dx_0 = 0$, $x = x(x_0)$. Точки возникновения каустик лежат на лучах, для которых $dv_0/dx_0 = \min$.

2) Как и для лучей геометрической оптики, из (6), (7) следует, что в точку на каустике приходят два луча (один из них каустикообразующий, для которого каустика — место самопересечения). В точку за каустикой приходят три луча (один из них испытавший самопересечение). На достаточном удалении от каустики в точку может приходить $2n+1$ лучей, из которых n испытали самопересечение. Таким образом, каустика является границей области однозначности решений лучевых уравнений. При этом следует иметь в виду, что диффузионные поля, описываемые (3), имеют вещественную функцию в показателе экспоненты. В связи с этим лучевыми являются траектории, соответствующие минимуму, но не экстремуму действия s, а потому не следует учитывать траектории, испытавшие самопересечения [9]. Вследствие этого через достаточно большое время лучи с $dv_0/dx_0 < 0$ могут не учитываться.

3) Лучи, выходящие из областей, где $dv_0/dx_0 > 0$, образуют расходящиеся пучки, пересекающиеся между собой. В точку за каустикой приходят два, а затем и более лучей, принадлежащих разным парциальным пучкам. При периодическом или квазипериодическом начальном распределении s_0 парциальные пучки выходят из окрестностей минимумов s_0. Центральный луч расходящегося пучка, для которого $v = 0$, не отклоняется от начального положения и обладает минимальным действием. От центра к периферии пучка действие растет.

В области однозначности лучей решение (3) и (2) непосредственно следует из (6) и (7). В области многозначности естественно искать полное решение в виде суммы парциальных, связанных с разными лучами:

$$Q = \sum Q_i, \quad Q_i = \exp(-s_i'/2\nu), \tag{8}$$

где Q_i удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2} + \frac{1}{2\nu} \int\limits_{-\infty}^{x} \psi\left(-2\nu \frac{\partial}{\partial x} \sum \ln Q_i\right) dx\, Q_i, \tag{9}$$

а s_i' — квазиклассическое действие, искаженное взаимодействием лучей.

Чтобы получить уравнение для искаженного действия, воспользуемся следующими соображениями. Парциальные решения (8), в силу своей вещественности, не интерферируют, но конкурируют между собой. Решение с наибольшим отрицательным действием оказывается доминирующим, а все остальные подавленными. При пересечении двух пучков, выходящих из разных областей $dv_0/dx_0 > 0$, образуется линия равных действий, начало которой совпадает с точкой возникновения каустики. Таким образом, область неоднозначности лучевых траекторий разбивается на подобласти, где доминируют разные парциальные решения (разные пучки). При этом, по крайней мере, если не происходит одновременного «столкновения» многих лучей с почти одинаковыми действиями, имеем

$$\ln \sum Q_i = (-1/2\nu) \sum s_i' \varepsilon(s_i') + O(1),$$

где

$$\varepsilon(s_i') = \begin{cases} 1 \quad (s_i' < s_j') & \text{для любого } i \neq j, \\ 0 \quad (s_i' > s_j') & \text{по крайней мере для одного } j \neq i. \end{cases}$$

Функция $\sum s'\varepsilon(s')$ непрерывна на границах подобластей, где доминируют разные парциальные решения.

Для искаженного парциального действия s'_i отсюда получаем уравнение

$$(\partial s'_i/\partial t) + (1/2)(\partial s'_i/\partial x)^2 = \Phi_i(x, t), \tag{10}$$

где

$$\Phi_i(x, t) = \int_{-\infty}^{x} \sum \psi(\partial s'_i/\partial x)\,\varepsilon(s'_i)\,dx.$$

Рассмотрим два парциальных решения с действиями s'_1 и s'_2. Пусть $\tilde{x}_{12}(t)$ — линия равных действий, где $s'_1 = s'_2$. Размеры пограничного слоя, где следует учитывать взаимодействие парциальных решений, определяются условием $s_1 - s_2 \sim \nu$, т. е. $\Delta x \sim \nu/v$. Отсюда следует, что если x принадлежит пограничному слою, то

$$\int_{\tilde{x}_{12}}^{x} \psi(\partial s'_1/\partial x)\,dx \sim \int_{\tilde{x}_{12}}^{x} \psi(\partial s'_2/\partial x)\,dx \sim O(\nu).$$

Таким образом, функцию $\Phi_i(x, t)$ для некоторого парциального решения всюду, где это решение необходимо учитывать, с точностью до малых величин можно представить в виде

$$\Phi_i(x, t) = \int_{-\infty}^{x_i} \sum \psi(\partial s'_i/\partial x)\,\varepsilon(s'_i)\,dx + \int_{x_i}^{x} \psi(\partial s_i/\partial x)\,dx, \tag{11}$$

где $x_i(t)$ — положение некоторого фиксированного луча данного парциального пучка. Подставляя (11) в (10) и сравнивая полученное уравнение с (4), можно увидеть, что искаженное парциальное действие отличается от неискаженного для данного пучка на функцию, зависящую только от времени. Парциальные лучевые поля $x(x_0, t)$ и $v(x_0, t)$ не зависят от этой функции и определяются выражениями (6), (7). Для $s_i'(x)$ получаем

$$s'_i(x) = s_0(x_i) + \int_{x_i}^{x} v_i\,dx + \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{x_i(\tau)} \sum \psi(v_i)\,\varepsilon(s'_i)\,dx + v_i^2(x_i)/2\right] d\tau. \tag{12}$$

При $\psi = \gamma u$ справедливо $\int_{-\infty}^{x} \sum \psi(v_i)\,\varepsilon(s_i)\,dx = \gamma s(x)$ и (12) совпадает с выражением (7) для неискаженного действия.

Приравнивая s'_1 и s'_2, получаем условие для нахождения линии равных действий $\tilde{x}(t)$:

$$s_0(x_1) + \int_{x_1}^{\tilde{x}(t)} v_1\,dx + \int_0^t \left[(v_1^2(x_1)/2) - \int_{x_1}^{\tilde{x}(\tau)} \psi(v_1)\,dx_0\right] d\tau =$$

$$= s_0(x_2) + \int_{x_2}^{\tilde{x}(t)} v_2\,dx + \int_0^t \left[v_2^2(x_2)/2 - \int_{x_2}^{\tilde{x}(\tau)} \psi(v_2)\,dx\right] d\tau. \tag{13}$$

В (13) $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ — некоторые фиксированные лучи, принадлежащие данным пучкам. При периодическом или квазипериодическом s_0 удобно взять в качестве x_1 и x_2 центральные лучи пучков.

Дифференцируя (13) по t, получаем то же условие в виде, известном из теории ударных волн [5]:

$$d\tilde{x}/dt = (1/2)[v_1(\tilde{x},\ t) + v_2(\tilde{x},\ t)]. \tag{14}$$

Координаты начальной точки $\tilde{x}(t)$ определяются из $dx/dx_0=0$, $x=x(x_0)$, $\partial v_0/\partial x_0 = \min$.

В области, где доминируют лучи с действиями s_1' и s_2', включая окрестность линии $\tilde{x}(t)$, поле u, используя (8), можно представить в виде

$$u = \frac{v_1(x,\ t) + v_2(x,\ t)}{2} - \frac{v_1(x,\ t) - v_2(x,\ t)}{2} \operatorname{th} \frac{s_1 - s_2}{2\nu}, \tag{15}$$

где $s_1 - s_2 = \int\limits_{\tilde{x}}^{x} (v_1 - v_2)\,dx$. Входящие в (15) величины определяются полученными выше формулами.

Границы применимости построенного решения связаны с требованием отсутствия большого числа конкурирующих парциальных решений с близкими значениями действия в одной точке. Для этого изменение действия на характерном масштабе должно быть достаточно велико: $\Delta s \sim aL \gg \nu$ (a — характерная амплитуда поля $u(t)$), т. е. должно быть большим текущее число Рейнольдса: $a(t)L/\nu \gg 1$.

При выполнении этого условия в каждой точке нужно учитывать не более двух парциальных решений и поле u всюду может быть рассчитано по формуле (15). При этом каждое парциальное решение определяет гладкую часть решения (1) и (2), а переход от одного парциального пучка к другому соответствует ударным фронтам.

Полученное решение имеет ту же структуру и находится тем же путем, что и решение уравнения Бюргерса, которое подстановка Хопфа — Коула переводит в линейное. Это является следствием «слабой» нелинейности (3).

3. Проведем исследование полученного решения для частных случаев. Рассмотрим сначала $\psi = \gamma u$. Если начальное распределение s_0 имеет периодический или квазипериодический характер с амплитудой $v_{\max} \sim a$, то при $a/\gamma L(\exp(\gamma t) - 1) \gg 1$ доминирующими оказываются лучи, выходящие из малых окрестностей точек x_m, где $s_0(x_m) = \min$, $\partial v_0/\partial x_m = q_m$. Для данного пучка имеем

$$\begin{gathered}(x - x_m) = (x_0 - x_m)[1 + (q_m/\gamma)(\exp(\gamma t) - 1)],\\ v = \varphi_m(t)(x - x_m),\\ s = s_0(x_m)\exp(\gamma t) + [\varphi_m(t)(x - x_m)^2/2],\end{gathered} \tag{16}$$

где $\varphi_m(t) = \gamma q_m \exp(\gamma t)/\{\gamma + q_m[\exp(\gamma t) - 1]\}$.

Если начальное возмущение имеет вид $v_0 = a\sin(2\pi x/L)$, $s_0=-aL\cos(2\pi x/L)/2\pi$, точки минимального действия определяются из $\tilde{x}_m=mL$, а положение линии равных действий — из $\tilde{x}=(m+1/2)L$. Момент появления ударного фронта, соответствующий начальной точке линии равных действий, находится из $\exp(\gamma t) = 1 + (\gamma L/2\pi a)$, что совпадает с результатами, полученными в [10]. Поле u в интервале $0 < x < L$ получаем из (15) в виде

$$u = \varphi(t)\{x - (L/2) + (L/2)\,\mathrm{th}[(\varphi(t)/2\nu)L(L/2 - x)]\}, \qquad (17)$$

где $\varphi(t) = \gamma a \exp(\gamma t)/[2\pi\gamma L + a(\exp(\gamma t) - 1)]$. Здесь $\varphi(t)(L/2)$ — амплитуда пилообразных волн.

Данные соотношения справедливы как при $\gamma > 0$, так и при $\gamma < 0$ (низкочастотное поглощение). При $\gamma < 0$ каустика (и ударные фронты) возникают, если только $|\gamma|L/2a\pi < 1$. При $|\gamma|L/2a\pi > 1$ всюду можно пользоваться выражениями (7) для области однозначности. При $\gamma > 0$, $\gamma L/a < 1$, $\gamma L^2/\nu \lesssim 1$ происходит уменьшение амплитуды волны до уровня $v_{\max} \sim \nu/L$, когда полученное решение перестает быть справедливым. Если $\gamma L^2/\nu \gg 1$, то при $t \gg 1/\gamma$ амплитуда волн выходит на стационарный уровень $v_{\max} = \gamma L/2$. Установление подобного режима происходит и при других периодических распределениях $s_0(x)$ и не зависит от деталей начальных условий, а только от масштаба L.

При произвольном квазипериодическом $s_0(x)$ линия равных действий задается выражением

$$[s_0(x_1) - s_0(x_2)]\exp(\gamma t) + (x_1^2 - x_2^2)\gamma/2 = \gamma\tilde{x}(t)(x_1 - x_2). \qquad (18)$$

Таким образом, точка $\tilde{x}(t)$ движется в сторону менее глубокого минимума s_0. При этом области, где доминируют пучки, связанные с меньшими минимумами, могут схлопываться, а соседние пилы сливаться между собой.

Пусть начальное распределение имеет вид, численно исследованный в [1]: $v_0 = a\sin(2\pi x/L) + b\sin(\pi x/L)$, $b \ll a$. На первом этапе доминирующими оказываются лучи, выходящие из окрестностей $x_m = mL$. Линия равных действий при $0 < x < L$ определяется формулой

$$\tilde{x}(t) = (L/2) + (2b/\gamma\pi)\exp(\gamma t),$$

откуда видно, что фронт между двумя пилами движется от точки $\tilde{x} = L/2$. Когда при $t\gamma = \ln(\gamma\pi L/4b)$ фронт достигает точки $\tilde{x} = L$, две пилы сливаются и устанавливаются волны удвоенного масштаба.

Очевидно, что в системе всегда устанавливаются волны наибольшего масштаба, соответствующие расстоянию между наиболее глубокими минимумами s_0. Это объясняет результаты, полученные численно в [1].

Если начальное периодическое распределение v_0 имеет такую постоянную составляющую, что распределение s_0 монотонно, в системе также устанавливаются пилообразные волны с $v_{\max} \sim \gamma L/2$, однако, кроме того, поле u имеет постоянную составляющую, которая меняется по закону $u = u_0\exp(\gamma t)$, где $u_0 = (1/L)\int\limits_{x_0}^{x_0+L} v_0(x)\,dx$. Для модулированного v_0 здесь также имеет место слияние пил и увеличение масштаба до максимального.

Рассмотрим теперь случай $\psi = \gamma u(1 - \beta u^2)$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$. Из (6) находим

$$x = x_0 + \frac{1}{2\gamma\sqrt{\beta}}\ln\frac{(1 + \sqrt{\beta}v)(1 - \sqrt{\beta}v_0)}{(1 - \sqrt{\beta}v)(1 + \sqrt{\beta}v_0)},$$
$$v = (1/\sqrt{\beta})\,\mathrm{th}\,\varphi, \quad \mathrm{sh}\,\varphi = \sqrt{\beta}\,(v_0/\sqrt{1 - \beta v_0^2})\exp(\gamma t). \qquad (19)$$

При $t \gg 1/\gamma + L\sqrt{\beta}$ доминирующими становятся лучи, выходящие из окрестностей минимумов (при периодическом или квазипериодическом s_0). Положение линии равных действий и поле u находится из (13)—(15).

Для начального синусоидального распределения $v = a\sin(2\pi x/L)$ при $t \gg 1/\gamma + \sqrt{\beta}L$ имеем

$$\tilde{x}_m = (m + 1/2)L, \quad v_m = \operatorname{th}\gamma\sqrt{\beta}\,(x - mL)\,(1/\sqrt{\beta}). \tag{20}$$

Поле u в интервале $0 < x < L$ определяется выражением

$$\begin{gathered} u = 1/2\sqrt{\beta}\{[\operatorname{th}(\gamma\sqrt{\beta}x) + \operatorname{th}(\gamma\sqrt{\beta}(x - L))] + [\operatorname{th}\gamma\sqrt{\beta}x - \\ - \operatorname{th}\gamma\sqrt{\beta}(x - L)]\operatorname{th}[\operatorname{th}(\gamma\sqrt{\beta}(L/2))((L/2) - x)]/\nu\sqrt{\beta}\}. \end{gathered} \tag{21}$$

Как видно из (21), при $\gamma\sqrt{\beta}L \gg 1$ волна u имеет вид телеграфного сигнала с амплитудой $1/\sqrt{\beta}$ и перебросами от $1/\sqrt{\beta}$ к $-1/\sqrt{\beta}$ и обратно в точках $x = mL/2$. Для применимости полученных выражений необходимо потребовать, чтобы на фронтах вблизи точек $x_m = mL$ не сказывалась диссипация за счет вязкости, т. е. выполнялось условие $1/\nu\gamma\beta \gg 1$.

Для начального распределения более общего вида в этом случае наблюдаются те же явления, что и для проанализированного выше случая $\psi(u) = \gamma u$, за исключением формы волны на пологом участке.

Результаты данной работы позволяют исследовать эволюцию различных начальных распределений, описываемую уравнениями (1) и (2), в том числе эволюцию шумового и смешанного сигналов. (При этом должны быть использованы методы отбора квазиклассических траекторий, развитые для уравнения Бюргерса в [8, 9].)

ЛИТЕРАТУРА

1. Ott E., Manheimer W. M., Bovk D. L., Boris J. R. — Phys. Fluids, 1973, **16**, № 6, с. 855.
2. Рабинович М. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 4, с. 477.
3. Рабинович М. И, Фабрикант А. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 5, с. 721
4. Новиков А. А — Изв АН СССР МЖГ, 1977, № 2, с. 179
5 Уизем Дж Линейные и нелинейные волны. — М: Мир, 1977.
6. Руденко О. В., Чиркин А С. — ДАН СССР, 1976, **214**, № 5, с 1045.
7 Пелиновский Е Н — Изв вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 5—6, с. 883
8. Kida Sh. — J. Fluid Mech., 1979, **93**, № 2, р 337.
9. Якушкин И. Г — Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
10. Романова Н Н. — Изв. АН СССР. Сер Физика атмосферы и океана, 1970, **6**, № 2, с 134

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
29 декабря 1980 г.

A SOLUTION OF MODIFIED BURGERS EQUATION

I. G. Yakushkin

A modified Burgers equation has been considered which describes nonlinear waves in a medium with low frequency pump or absorption. At large Reynolds numbers by Hopf — Kole substitution an asymptotic solution of the equation has been obtained which describes the evolution of the initial field distribution $u(x)$ to the stationary or quasi-stationary regime. Different particular cases have been studied.