

УДК 621.396

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО МНОГОГРАННОГО ТЕЛА

*E. H. Васильев, Г. И. Гусарова, В. Г. Каменев, В. В. Малов*

Методом интегральных уравнений рассмотрено возбуждение идеально проводящего многогранного тела с осевой симметрией. Применение дискретного преобразования Фурье позволило численно анализировать на современных ЭВМ объекты с размерами порядка длины волны в свободном пространстве.

В качестве подтверждения правильности предложенного алгоритма приводятся результаты решения задачи о возбуждении электрическим диполем идеально проводящего куба.

Использование интегральных уравнений позволяет решать задачи возбуждения тел произвольной формы. Основной трудностью является большая размерность системы линейных алгебраических уравнений, образующейся при численном решении двумерного векторного интегрального уравнения. В частном случае, когда объект имеет цилиндрическую форму или форму тела вращения, удается перейти к системе одномерных интегральных уравнений с помощью разложения искомой функции в ряд Фурье по азимутальной координате [1]. Рассмотрим более сложный случай многогранного тела, которое обладает симметрией поворота вокруг оси на угол  $2\pi/N$  ( $N$  — количество граней). Симметрия тела дает возможность уменьшить область интегрирования до поверхности одной грани. Формальным аппаратом при этом является дискретное преобразование Фурье, которое сводит задачу к  $N$  независимым интегральным уравнениям, каждое из которых соответствует отдельной дискретной гармонике Фурье. Предлагаемый метод уменьшает размер требуемой для решения задачи оперативной памяти ЭВМ в  $N$  раз, а время решения — в  $N^2$  раз и позволяет рассчитывать возбуждение идеально проводящих многогранных тел с осевой симметрией, имеющих размеры порядка длины волны в свободном пространстве  $\lambda$ .

**Интегральное уравнение в обобщенных координатах.** Задача внешнего возбуждения идеально проводящего тела произвольной формы сторонними источниками электромагнитных волн может быть сведена к интегральному уравнению Фока для плотности поверхностного электрического тока [2]:

$$\mathbf{J}^\vartheta(p) + (2\pi)^{-1} \int_{\Sigma} [\mathbf{n}_p, [\mathbf{J}^\vartheta(q), \operatorname{grad}_p \Psi]] d\sigma_q = 2\mathbf{J}^{\vartheta, \Pi}(p), \quad (1)$$

где  $p$  и  $q$  — точки наблюдения и истока соответственно,  $\mathbf{n}_p$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела  $\Sigma$  в точке  $p$ ,  $\Psi = e^{-iK\mathbf{R}_0} R_0^{-1}$ ,  $R_0$  — расстояние между точками  $p$  и  $q$ ,  $\mathbf{J}^{\vartheta, \Pi}(p) = [\mathbf{n}_p, \mathbf{H}^\Pi(p)]$ ,

$\mathbf{H}^\Pi(p)$  — напряженность первичного магнитного поля.

Авторам представляется целесообразным привести подробные выкладки по преобразованию исходного векторного интегрального урав-

нения (1) к форме, удобной для применения дискретного преобразования Фурье.

Представим уравнение (1) в виде системы скалярных уравнений. Для этого введем на теле ортогональную систему координат  $U, V, W$  (рис. 1), построив ее следующим образом. Единичный вектор  $\vec{u}^0$  направим по нормали к поверхности тела, единичный вектор  $\vec{v}^0$  выберем так, чтобы он был касателен к поверхности тела и находился в меридиональной плоскости, в которой лежат ось симметрии и рассматриваемая точка. Направление возрастания координаты  $v$  зададим по аналогии со сферической системой координат. Третий орт  $\vec{w}^0$  образуем, перемножив векторно  $\vec{u}^0$  на  $\vec{v}^0$ , он, как и  $\vec{v}^0$ , касателен к поверхности тела. В выбранной системе координат векторное интегральное уравнение (1) может быть представлено в виде системы двух скалярных интегральных уравнений относительно составляющих плотности поверхностного электрического тока  $J_v$  и  $J_w$ . Будем иметь при этом в виду, что векторы  $\vec{n}_p$  и  $\text{grad}_p \Psi$  заданы в репере в точке  $p$ , а вектор  $\vec{J}^0(q)$  в репере в точке  $q$ . Поэтому для выполнения векторных операций последний необходимо параллельно перенести из точки  $q$  в точку  $p$ . Если составляющие векторов удобнее взять в координатах  $U, V, W$ , то положение точек наблюдения и источника разумнее характеризовать цилиндрическими координатами  $R, \varphi, Z$  и  $R', \varphi', Z'$  соответственно. Выполненные преобразования не сложны, но громоздки. Опуская их, выпишем систему интегральных уравнений:

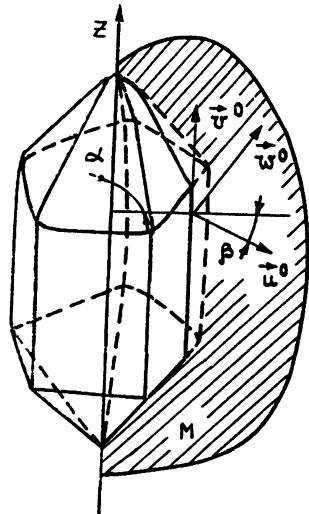


Рис. 1.

$$J_v(p) + (2\pi)^{-1} \int_{\Sigma} [\Pi_{vv} J_v(q) + \Pi_{vw} J_w(q)] d\sigma_q = 2J_v^{\Pi}(p), \quad (2)$$

$$J_w(p) + (2\pi)^{-1} \int_{\Sigma} [\Pi_{wv} J_v(q) + \Pi_{ww} J_w(q)] d\sigma_q = 2J_w^{\Pi}(p), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{vv} &= (\partial\Psi/\partial R) (\sin \alpha' \cos \beta - \cos \alpha' \cos \alpha \sin \beta \sin \Phi) + \\ &+ R^{-1} (\partial\Psi/\partial\varphi) (-\cos \alpha' \cos \alpha \sin \beta \cos \Phi - \sin \alpha' \sin \alpha \sin \beta) + \\ &+ (\partial\Psi/\partial z) (\cos \alpha' \cos \beta \cos \Phi + \cos \alpha' \sin \alpha \sin \beta \sin \Phi); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{vw} &= (\partial\Psi/\partial R) [\cos \alpha \sin \beta (\cos \beta' \cos \Phi - \sin \beta' \sin \alpha' \sin \Phi) - \\ &- \sin \beta' \cos \alpha' \cos \beta] + R^{-1} (\partial\Psi/\partial\varphi) \sin \beta (\sin \beta' \cos \alpha' \sin \alpha' \sin \alpha - \\ &- \sin \beta' \sin \alpha' \cos \alpha \cos \Phi - \cos \beta' \cos \alpha \sin \Phi) + (\partial\Psi/\partial z) [\sin \beta' \sin \alpha' \times \\ &\times (\cos \beta \cos \Phi + \sin \alpha \sin \beta \sin \Phi) + \cos \beta' \cos \beta \sin \Phi - \sin \alpha \sin \beta \cos \beta' \cos \Phi]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Pi_{wv} = (\partial\Psi/\partial R) (-\cos \alpha' \sin \alpha \sin \Phi) + (\partial\Psi/\partial z) (-\cos \alpha' \cos \alpha \sin \Phi); \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ww} &= (\partial\Psi/\partial R) (-\sin \beta' \sin \alpha' \sin \alpha \sin \Phi + \cos \beta' \sin \alpha \cos \Phi) + \\ &+ R^{-1} (\partial\Psi/\partial\varphi) (-\sin \beta' \sin \alpha' \sin \alpha \cos \Phi - \cos \beta' \sin \alpha \sin \Phi - \\ &- \sin \beta' \cos \alpha' \cos \alpha) + (\partial\Psi/\partial z) (-\sin \beta' \sin \alpha' \cos \alpha \sin \Phi + \cos \beta' \cos \alpha \cos \Phi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\beta$  — угол между нормалью к поверхности тела и ее проекцией на меридиональную плоскость  $M$ ,  $\alpha$  — угол между проекцией нормали, упомянутой выше, и осью симметрии тела  $Z$  (рис. 1),  $\Phi = \phi - \phi'$ .

Необходимо заметить, что система (2) и формулы (3)–(6) получены при условии, что в каждом сечении тела плоскостью  $z = \text{const}$  получаются подобные фигуры, т. е. при больших ограничениях, чем уравнение (1).

При вычислении правых частей системы уравнений (2) положим, что имеются только электрические сторонние токи. В соответствии с (1) получим

$$J^\pi(p) = [n_p, H^\pi(p)] = \frac{1}{4\pi} \int_W [n_p, [j^{\text{ct}}(q), \text{grad}_p \Psi]] d\omega_q, \quad (7)$$

здесь  $W$  — объем, занимаемый сторонними токами. На основании совпадения подынтегральных выражений в уравнении (1) и формуле (7) можно сразу записать:

$$\begin{aligned} J_v^\pi(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_W [\Pi_{vv} j_u^{\text{ct}} + \Pi_{vv} j_v^{\text{ct}} + \Pi_{vw} j_w^{\text{ct}}] d\omega_q, \\ J_w^\pi(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_W [\Pi_{wu} j_u^{\text{ct}} + \Pi_{wv} j_v^{\text{ct}} + \Pi_{ww} j_w^{\text{ct}}] d\omega_q. \end{aligned} \quad (8)$$

Сторонний ток может содержать все три составляющие  $j_u^{\text{ct}}$ ,  $j_v^{\text{ct}}$  и  $j_w^{\text{ct}}$ , поэтому выражения для ядер  $\Pi_{vv}$ ,  $\Pi_{vw}$ ,  $\Pi_{wu}$ ,  $\Pi_{ww}$  (3)–(6) следует дополнить соотношениями:

$$\begin{aligned} \Pi_{vu} &= (\partial\Psi/\partial R) [-\sin\beta \cos\alpha (\cos\beta' \sin\alpha' \sin\Phi + \sin\beta' \cos\Phi) - \\ &- \cos\beta' \cos\alpha' \cos\beta] + R^{-1}(\partial\Psi/\partial\varphi) [\sin\beta \cos\alpha (-\cos\beta' \sin\alpha' \cos\Phi + \\ &+ \sin\beta' \sin\Phi) + \cos\beta' \cos\alpha' \sin\alpha \sin\beta] + (\partial\Psi/\partial z) [\cos\beta' \cos\beta \sin\alpha' \cos\Phi - \\ &- \sin\beta' \cos\beta \sin\Phi + \sin\beta' \sin\beta \sin\alpha \cos\Phi + \cos\beta' \sin\alpha' \sin\alpha \sin\beta \sin\Phi]; \\ \Pi_{wu} &= (\partial\Psi/\partial R) (-\cos\beta' \sin\alpha' \sin\alpha \sin\Phi - \sin\beta' \sin\alpha \cos\Phi) + \\ &+ R^{-1}(\partial\Psi/\partial\varphi) (-\cos\beta' \sin\alpha' \sin\alpha \cos\Phi + \sin\beta' \sin\alpha \sin\Phi - \\ &- \cos\beta' \cos\alpha' \cos\alpha) + (\partial\Psi/\partial z) (-\cos\beta' \sin\alpha' \cos\alpha \sin\Phi - \sin\beta' \cos\alpha \cos\Phi). \end{aligned} \quad (10)$$

**Дискретное преобразование Фурье.** Для удобства применения дискретного преобразования Фурье перепишем систему уравнений (2) в матричной форме:

$$I(p) + 0,5 \pi^{-1} \int_{\Sigma} P(p, q) I(q) d\sigma_q = 2I^\pi(p), \quad (11)$$

где

$$I = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad P = \begin{bmatrix} \Pi_{vv} & \Pi_{vw} \\ \Pi_{wu} & \Pi_{ww} \end{bmatrix}$$

— вектор-столбец токов и матричное ядро интегрального уравнения (11) соответственно.

Пусть тело имеет  $N$  плоскостей симметрии. Пронумеруем грани индексами  $0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ . В этом случае уравнение (11) можно записать, выделяя явным образом зависимость от азимутальной координаты:

$$I(\varphi_m) + 0,5\pi^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Sigma_n} P(\varphi_m - \varphi'_n) I(\varphi'_n) d\sigma'_n = 2I^{\pi}(\varphi_m). \quad (12)$$

Индекс  $m$  в (12) показывает, на какой грани расположена точка наблюдения  $p$ , а индекс  $n$  — на какой грани расположена точка истока  $q$ . Очевидная из рис. 1 связь

$$\varphi_m = \varphi_0 + m\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = 2\pi N^{-1}, \quad \Sigma_n = \Sigma_0, \quad \varphi'_n = \varphi'_0 + n\Delta\varphi, \quad d\sigma_n = d\sigma_0$$

позволяет представить уравнение (12) в виде

$$I(\varphi_0 + m\Delta\varphi) + 0,5\pi^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ P[\varphi_0 - \varphi'_0 + (m-n)\Delta\varphi] I(\varphi'_0 + n\Delta\varphi) \right\} d\sigma_0 = 2I^{\pi}(\varphi_0 + m\Delta\varphi). \quad (13)$$

Умножим обе его части на  $N^{-1}\exp(-i2\pi N^{-1}m)$  и просуммируем по  $m$  от 0 до  $N-1$ . В результате получим

$$I_r(\varphi_0) + N^{-1} \int_{\Sigma_0} \left[ 0,5\pi^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} P[\varphi_0 - \varphi'_0 + (m-n)\Delta\varphi] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp[-2\pi N^{-1}(m-n)] \right\} I(\varphi'_0 + n\Delta\varphi) \exp(-i2\pi N^{-1}n) \right] d\sigma_0 = 2I^{\pi}(\varphi_0), \quad (14)$$

где

$$I_r(\varphi_0) = N^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} I(\varphi_0 + m\Delta\varphi) \exp(-i2\pi N^{-1}m).$$

Так как ядро интегрального уравнения (11) является периодической по  $\varphi$  функцией с периодом  $2\pi$  и  $N\Delta\varphi = 2\pi$ , то нетрудно показать, что при любом числе  $n$  из  $[0, N-1]$  выражение в фигурных скобках (14) представимо следующим образом:

$$N^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} P[\varphi_0 - \varphi'_0 + (m-n)\Delta\varphi] \exp[-i2\pi N^{-1}(m-n)] = \\ = N^{-1} \sum_{k=-n}^{N-1} P(\varphi_0 - \varphi'_0 + k\Delta\varphi) \exp(-i2\pi N^{-1}k) = \\ = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} P(\varphi_0 - \varphi'_0 + k\Delta\varphi) \exp(-i2\pi N^{-1}k). \quad (15)$$

Последнюю сумму для краткости обозначим  $P_r(\varphi_0 - \varphi'_0)$ , после чего уравнение (14) принимает вид

$$I_r(\varphi_0) + 0,5\pi^{-1} \int_{\Sigma_0} P_r(\varphi_0 - \varphi'_0) I_r(\varphi'_0) d\sigma'_0 = 2I^{\pi}(\varphi_0), \quad (16)$$

где индекс 0 означает, что точки наблюдения и истока находятся в пределах одной грани. Легко видеть, что соотношение (15) является дискретным преобразованием Фурье для некоторой функции в системе  $N$  равноотстоящих точек [3].

В общем случае необходимо записать  $N$  уравнений вида (16) для каждой гармоники. В силу ортогональности дискретных гармоник Фурье все эти уравнения независимы и после их решения можно восстановить распределение плотности электрического тока на всей поверхности объекта. На  $n$ -й грани ток определяется суммой:

$$I^n = N^{-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_m \exp(i2\pi N^{-1} mn). \quad (17)$$

Кусочно-постоянная аппроксимация искомой плотности тока каждой из  $N$  гармоник позволяет методом Крылова—Боголюбова перейти от решения  $N$  интегральных уравнений (16) к решению такого же количества систем линейных алгебраических уравнений. Уменьшение области интегрирования в  $N$  раз приводит к уменьшению во столько же раз порядка соответствующей эквивалентной системы алгебраических уравнений при неизменной точности получаемого решения. Описанный процесс может быть продолжен, если грань тела имеет одну или две плоскости симметрии. Тогда интегрирование проводится по половине или четверти грани, а число систем линейных алгебраических уравнений увеличивается соответственно вдвое или вчетверо при таком же уменьшении порядка каждой из них.

**Численные результаты.** Рассмотрим два примера: возбуждение элементарным электрическим диполем идеально проводящих шестнадцатигранной призмы с плоскими торцами и куба. Несмотря на простоту этих примеров они позволяют достаточно полно проверить разработанный алгоритм и убедиться в эффективности предлагаемого метода.

Идеально проводящая шестнадцатигранная призма (величина продольного полупериметра по средней линии грани  $Ka = 3,14$ ) возбуждается элементарным электрическим диполем ( $Kl = 0,1$ ), расположенным вдоль оси симметрии на расстоянии  $K\Delta = 0,1$  от поверхности тела. Распределение модуля и фазы плотности поверхностного электрического тока приведены на рис. 2 (сплошная линия), по оси абсцисс отложено расстояние вдоль средней линии грани призмы, отсчитываемое от оси симметрии (координата  $v$ ).

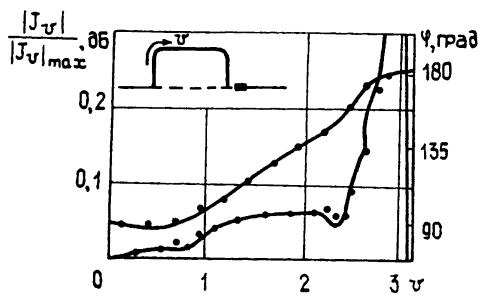


Рис. 2

Возбуждение идеально проводящего куба с размером ребра  $Ka = 1,57$  элементарным электрическим диполем ( $Kl = 0,1$ ), отстоящим от поверхности на расстоянии  $K\Delta = 0,1$ , рассмотрено в двух случаях: осевое и радиальное возбуждение. Зафиксируем в качестве главной оси симметрии одну из трех осей куба. Относительно этой выбранной оси (на рис. 1 она соответствует оси  $Z$ ) можно выделить два способа возбуждения тела. Первый способ (осевое возбуждение), когда диполь находится на оси  $Z$ , второй (радиальное возбуждение), когда диполь

ортогонален главной оси симметрии (ось  $Z$ ) и расположен вдоль другой оси куба. Осевое возбуждение многогранных тел характерно наличием только одной нулевой дискретной азимутальной гармоники поверхностного тока. При любом другом расположении диполя в решении присутствуют все дискретные гармоники, и суммарное распределение поверхностного тока находится по формуле (17). Симметрия куба позволяет легко сравнить решения, полученные в обоих случаях. На рис. 3 и рис. 4 приведены распределения плотностей продольной ( $v$ -й) и поперечной ( $w$ -й) составляющих тока на поверхности грани для первого случая возбуждения (сплошная линия), точками показаны результаты расчета для второго случая. По оси абсцисс отложено расстояние вдоль линии на грани тела, которое соответствует координате  $v$ . Из симметрии куба следует, что на участках поверхности, расположенных одинаково относительно диполя в первом и во втором случаях, токи должны быть одинаковы. Практическое совпадение полученных решений свидетельствует о правильности предложенного алгоритма.

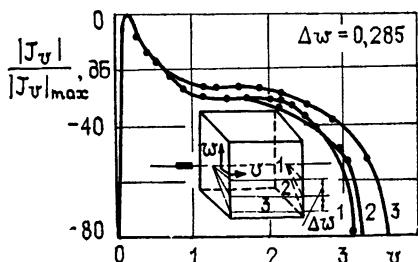


Рис. 3.

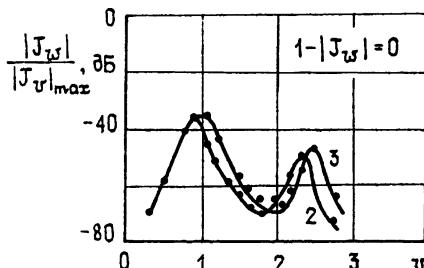


Рис. 4.

При расчетах поверхность грани куба разбивалась на элементарные прямоугольные участки. Было установлено, что изменение их линейных размеров в пределах 0,1—0,02λ существенно не изменяет полученного решения. Время расчета одной дискретной азимутальной гармоники в случае возбуждения куба при размерах элементов разбиения порядка 0,05λ на ЭВМ ЕС-1040 составило две минуты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Е. Н — Научн. докл. высш. школы — Радиотехника и электроника, 1958, № 1, с. 188.
2. Фок В. А.—ЖЭТФ, 1945, 15, вып. 9, с. 693.
3. Хемминг Р. В. Численные методы. Для научных работников и инженеров.—М.: Наука, 1972, с. 78.

Московский энергетический  
институт

Поступила в редакцию  
5 января 1982 г.

#### EXCITATION OF AN PERFECTLY CONDUCTING MULTIHEDRAL BODY

*E. N. Vasil'ev, G. I. Gusarova, V. G. Kamenev, V. V. Malov*

Excitation of an perfectly conducting multihedral body with the axis symmetry is considered by the method of integral equations. The use of the discrete Fourier transformation permits one to analyse numerically the objects with dimensions of the order of the wavelength in free space with help of modern computers. To confirm the correctness of the algorithm suggested solution results are presented of a problem of excitation of an perfectly conducting cube by the electric dipole.