ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538.56

О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ГАУССОВЫМ ТЕРМОСТАТОМ

С. А. Дягилев

Найдено точное кинетическое уравнение для корреляторов квантовой системы, взаимодействующей с гауссовым термостатом. В случае малости энергии взаимодействия системы и термостата построены одномоментное и двухмоментное приближения и получены соотношения регрессии для флуктуаций. Найденные выражения проиллюстрированы на примере немарковской релаксации квантового гармонического осциллятора.

В обширном классе задач статистической физики весьма плодотворным оказывается представление о динамической системе (обычно обладающей конечным числом степеней свободы и дискретными энергетическими уровнями), взаимодействующей с диссипативной системой (или термостатом), имеющей бесконечное число степеней свободы и непрерывный энергетический спектр (см., например, [1–3]). Среди возможных типов термостатов наиболее простыми и вместе с тем часто встречающимися в физических приложениях являются так называемые гауссовы термостаты [3]. Их физической реализацией, в частности, является любая совокупность невзаимодействующих между собой квазичастиц, подчиняющихся статистике Бозе, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия (фотоны электромагнитного поля, фононы в твердом теле и т. д). При этом гауссовой статистике подчинены координаты квазичастиц, входящие в гамильтониан взаимодействия динамической системы с термостатом. В связи с этим весьма заманчивым является применение квантового аналога теоремы Фурутцу—Новикова [3, 4] для получения микроскопических уравнений движения относительно переменных квантовой динамической системы. Отметим, что решение задач классической статистической физики, как правило, существенно упрощается использованием этой теоремы [5–7]. В работе [3] указанным приемом было получено принципиально новое квантовое микроскопическое уравнение Ланжевена..

В настоящей работе с помощью упомянутой выше теоремы развит иной (по нашему мнению более удобный) подход к исследованию микроскопической теории релаксации и флуктуаций динамической системы — метод моментов, который, в принципе, разумеется, полностью эквивалентен ланжевеновскому.

Отметим, что ранее в [8, 9] был развит и успешно применялся для построения кинетической теории газов и полностью или частично ионизованной плазмы существенно другой метод моментов, основанный на понятии фазовой плотности.

Опираясь на результат работы [3], можно показать, что усредненное (по состояниям термостата) уравнение движения для физической переменной $a(t)$ динамической системы не является замкнутым относительно одномоментных средних, а содержит также корреляционные функции. Этот факт является прямым следствием гауссовости термостата, поскольку можно доказать, что в негауссовом случае в уравнение вошли бы также моментные функции всех высших порядков. Указанный факт позволяет использовать метод моментов. В согласии с этим методом мы должны записать уравнение для корреляторов динамических переменных, которые, как будет показано ниже, в свою очередь будут содержать моментные функции третьего порядка. Продолжая этот процесс, мы получим бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений.

Цель данной работы состоит в том, чтобы, во-первых, развить метод моментов, ограничиваясь рамками корреляционной теории (т. е. получить точные микроскопические уравнения для одномоментных и двухмоментных средних); во-вторых, в предположении малости энергии взаимодействия разомкнуть цепочку и получить соответствующую приближенную систему уравнений (одномоментное и двухмоментное приближение). В разд. 2. настоящей работы второе уравнение решается и находятся приближенные соотношения регрессии для флуктуаций. В дальнейшем эти соотношения используются для получения приближенного немарковского уравнения для одномоментных средних. Найденное уравнение применяется для исследования немарковской релаксации квантового гармонического осциллятора, а полученное приближенное решение сравнивается с точным. Проводится детальное обсуждение пределов применимости найденных в работе приближенных соотношений.

1. ТОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМОМЕНТНЫХ И ДВУХМОМЕНТНЫХ СРЕДНИХ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Выберем модельный гамильтониан полной системы в виде

$$H = H_s + H_R - \sum_\alpha x_\alpha Q_\alpha - \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha(t). \tag{1}$$

Здесь H_s, H_R — соответственно гамильтонианы динамической системы и термостата, а $-\sum\limits_\alpha x_\alpha Q_\alpha$ и $-\sum\limits_\alpha x_\alpha f_\alpha(t)$ — части гамильтониана, обусловленные взаимодействием системы с гауссовым термостатом и внешними силами $f_\alpha(t)$ соответственно, x_α и Q_α — переменные, относящиеся к динамической системе и термостату.

Предполагается, что переменные $Q_\alpha^{(0)}(t_i)$ представляют собой многомерную гауссову совокупность [3]*.

При отыскании приближенных уравнений нам понадобится знание более общей, чем одномоментное среднее величины $\langle a(t+v, v)\rangle = \langle U(t+v, v)a\rangle$, где супероператор гайзенберговской эволюции от момента v к моменту $t+v$ определяется соотношением

$$\begin{gathered} Y(t+v,\ v) = U(t+v,\ v)\,Y = \\ = \left\{\tilde{T}\exp\left[i\hbar^{-1}\int\limits_v^{t+v} du\,H(u)\right]\right\} Y \left\{T\exp\left[-i\hbar^{-1}\int\limits_v^{t+v} du\,H(u)\right]\right\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь T и $\tilde{T}$ — хронологический и антихронологический операторы упорядочения Дайсона соответственно, а угловыми скобками $\langle\ldots\rangle = \mathrm{Sp}\,\rho_R\ldots$ обозначено усреднение по стационарной начальной ($t_0=0$) матрице плотности термостата ρ_R.

* Здесь и ниже символ (0) означает, что соответствующие переменные взяты в представлении взаимодействий.

Заметим, что $\langle a(t)\rangle = \langle a(t+v, v)\rangle|_{v=0}$.

Исходя из гайзенберговских уравнений движения, легко найти, что

$$da(t+v, v)/dt = \Big\langle U(t+v, v)\Big\{i\hbar^{-1}[H_s, a]_- - i\hbar^{-1}\sum_\alpha y_\alpha f_\alpha(t+v)\Big\}\Big\rangle - \sum_\alpha \langle U(t+v, v)\, y_\alpha Q_\alpha\rangle; \tag{3}$$

$$d\langle a(t)b(t+\tau)\rangle/d\tau = \Big\langle a(t)U(t+\tau, 0)\Big\{i\hbar^{-1}[H_s, b]_- - i\hbar^{-1}\sum_\alpha z_\alpha f_\alpha(t+\tau)\Big\}\Big\rangle - i\hbar^{-1}\sum_\alpha \langle a(t)U(t+\tau, 0) z_\alpha Q_\alpha\rangle, \tag{4}$$

где $y_\alpha = [x_\alpha, a]_-$, $z_\alpha = [x_\alpha, b]_-$.

Отметим, что гайзенберговские переменные динамической и диссипативной систем являются функционалами многомерной гауссовой совокупности $\{Q_\alpha^{(0)}(t_i)\}$ (см. [3, 4]). Применяя к последним членам правых частей (3), (4) квантовое обобщение теорем о среднем от произведения функционалов от гауссовых переменных [4] и записывая полученные результаты в форме, удобной для последующих приближений, окончательно находим

$$\begin{aligned} d\langle a(t+v, v)\rangle/dt = \Big\langle U(t+v, v)\Big\{ & i\hbar^{-1}[H_s, a]_- - i\hbar^{-1}\sum_\alpha y_\alpha f_\alpha(t+v) + 0{,}5\,\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^t dt_1\Big(\langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_+\rangle \times \\ & \times [y_\alpha, x_\beta(t+v-t_1, t+v)]_- + \langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_-\rangle \times \\ & \times [y_\alpha, x_\beta(t+v-t_1, t+v)]_+\Big)\Big\}\Big\rangle; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} d\langle a(t)b(t+\tau)\rangle/d\tau = \Big\langle a(t)U(t+\tau, 0)\Big\{ & i\hbar^{-1}[H_s, b]_- - i\hbar^{-1}\sum_\alpha z_\alpha f_\alpha(t+\tau) + 0{,}5\,\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^{t+\tau} dt_1(\langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_+\rangle \times \\ & \times [z_\alpha, x_\beta(t+\tau-t_1, t+\tau)]_- + \langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_-\rangle \times \\ & \times [z_\alpha, x_\beta(t+\tau-t_1, t+\tau)]_+)\Big\}\Big\rangle + 0{,}5\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^t dt_1 \times \\ & \times \{\langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1+\tau), Q_\beta]_+\rangle\langle[a(t), x_\beta(t-t_1)]_- z_\alpha(t+\tau)\rangle + \\ & + \langle[Q_\beta, Q_\alpha^{(0)}(t_1+\tau)]_-\rangle\langle[a(t), x_\beta(t-t_1)]_- z_\alpha(t+\tau)\rangle\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из уравнения (5) при $v=0$ следует, что его правая часть содержит не только одновременные, но и двухвременные средние гайзенберговских переменных (третий член в фигурных скобках) динамической системы. В свою очередь правая часть уравнения (6) для двухвременных средних выражается через трехвременные моментные функции.

Соотношения (5) и (6) представляют два первых члена зацепляющейся цепочки уравнений.

2. ОДНОМОМЕНТНОЕ И ДВУХМОМЕНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При решении конкретных задач необходимо уметь расцеплять систему (5), (6). Здесь мы укажем общий способ расцепления, пригодный в случае достаточно слабого взаимодействия динамической системы с термостатом и внешними силами.

Будем считать, что входящие в уравнения (5) и (6) корреляторы термостатных переменных $\langle QQ^{(0)}(t)\rangle$ и $\langle Q^{(0)}(t)\,Q\rangle$ являются достаточно острыми функциями вблизи $t=0$ [10], и обозначим их характерный масштаб как τ_c. Тогда предположим, что взаимодействие системы с термостатом и внешними силами настолько слабое, что на временах $0\leqslant t\lesssim\tau_c$ можно полагать эволюцию переменных $x_\alpha(t)$ свободной (т. е. в отсутствие термостата и внешних сил). Сказанное выше приводит к тому, что в уравнении (5) можно заменить под интегралом переменные $x_\alpha(t+v-t_1,\ t+v)$ на $x_\alpha^{(0)}(-t_1)$. В этом случае уравнение (5) становится замкнутым относительно одномоментных средних (одномоментное приближение) и принимает вид

$$\begin{gathered}
d\langle a(t+v,\ v)\rangle/dt = \Big\langle U(t+v,\ v)\,\Big\{i\hbar^{-1}[H_s,\ a]_- - \\
- i\hbar^{-1}\sum_\alpha y_\alpha f_\alpha(t+v) + 0{,}5\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^\infty dt_1 \times \\
\times (\langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1),\ Q_\beta]_+\rangle[y_\alpha,\ x_\beta^{(0)}(-t_1)]_- + \\
+ \langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1),\ Q_\beta]_-\rangle[y_\alpha,\ x_\beta^{(0)}(-t_1)]_+)\Big\}\Big\rangle, \\
t\gg\tau_c.
\end{gathered}\tag{7}$$

При выводе (7) мы предполагали, что $t\gg\tau_c$, и положили верхний предел интегрирования равным бесконечности.

Отметим, что частный случай уравнения (7) ($v=0$, $f_\alpha(t)=0$) был получен в [10]. Там же отмечалось, что найденное уравнение достаточно хорошо описывает реальные физические процессы.

Будем обозначать решение для $\langle a(t+v,v)\rangle$, найденное из (7) (т. е. в одномоментном приближении), через $\langle a(t+v,\ v)\rangle_1$.

Рассмотрим двухмоментное приближение. Заметим, что под интегралом в третьем члене правой части (6) стоят острые при $t=-\tau$ функции. Поэтому, если предполагать, что $\tau\gg\tau_c$, то вследствие того, что всегда $t_1\geqslant 0$, этот член будет пренебрежимо мал, и далее мы его опускаем. Тогда, делая во втором члене (6) приближения, аналогичные сделанным при выводе (7), окончательно находим

$$\begin{gathered}
d\langle a(t)b(t+\tau)\rangle/d\tau = \Big\langle a(t)U(t+\tau,\ 0)\Big\{i\hbar^{-1}[H_s,\ b]_- - \\
- i\hbar^{-1}\sum_\alpha z_\alpha f_\alpha(t+\tau) + 0{,}5\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^\infty dt_1 \times \\
\times (\langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1),\ Q_\beta]_+\rangle[z_\alpha,\ x_\beta^{(0)}(-t_1)]_- + \\
+ \langle[Q_\alpha^{(0)}(t_1),\ Q_\beta]_-\rangle[z_\alpha,\ x_\beta^{(0)}(-t_1)]_+)\Big\}\Big\rangle.
\end{gathered}\tag{8}$$

Приближенное соотношение (8) вместе с (5) являются замкнутой системой уравнений, реализующей двухмоментное приближение. Решение (5) и (8) в этом приближении будем отмечать нижним индексом «2» у скобки, например, $\langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2$.

Нетрудно показать, что решение уравнения (8) можно представить в следующей форме (соотношение регрессии для флуктуаций):

$$\langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2 = \langle U(t, 0) \langle b(t+\tau, t)\rangle_1\rangle, \quad \tau \gg \tau_c, \tag{9}$$

откуда следует, что двухвременная функция $\langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2$ обладает той же зависимостью от времени τ, что и $\langle b(t+\tau, t)\rangle_1$.

Аналогичное соотношение имеет место и для времен $\tau \ll -\tau_c$:

$$\langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2 = \langle U(t+\tau, 0) \langle a(t, t+\tau)\rangle_1 b\rangle. \tag{10}$$

С помощью единичной функции Хевисайда $\eta(\tau)$ соотношения (9) и (10) могут быть объединены в одну формулу:

$$\begin{gathered}\langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2 = \langle U(t, 0) a \langle b(t+\tau, t)\rangle_1\rangle \eta(\tau) + \\ + \langle U(t+\tau, 0) \langle a(t, t+\tau)\rangle_1 b\rangle \eta(-\tau), \quad |\tau| \gg \tau_c.\end{gathered} \tag{11}$$

Соотношения (9)—(11) справедливы для квантовомеханической системы, находящейся в неравновесном и, вообще говоря, нестационарном состоянии.

Ранее соотношения регрессии для флуктуаций в данной постановке задачи и в наиболее общей форме, но в марковском варианте, исследовались Лэксом [10]. Уравнения (9)—(11) в отличие от точных, найденных в [10], являются хотя и приближенными, но учитывающими конечность времен корреляции в реальных физических системах. При $\tau_c \to 0$ выражения (9)—(11) переходят в соответствующие, найденные в [10], и поэтому являются их обобщением на случай конечных τ_c.

Соотношения (5) и (9)—(11) позволяют получить замкнутое уравнение для одномоментных средних в двухмоментном приближении. Действительно, используя (9)—(11) для вычисления корреляций в правой части (5) $(v=0)$, находим

$$\begin{gathered}d\langle a(t)\rangle_2/dt = i\hbar^{-1}\langle [H_s(t), a(t)]_-\rangle - i\hbar^{-1}\sum_\alpha \langle y_\alpha(t)\rangle f_\alpha(t) + \\ + 0{,}5\hbar^{-2}\sum_{\alpha,\beta}\int_0^t dt_1 (\langle [Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_+\rangle \langle U(t-t_1, 0) \times \\ \times [\langle y_\alpha(t, t-t_1)\rangle_1, x_\beta]_-\rangle + \langle [Q_\alpha^{(0)}(t_1), Q_\beta]_-\rangle \times \\ \times \langle U(t-t_1, 0)[\langle y_\alpha(t, t-t_1)\rangle_1, x_\beta]_+\rangle).\end{gathered} \tag{12}$$

В правую часть (12) вошли только одномоментные средние. Отметим, что уравнение (12) является существенно немарковским.

Остановимся подробнее на пределах применимости приближенных соотношений регрессии (9)—(11). Рассмотрим для определенности уравнение (9). Для времен $0 \leqslant \tau \lesssim \tau_c$ в точном выражении $\langle a(t) b(t+\tau)\rangle$ и правой части (9) можно заменить приближенно $b(\tau)$, $b(t+\tau, t) \to b^{(0)}(\tau)$, тогда найдем

$$\langle a(t) b(t+\tau)\rangle \cong \langle U(t, 0) a b^{(0)}(\tau)\rangle \cong \langle a(t) b(t+\tau)\rangle_2.$$

Поэтому и при $0 \leqslant \tau \lesssim \tau_c$ (если не интересоваться тонкими деталями) приближенное выражение (9) приводит к вполне разумному результату. Отсюда следует, что ограничение $\tau_c \ll |\tau|$ не является очень существенным.

Гораздо более принципиальным является ограничение на $|\tau|$ (а также на t в уравнении (7)) сверху. Оно связано с тем, что корреляторы $\langle Q_\alpha^{(0)}(t)\, Q_\beta \rangle$ (как это показано на конкретном примере в разд. 3), вообще говоря, содержат медленно убывающие с ростом t «хвосты», поэтому наше предположение об остроте функций $\langle Q_\alpha^{(0)}(t)\, Q_\beta \rangle$ является на самом деле приближенным. Наличие «хвостов» приводит к отклонению от экспоненциального закона (который с необходимостью вытекает из (7) при $f_\alpha(t)=0$) на больших временах. Вместе с этим, как отмечалось в работе [11] на примере спонтанной релаксации двухуровневого атома, неэкспоненциальность распада начинает проявляться на временах, много больших времен релаксации (порядка 150 времен жизни атома), и возникающие при этом эффекты настолько малы, что вряд ли могут быть проверены экспериментально. Поэтому наше основное предположение является достаточно точным.

Для определенного класса задач общие критерии для времен t, на которых экспоненциальный закон справедлив, даны, в частности, в работах [11–13]. Ниже аналогичный критерий нами будет рассмотрен на примере немарковской релаксации квантового гармонического осциллятора.

Заметим, что приближенное немарковское уравнение (12), игнорируя «хвосты», связанные с корреляциями типа $\langle y_\alpha(t) x_\beta(t-t_1, t) \rangle$, однако, учитывает «хвосты», порождаемые явно входящими в уравнение $\langle Q_\alpha^{(0)}(t)\, Q_\beta \rangle$ и $\langle Q_\alpha\, Q_\beta^{(0)}(t) \rangle$, и поэтому дает более правильную, чем уравнение (7), картину (частично учитывающую эффекты немарковости) поведения $\langle a(t) \rangle$ на больших временах.

Во всяком случае (12) всегда можно уточнить, используя следующее трехмоментное приближение.

В заключение этой части отметим, что здесь мы акцентировали внимание на использовании соотношений регрессии с целью получения приближенных немарковских уравнений, однако они могут быть использованы и непосредственно для расчета корреляционных функций физических величин.

3. НЕМАРКОВСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В качестве иллюстрации к применению приближенного немарковского уравнения (12) рассмотрим релаксацию одномерного квантового гармонического осциллятора, взаимодействующего с набором большого количества осцилляторов другой природы (термостат). Гамильтониан данной задачи выберем в виде

$$H = \hbar\omega_0 a^+ a + \hbar \sum_\alpha (\lambda_\alpha a^+ b_\alpha + \lambda_\alpha^* a b_\alpha^+) + \hbar \sum_\alpha \omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha, \qquad (13)$$

где a^+, a и b_α^+, b_α — операторы рождения и уничтожения соответственно для осцилляторов системы и термостата, а λ_α — набор комплексных констант взаимодействия. Будем полагать, что в начальный момент времени $t_0=0$ термостат находился при температуре $T=0$ (вакуумное состояние).

Рассматриваемая здесь модель физической системы интересна прежде всего тем, что для нее удается найти точное решение, сравнивая которое с приближенным, можно оценить степень точности уравнения (12).

В гамильтониане (13) роль гауссовых термостатных переменных выполняют Q и Q^+, где $Q=\sum_\alpha \hbar\lambda_\alpha b_\alpha$. Для получения точного решения для среднего значения $\langle a(t) \rangle$ используем уравнение (5) (полагая в нем $v=0$, $f_\alpha(t)=0$). После выполнения простых операций коммутирования находим

$$d\langle a(t)\rangle/dt = -i\omega_0\langle a(t)\rangle - \int\limits_0^t d\tau\varphi(\tau)\langle a(t-\tau)\rangle,$$
$$\varphi(\tau) = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \exp(-i\omega_\alpha\tau). \tag{14}$$

Решая (14) методом односторонних преобразований Лапласа, находим

$$\langle a(t)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2\pi}\left[\frac{\exp(ixt)}{i(x+\omega_0)+\varepsilon+\varphi(ix+\varepsilon)} - (\varepsilon\to-\varepsilon)\right]. \tag{15}$$

Используя далее формулу $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(ix\pm\varepsilon)^{-1} = -iPx^{-1}\pm\pi\delta(x)$, для $\varphi(ix\pm\varepsilon)$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(ix\pm\varepsilon) = -i\Delta(x)\pm\Gamma(x), \tag{16}$$

где

$$\Delta(x) = \int\limits_0^\infty d\omega\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2 P/(x+\omega),$$
$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty d\omega\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2\pi\delta(x+\omega), \tag{17}$$

а $\rho(\omega)$ — число осцилляторов термостата в единичном интервале вблизи ω. Относительно величины $\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2$ предположим, что она линейно зависит от ω (что соответствует реальной физической ситуации). Представляя $\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2$ в следующей форме: $\pi\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2 = \alpha\omega = \omega(\tau_0\omega_0)^{-1}$, для $\Gamma(x)$ из (17) находим

$$\Gamma(x) = -\alpha\eta(-x)x. \tag{18}$$

Из дальнейшего будет ясно, что величина τ_0 имеет смысл времени релаксации квантового осциллятора (естественно поэтому, что $\alpha>0$). Представляя $\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2$ в следующей форме: $\pi\rho(\omega)|\lambda(\omega)|^2 =$ достаточно слабым, запишем соответствующее условие малости в виде

$$(\tau_0\omega_0)^{-1} = \alpha \ll 1. \tag{19}$$

При подстановке выражения (16) в (15) будем пренебрегать слагаемым $\Delta(x)$, связанным с частотным сдвигом. Вместе с тем член $\Gamma(x)$ необходимо принципиально учитывать, поскольку он, исключая сингулярность под интегралом (15), сильно влияет на величину $\langle a(t)\rangle$ [11]. После преобразований для $\langle a(t)\rangle$ из (15) находим

$$\langle a(t)\rangle = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,\frac{\exp(ixt)}{i(x+\omega_0)-\alpha x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty dx\,\times$$
$$\times\exp(ixt)\left[\frac{1}{i(x+\omega_0)} - \frac{1}{i(x+\omega_0)-\alpha x}\right] - (\alpha\to-\alpha). \tag{20}$$

Вычисляя первый интеграл правой части (20) с помощью вычетов, а второй — интегрированием по частям, и используя условие (19), окончательно получаем

$$\langle a(t)\rangle \cong \left\{ \exp\left[-\left(i\omega_0 + \frac{1}{\tau_0}\right)t\right] - \frac{1}{\pi\tau_0\omega_0^3 t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right\} a. \quad (21)$$

Первый член (21) (так называемый «полюсный» вклад [13]) дает хорошо известную экспоненциальную часть решения. Второй член (21) («пороговый» вклад) представляет собой ряд по степеням $1/t$, начиная со второй. Это разложение справедливо на временах $t \gg \omega_0^{-1}$ *.

Из выражения (21) следует, что, начиная с времен $t \gg t_п$, где $t_п$ удовлетворяет условию

$$2\pi (t_п \tau_0^{-1})^2 \exp(-t_п \tau_0^{-1}) = (\tau_0\omega_0)^{-3}, \quad (22)$$

доминирующим становится «пороговый» вклад. Для типично атомных величин $\tau_0 \approx 10^{-8}$ *с*, $\omega_0 \approx 10^{15}$ *Гц* пороговое значение времени получается равным $t_п \approx 60\tau_0 \gg \tau_0$.

Представляет интерес вычислить также среднее число элементарных возбуждений осциллятора (квантов) $\langle n(t)\rangle = \langle a^+(t)a(t)\rangle$. Поскольку в данном случае $\langle n(t)\rangle = \langle a^+(t)\rangle\langle a(t)\rangle$, используя (21), для $\langle n(t)\rangle$ находим:

$$\langle n(t)\rangle = \left[\exp(-2t\tau_0^{-1}) - \exp(-t\tau_0^{-1})\left(\frac{2\cos\omega_0 t}{\pi\tau_0\omega_0^3 t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) + \frac{1}{\pi^2\tau_0^2\omega_0^6 t^4} + O\left(\frac{1}{t^5}\right)\right]. \quad (23)$$

Следует отметить, что в сравнении с (21) в выражении (23), во-первых, появились перекрестные члены типа $\exp(-t\tau_0^{-1})/t^k$, $k = 2, 3, \ldots$, во-вторых, в асимптотическом пределе при $t \to \infty$ среднее число квантов спадает как $1/t^4$.

Отметим, что вычисление $\langle a(t)\rangle$ и $\langle n(t)\rangle$ в одномоментном приближении дает лишь «полюсные» вклады.

Рассмотрим теперь приближения для $\langle a(t)\rangle$ и $\langle n(t)\rangle$ следующие из уравнения (12). Непосредственным вычислением нетрудно показать, что приближенное уравнение (12) приводит для $\langle a(t)\rangle$ к совершенно точному результату (14), и, следовательно, в этом случае (12) справедливо для любых времен $t \geqslant 0$.

Для среднего числа квантов $\langle n(t)\rangle$ из (12) можно найти следующее приближенное выражение:

$$\langle n(t)\rangle_2 = \left[\exp(-2t\tau_0^{-1}) - \exp(-t\tau_0^{-1})\left(\frac{2\cos\omega_0 t}{\pi\tau_0\omega_0^3 t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)\right]. \quad (24)$$

Сравнение (24) с выражением (23) показывает, что немарковское уравнение (12) правильно учитывает первый перекрестный член. Однако, как это и следовало ожидать, дает неверное асимптотическое поведение $\langle n(t)\rangle$ при $t \to \infty$. Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае уравнение (12) справедливо на временах $t \ll 60\,\tau_0$ и заведомо правильно описывает решение для времен $t \lesssim \tau_0$.

Покажем теперь, что коррелятор термостатных переменных $\varphi(\tau)$ содержит медленно убывающий с ростом τ «хвост». Из формул (14) и (16) следует, что

$$\varphi(\tau) = \lim_{K\to\infty} \alpha \int_0^K (d\omega/\pi)\exp(-i\omega\tau)\omega =$$

* Это условие легко получить, выписав следующий член разложения.

$$= i\alpha\delta'(\tau) + \alpha\pi^{-1}\lim_{K\to\infty}(K\sin K\tau/\tau) - \alpha\pi^{-1}\lim_{K\to\infty}((1-\cos K\tau)/\tau^2).$$

Последний член полученного выражения является медленно убывающей (как $1/\tau^2$) функцией.

Результаты данного раздела показывают, что широко распространенная модель взаимодействия квантового гармонического осциллятора с термостатом (в частности, в квантовой электронике [14]), описываемая гамильтонианом (13), неизбежно приводит к немарковским эффектам, даваемым соотношениями (21) и (23). Следует, однако, иметь в виду, что гамильтониан (13) не всегда адекватно описывает реальные физические осцилляторы, связанные с механизмами потерь, и поэтому количественные эффекты немарковости могут быть иными, чем в выбранной нами простейшей модели.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Г. Н. Бочкову, Г. Ф. Ефремову, А. А. Дубкову за критические советы и пожелания, высказанные в процессе обсуждения статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файн В. М., Ханин Я. И. Квантовая радиофизика.— М.: Сов. радио, 1965, с. 60.
2. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977, с. 48.
3. Ефремов Г. Ф., Смирнов А. Ю.— ЖЭТФ, 1981, с. 1071.
4. Дягилев С. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 8, с. 970.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. II.— М.: Наука, 1978, с. 42.
6. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1978.
7. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1980.
8. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975, с. 29.
9. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М.: Наука, 1980, с. 29.
10. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления.— М.: Мир, 1974.
11. Wodkiewicz K., Eberly J. H.— Ann. Phys., 1976, 101, p. 574.
12. Халфин Л. А.— ЖЭТФ, 1957, 33, с. 1471.
13. Mostowski J., Wodkiewicz K.— Bull. Acad. Polon. Sci., 1973, 21, p. 1027.
14. Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике.— М.: Наука, 1972, с. 342.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 20 июля 1981 г., в окончательном варианте 26 июля 1982 г.

A KINETIC EQUATION FOR CORRELATION FUNCTIONS OF THE QUANTUM SYSTEM INTERACTING WITH GAUSSIAN THERMOSTAT

S. A. Dyagilev

An accurate kinetic equation has been found for correlators of the quantum system interacting with the Gaussian thermostat. In the case of the energy smallness of the interaction between the system and the thermostat, one-dimensional and two-dimensional approximations have been built and relations of the regression for fluctuations have been obtained. Expressions obtained are illustrated by an example of nonmarkov relaxation of the quantum harmonic oscillator.