

УДК 535 361

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЗКИХ ПУЧКОВ СВЕТА В ДОЖДЕ

А. Г. Рогачевский

В рамках марковского приближения рассматривается интенсивность узкого пучка света в дожде. Исследована зависимость интенсивности от оптической толщи и параметра, являющегося количественным критерием узкости пучка. Получены оценки границ применимости приближения однократного рассеяния и закона Бугера. Показана возможность эффективной фокусировки интенсивности в дожде.

Перенос излучения в осадках изучался до сих пор, в основном, экспериментально [1]. Капли дождя относятся к крупным рассеивателям: $ka \gg 1$, $ka(n-1) \gg 1$, где k — волновое число, a — размер капель, $n \approx 1,33$ — показатель преломления воды. При этих условиях и при рассеянии на каждой капле в ее зону Фраунгофера амплитуда рассеяния на отдельной капле имеет вид $F = F_d + F_g$, где F_d и F_g — дифракционная и геометрооптическая компоненты [2]. Так как $|F_g| \ll |F_d|$, то в теоретических работах обычно используется дифракционное приближение $F \approx F_d$ [3-9]. В дифракционном приближении индикатриса рассеяния сильно вытянута вперед. Для этого случая (и при остронаправленном падающем пучке) в [3, 4] было найдено решение уравнения переноса излучения (УПИ). В [5] была предложена запись поля, рассеянного системой частиц, что позволило вычислить среднюю интенсивность другим методом. В [6] для вычисления средней интенсивности использовалась модификация метода работы [5]. Однако полученные в [5, 6] выражения не переходят в закон Бугера в случае узких пучков (область справедливости закона Бугера уточняется ниже).

В работе [9] для дисперсных сред развит марковский подход, при котором условие рассеяния в зону Фраунгофера не накладывается. В нашем случае, т. е. при $ka \gg 1$, $ka(n-1) \gg 1$, использование марковского приближения означает пренебрежение геометрооптически рассеянным полем [9]. Последнее эквивалентно замене частиц на поглощающие (той же формы). Мы будем исходить из полученного в [9] уравнения для функции когерентности. Соответствующая этому уравнению средняя интенсивность будет исследована в случае узких пучков, когда марковское приближение оказывается эквивалентным дифракционному. При этом рассматривается, в основном, случай среды из одинаковых сферических частиц, качественно описывающий распространение пучков как в дожде, так и в других дисперсных средах. Это упрощение позволяет выяснить физический смысл параметров, определяющих интенсивность, а также рассмотреть границы применимости закона Бугера и проблему фокусировки интенсивности. В отличие от [3, 4] наше рассмотрение не ограничивается геометрооптической зоной передающей апертуры.

1. Запишем среднюю интенсивность, считая рассеиватели сферическими.

Согласно [9] функция когерентности удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Gamma(\rho, \rho_+, z)}{\partial z} - \frac{i}{k} \nabla_\rho \nabla_{\rho_+} \Gamma + c_{1,1}^{-1}(\rho) \Gamma = 0,$$

где $\rho = \rho' - \rho''$, $\rho_+ = (\rho' + \rho'')/2$, $(\rho', z) = (x', y', z)$ и $(\rho'', z) = (x'', y'', z)$ — точки наблюдения в плоскости $z = \text{const}$, c — концентрация рассеивателей, $\bar{s}_{1,1}(\rho)$ — средняя площадь объединения двух кругов, сдвинутых на ρ относительно друг друга: $\bar{s}_{1,1}(\rho) = \iint P(a)P(a')s_{1,1}(\rho)dada'$, $P(a)$ — плотность распределения рассеивателей по радиусам a . Решение этого уравнения известно [10]. Запишем среднюю интенсивность $I(\rho_+, z) = \Gamma(0, \rho_+, z)$ в случае сфокусированного гауссова пучка, т. е. при начальном условии на поле u : $u(\rho, z)|_{z=0} = \exp(-\rho^2/2A^2 - ik\rho^2/2F)$, где ρ теперь — расстояние от оси пучка: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, A — эффективный начальный радиус пучка, $z = F$ — фокальная плоскость. Аналогично [10] имеем

$$I(\rho, L) = I^{(0)} e^{-\tau} (g^2/2A^2) \int_0^\infty d\rho' \rho' J_0(k\rho\rho'/L) \exp[-(\rho'^2 g^2/4A^2 + \tau\chi(\rho'))], \quad (1)$$

где L — длина трассы, $\tau = 2cs\bar{L}$, $\bar{s} = \pi\bar{a}^2$, $g^2 = 1 + k^2 A^4 (L^{-1} - F^{-1})^2$, $I^{(0)} = (kA^2/L)^2 g^{-2}$ — интенсивность падающего пучка $I^{(0)}(\rho, L)$ при $\rho = 0$, $J_0(x)$ — функция Бесселя, $\chi(\rho) = (2\bar{s})^{-1} \int_0^1 \bar{s}_\pi(\rho\xi) d\xi$, $\bar{s}_\pi(\rho)$ — средняя площадь пересечения двух кругов, сдвинутых на ρ . В случае реального дождя даже при самых простых распределениях по размерам капель [11] выражение (1) слишком громоздко для аналитического исследования.

2. Проанализируем выражение для $I(\rho, L)$ в модельном случае капель одного радиуса a . Полученные результаты будут качественно справедливы для реального дождя со средним радиусом капель $\bar{a} = a$. Переходя в (1) к переменной интегрирования $t = \rho'/2a$, получаем

$$I(\rho, L) = 2qI^{(0)} e^{-\tau} \int_0^\infty t J_0(2kapt/L) \exp[-qt^2 + \tau\varphi(t)] dt, \quad (2)$$

где $q = (a/A)^2 g^2$ и

$$\varphi(t) = \begin{cases} \pi^{-1} \left\{ \arccost - t^{-1} \left[(1 - t^2)^{1/2} - \frac{1}{3} (1 - t^2)^{3/2} - \frac{2}{3} \right] \right\}, & t \leq 1 \\ \gamma t^{-1}, & t > 1; \quad \gamma = 2/3\pi \end{cases}. \quad (3)$$

Отметим, что если в решение УПИ, найденное в [3], подставить индикатрису рассеяния в дифракционном приближении $G(\theta) = 4J_1^2(ka\theta)/\theta^2$ (θ — угол рассеяния, $J_1(x)$ — функция Бесселя), то получим выражения (1), (2).

Интенсивность на оси пучка $I(L) \equiv I(0, L)$ определяется параметрами τ , q , $I^{(0)}$, значения которых зависят от «геометрии» падающего пучка. В работах [3, 4] рассматривался случай геометрической зоны передающей апертуры ($kA^2 \gg L$), пучок считался коллимированным ($F = \infty$) или расходящимся ($F < 0$). Мы рассмотрим $I(L)$ при всех значениях τ , q , $I^{(0)}$, обращая внимание на «дополнительные» к [3, 4] случаи. Так, при распространении пучков в дождях обычно выполняется условие $a \ll A$. Поэтому интересным является случай $q \ll 1$, что выполняется, в частности, при $kA^2 \leq L$ (френелева или фраунгоферова зона передающей апертуры). Найдем асимптотику интенсивности вблизи оси пучка при $q \ll 1$.

Пусть $\tau = 2csL \ll 1$. Согласно (2), (3) имеем $I(\rho, L) = 2qI^{(0)} \exp(-\tau)[v(\rho, L) + w(\rho, L)]$, где

$$v(\rho, L) = \int_0^1 t J_0(2k\rho t/L) \exp[-qt^2 + \tau\varphi(t)] dt; \quad (4)$$

$$w(\rho, L) = \int_1^\infty t J_0(2k\rho t/L) \exp[-qt^2 + \tau\gamma t^{-1}] dt. \quad (5)$$

В пределах падающего пучка, т. е. при $I^{(0)}(\rho, L) = I^{(0)} \exp[-(kA/gL)^2 \times \rho^2] \sim I^{(0)}$, получаем $v = \int_0^1 t \exp(-qt^2) dt + O(q; \tau) \approx 1/2$. Раскладывая $\exp(\tau\gamma t^{-1})$ по степеням $\tau\gamma t^{-1} < \tau$, находим w . В результате в пределах падающего пучка

$$I(\rho, L) = (1 - \tau)I^{(0)}(\rho, L) + (2/3\sqrt{\pi})q^{1/2}\tau I^{(0)} \exp(-B\rho^2) \times \\ \times I_0(B\rho^2) + O(\tau^2 q^{1/2}; q^2; \tau q), \quad (6)$$

где $B = (kA/gL)^2/2$, $I_0(x)$ — функция Бесселя комплексного аргумента.

Найдем интенсивность на оси пучка при $\tau \gg 1$. Интегрируя по частям, получаем $v(0, L) = \int_0^1 t \exp[\tau\varphi(t)] dt + O(q) = \pi^2 \tau^{-2} \exp(\tau/2) -$

$-(\gamma\tau)^{-1} \exp(\gamma\tau) + O(q; \tau^{-3})$. Найдем $w(0, L) = \int_1^\infty f(t) dt$, $f(t) = t \times$

$\times \exp[-qt^2 + \gamma\tau t^{-1}]$. Пусть $q^{-1/2} \gg \gamma\tau \sim \tau$, тогда прямая $t + \beta = \lim_{t \rightarrow \infty} t \exp(\beta t^{-1})$, $\beta = \gamma\tau$ пересечет кривую $f(t)$ в точке $t_0 = \beta^{1/2} (2q)^{-1/4} + o(t_0)$. Разложим $f(t)$ при $t \leq t_0$ по степеням $qt^2 \ll 1$. Вычисляя интегралы по $(1, t_0)$, (t_0, ∞) , получаем

$$w(0, L) \approx (2q)^{-1} + \sqrt{\pi} \gamma \tau q^{-1/2}/2 + (\gamma\tau)^{-1} \exp(\gamma\tau).$$

Таким образом, при $\tau \gg 1$ имеем

$$I(L) \approx I^{(0)} \exp(-\tau) [1 + (2/3\sqrt{\pi})q^{1/2}\tau + 2\pi^2 q\tau^{-2} \exp(\tau/2)]. \quad (7)$$

3. Для интерпретации формул (2), (6), (7) рассмотрим распространение пучков качественно. Обычно физическая картина излагается в терминах УПИ [1, 3, 4]. В связи с некорректными результатами работ [5, 6] изложим этот вопрос подробнее, в свете теории рассеяния волн. В приближении однократного рассеяния [7, 12], т. е. при $\tau \ll 1$, интенсивность равна (скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение)

$$I(\mathbf{R}) = |u_0|^2 + 2 \operatorname{Re}(u_0 \langle u_s^* \rangle) + \langle |u_s|^2 \rangle, \quad (8)$$

где u_0 и u_s — падающее и рассеянное поля в точке \mathbf{R} в случае одной частицы. Аналогично [12] нетрудно получить, что при остронаправленном пучке $\langle u_s \rangle = -\tau u_0/2$. Таким образом, интенсивность состоит из когерентной I_c и некогерентной I_s компонент: $I = I_c + I_s$, $I_c = (1 - \tau)I^{(0)}(\mathbf{R})$, $I^{(0)}(\mathbf{R}) = |u_0(\mathbf{R})|^2$. При условии $q \ll 1$ имеем $I_s \ll \tau I^{(0)}$. Действительно, при $q \ll 1$ выполняется условие $ka^2 \ll L$, т. е. частица рассеивает в свою зону Фраунгофера и компонента I_s образует пучок сечением $\rho_a \sim (L/ka)$. Пусть $ka^2 \gg L$, тогда $q \sim (kaA/L)^2 \ll 1$ и, следовательно, $\rho_a \gg A$. Таким образом, некогерентная компонента интенсивности почти вся уходит из пучка, и мы имеем закон Бугера: $I \approx I_c = (1 - \tau)I^{(0)}$. При $ka^2 \ll L$ имеем $q \approx (a/A)^2 \ll 1$, т. е. резко отличаются углы дифракции на частице и на апертуре: $\theta_a \sim (ka)^{-1} \gg \theta_A \sim (kA)^{-1}$. В результате I_s снова теряется пучком и $I \approx I_c$.

Пучки, для которых $q \ll 1$, т. е. для которых при малой кратности рассеяния выполняется закон Бугера, будем называть узкими. Равенство $I(\mathbf{R}) \approx \exp(-\tau)I^{(0)}(\mathbf{R})$ при $q \ll 1$ нетрудно получить из (2). Более точные выражения для I, I_s даются формулами (6), (7). Таким образом, для узких пучков параметр τ является оптической толщиной. Выражения для $I(L)$, полученные в [5, 6], в случае узких пучков закон Бугера не дают.

Аналогичные качественные рассуждения показывают, что в случае «широких» пучков ($q \sim 1$) закон Бугера не выполняется. При $q \gg 1$ «некогерентный пучок» I_s остается в пределах падающего пучка и ослабление происходит только за счет геометрооптического рассеяния. Как указывалось, пренебрежение геометрооптически рассеянным полем эквивалентно переходу к среде из поглощающих шариков. Поэтому для плоской падающей волны, т. е. при $A \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty$, из (2) следует закон Бугера для такой поглощающей среды: $I(\mathbf{R}) = I^{(0)}(\mathbf{R})\exp(-\tau/2)$. Аналогичный вид имеет полная мощность P излучения, проходящего через плоскость наблюдения $z = L$. Согласно (2) имеем

$$P(L) = \int I(\rho, L) d^2\rho = \exp(-\tau/2)P(0),$$

где $P(0) = \pi A^2$ — мощность, проходящая через плоскость $z = 0$. Отметим, что в [6], несмотря на использование дифракционного приближения, получены неверные соотношения $P(L) = P(0), I(\mathbf{R}) = 1$, не учитывающие указанных потерь энергии пучком.

В дополнение к формулам (6), (7) приведем выражение для интенсивности на оси пучка, найденное в [3] для широких пучков ($q \gg 1$) при $q \gg \tau, kA^2 \gg L$:

$$I(L) = I^{(0)} \exp(-\tau/2) (1 + 4\tau/q)^{-1}.$$

Оценка роли параметра q подтверждается расчетом по формуле (2). На рис 1 сплошные линии изображают зависимость

$$f(\tau) = I(L)/[I^{(0)} \exp(-\tau)] = 1 + f_s(q, \tau),$$

где $f_s = I_s/[I^{(0)} \exp(-\tau)]$ — вклад в $f(\tau)$ некогерентного рассеяния. Закону Бугера соответствует прямая $f(\tau) = 1$. Кривые 1—5 получены при $q = 4;$

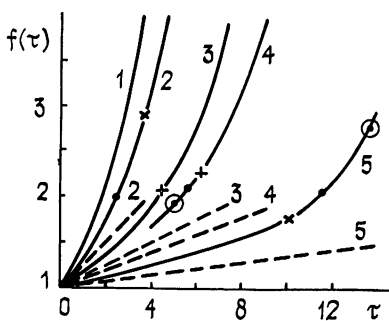


Рис. 1.

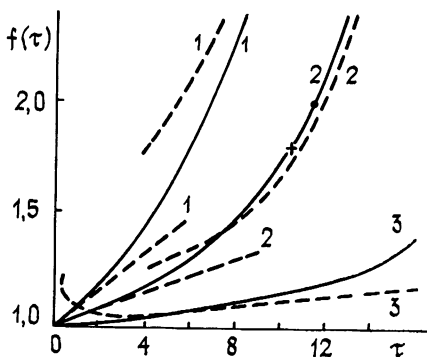


Рис. 2.

1; 0,2; 0,1; 10^{-2} соответственно. При $\tau \ll 1$ согласно (2) $I(L) = I^{(0)}(1 - \tau) \times [1 + \alpha(q)\tau]$, т. е. закон Бугера в области $\tau \ll 1$ нарушается при $\alpha(q) \sim 1$. Согласно рис. 1 это происходит при $q \gtrsim 1$.

4. Рассмотрим ряд практически важных оценок в случае узких пучков ($q < 1$).

Экспериментальные исследования переноса излучения обычно интерпретируются в рамках приближения однократного некогерентного рассеяния [1]. В этом приближении, согласно (2),

$$f(\tau) = 1 + f_{s1}(q, \tau), \quad f_{s1}(q, \tau) = 2q\tau \int_0^{\infty} t \exp(-qt^2) \varphi(t) dt.$$

Соответствующие прямые проведены пунктиром на рис. 1. В качестве границы применимости приближения однократного (в терминах УПИ) рассеяния примем значения $\tau = \tau_1$, при которых сравниваются вклады однократного и многократного рассеяний: $f_{s1}(q, \tau_1) = f_s(q, \tau_1) - f_{s1}(q, \tau_1)$. Значениям τ_1 соответствуют крестики на кривых. Согласно рис. 1 при $q \sim 1$ имеем $\tau_1 \sim 1$. При $q \ll 1$, когда $\tau_1 \gg 1$, с помощью (7) получаем оценку

$$\exp(\tau_1/2) \sim \tau_1^3 / 3\pi^{5/2} q^{1/2}. \quad (9)$$

При $q \gg 10^{-2}$ уравнение (9) не разрешимо, но правильно дает порядок τ_1 .

Оценим границу $\tau = \tau_B$ области применимости закона Бугера. При $q < 1$, согласно рис. 1, имеем $\tau_B \gg 1$, поэтому τ_B можно определить условием $I_s(\tau_B) = I_c(\tau_B)$, т. е. $f_s(q, \tau_B) = 1$. Значениям τ_B соответствуют точки на кривых. При $q \sim 1$ имеем $\tau_B \leq \tau_1$, т. е. закон Бугера нарушается уже в области однократного рассеяния. При $q \ll 1$ имеем $\tau_B > \tau_1$, т. е. закон Бугера нарушается вследствие перекачки энергии с периферии пучка в его середину за счет многократного рассеяния [4]. При этом I_s определяется третьим слагаемым в (7), что дает оценку τ_B :

$$\exp(\tau_B/2) \sim \tau_B^2 / 2\pi^2 q. \quad (10)$$

Этим τ_B соответствуют точки на кривых, обведенные кружками.

Как отмечалось, на практике часто реализуется условие $q \ll 1$. Поэтому полезно оценить границы применимости формул (6), (7). На рис. 2 сплошные линии изображают зависимость $f(\tau) = I(L)/[I^{(0)} \times \exp(-\tau)]$, соответствующую формуле (2). Пунктиром проведены прямые, соответствующие (6), и кривые, соответствующие (7). Цифры 1, 2, 3 у кривых соответствуют $q = 0,05; 10^{-2}; 10^{-3}$. Видно, что при $q \leq 0,01$ в области $\tau \gg \tau_1$ интенсивность хорошо аппроксимируется формулой (7), а в области $\tau \ll \tau_1$ — формулой (6).

Рассмотрим возможность фокусировки интенсивности в дожде с заданными параметрами $\bar{a} = a$, τ (отметим, что оптическая толщина определяется интенсивностью дождя J [13]: $\tau = 0,21 L J^{0,74}$, где L выражено в км, J — в мм/ч). Эффективность фокусировки характеризуется зависимостью $Q(A) = I(F)/\pi A^2$ [14]. Так как для дождя $a \leq 10^{-3}$ м [11], то при передающей апертуре $A \gg 10^{-1}$ м имеем $q = (a/A)^2 \leq 10^{-4}$. Тогда согласно (6), (7) получаем

$$Q(A) = (k^2/\pi F^2) \exp(-\tau) [A^2 + p(a, \tau) A + C(a, \tau)],$$

где $p(a, \tau) = 2a\tau/3\sqrt{\pi}$, $C(a, \tau) = 2\pi^2 a^2 \exp(\tau/2)/\tau^2$ при $\tau \gg \tau_1$ и $C(a, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \ll \tau_1$. При $q \leq 10^{-4}$ оценка (9) дает $\tau_1 \geq 19$. Следовательно, для значений $\tau \leq 19$ (т. е. практически всегда) основной вклад в $Q(A)$ дают первые два члена. Таким образом, в отличие от случая турбулентной атмосферы, где $Q(A)$ испытывает насыщение [14], в дождях возможна эффективная фокусировка интенсивности.

Приведем следующие из (6), (7) оценки поперечного размера коллимированного пучка. Интенсивность $I(\rho, L) = \exp(-\tau) I^{(0)}(\rho, L) + I_s(\rho, L)$ имеет по ρ двухмасштабный характер, при этом масштаб когерентной части пучка $\rho_c \sim gL/kA$ и масштаб I_s — порядка $\rho_s \gg L/ka$,

следовательно, $\rho_c/\rho_s \leq q^{1/2} < 1$. Эффективную площадь крупномасштабной части пучка I_s определим как $S_{\text{эфф}} = P_s/I_s(L)$, где $P_s = \int I_s(\rho, L) d^2\rho = \int (I - I_c) d^2\rho = \pi A^2 [\exp(-\tau/2) - \exp(-\tau)]$. В области однократного рассеяния $S_{\text{эфф}}$ находим с помощью (6). При этом, если $kA^2 \gg L$, то $S_{\text{эфф}}$ определяется углом дифракции на каплях и радиусом падающего пучка: $S_{\text{эфф}} = (L/ka)AF(\tau)$, где $F(\tau) = 3\pi^{3/2} [\exp(-\tau/2) - \exp(-\tau)]/2\tau$. Если $kA^2 \leq L$, $S_{\text{эфф}}$ определяется дифракцией на каплях и на передающей апертуре: $S_{\text{эфф}}(L/ka)(L/ka)F(\tau)$. В области $\tau > \tau_b > \tau_1$, где преобладает многократное рассеяние, наступает глубинный режим, когда $S_{\text{эфф}}$ не зависит от передающей апертуры: $S_{\text{эфф}} = (L/ka)^2 \tau^2/2\pi$.

Мы рассмотрели физическую картину распространения узких пучков, ограничившись модельным случаем монодисперсного «дождя». Оценки аналогичных характеристик пучка в реальном дожде можно получить численно с помощью формулы (1), задавая распределение капель по размерам.

Автор благодарен А. Г. Боровому за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуев В. Е., Кабанов М. В. Перенос оптических сигналов в земной атмосфере.— М.: Сов. радио, 1977.
2. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами.— М.: ИЛ, 1961.
3. Долин Л. С.— Изв. вузов — Радиофизика, 1964, 7, № 2, с. 380.
4. Долин Л. С.— Изв. вузов — Радиофизика, 1966, 9, № 1, с. 61.
5. Калашников Н. П., Рязанов М. И.— ЖЭТФ, 1966, 50, вып. 2, с. 459.
6. Миронов В. Л., Тузова С. И.— Опт. и спектр., 1980, 49, вып. 4, с. 782.
7. Wang Ting-i, Clifford S. F.— J. Opt. Soc. Am., 1975, 65, № 8, p. 927.
8. Voronov A. G., Kabanov M. V., Saveliev V. A.— Appl. Opt., 1975, 14, № 11, p. 2731.
9. Боровой А. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 4, с. 391.
10. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II.— М.: Наука, 1978
11. Литвинов И. В. Структура атмосферных осадков.— Л.: Гидрометеониздат, 1974
12. Рогачевский А. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 12, с. 1447.
13. Полякова Е. А.— Труды Главной геофизической обсерватории, 1960, вып. 100, с. 45.
14. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1976

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
4 июня 1981 г.,
после доработки
26 июля 1982 г.

PROPAGATION OF NARROW LIGHT BEAMS IN RAIN

A. G. Rogachevskij

The intensity of a narrow light beam in rain is considered in the frames of Markov approximation. The intensity dependence on the optical depth and the parameter being the quantitative criterion of the beam narrowness is studied. Estimations have been obtained for the applicability boundaries of the approximation of a single scattering and the Buger's law. A possibility is shown of the effective focusing of the intensity in rain.