

УДК 621.372.81.09

**МЕТОД МНОГОКРАТНО ОТРАЖЕННЫХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ  
О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
В РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВОДАХ**

(Обзор)

*Г. И. Макаров, Л. А. Федорова***СОДЕРЖАНИЕ****Введение**

1. Строгие представления поля
  2. Приближенные представления поля
  3. Анализ модельных задач
- Приложение (исторический обзор)

**ВВЕДЕНИЕ**

Задача об электромагнитном поле заданных источников в волноводном канале Земля—ионосфера исследуется начиная с 1919 года [1]. Помимо большого числа оригинальных статей, ей посвящено несколько монографий [2—7] и обзоров [8—12] (см. также [13—15]). Рассмотрение широкого круга вопросов, так или иначе связанных с этой задачей, обычно основано на двух альтернативных подходах. Первый из них связан с методом нормальных волн (разложением поля по спектральным функциям поперечного оператора данной краевой задачи) [3—11, 13—16], второй — с методом многократно отраженных волн, или скачков [2, 8—10, 13—23]. Согласно последнему поле в точке приема складывается из так называемой земной волны и бесконечной суммы волн, или скачков, последовательно отражающихся от стенок волновода. При этом считается, что оба метода, в принципе, являются строгими и в этом смысле эквивалентными, а нестрогость дифракционно-лучевого представления поля (асимптотики разложения по многократно отраженным волнам) ассоциируется только со способом вычисления соответствующих интегралов [10, 17, 20—23]. Тем не менее метод многократно отраженных волн в отличие от метода нормальных волн не удовлетворяет обычным требованиям математической строгости. Существует, в частности, несколько неэквивалентных одна другой математических формулировок метода многократно отраженных волн и отсутствует математическое определение термина «многократно отраженная волна». Кроме того, построение решения любым из вариантов этого метода, как правило, основано на целом ряде как будто бы очевидных, но не доказанных утверждений. Вследствие этого упущен факт неполноты разложения поля по скачкам — в действительности точное решение краевой задачи наряду с разложением по скачкам содержит и разложение по волнам иного типа, механизм распространения которых связан, к примеру, с областями, ограничивающими волновод. Исключение составляет случай плоского волновода с идеально проводящими стенками, когда разложение поля по лучам (или скачкам) при любом положении точки наблюдения эквивалентно разложению по нормальным волнам, и оба представления поля связаны преобразованием Фурье, что и предопределяет полноту

лучевого разложения (Пекерис [24]). Этот случай — один из немногих, когда понятие «многократно отраженная волна» не нуждается в определении, совпадая с понятием обычного луча геометрической оптики.

В данной статье рассматриваются различные аспекты метода скачков, касающиеся в основном теории распространения длинных и сверхдлинных волн в изотропном регуляризованном волноводном канале Земля — ионосфера. Статья состоит из трех частей и Приложения. В первой части детально анализируются точные представления поля: в виде суммы контурных интегралов, в виде модифицированного (двойного бесконечного) ряда зональных гармоник и в виде разложения по плоским волнам. Отмечается, что эти представления поля в действительности не имеют приписываемую им интерпретацию в виде разложения по скачкам. Попутно здесь развивается строгий подход к проблеме представления поля в волноводе в виде ряда многократно отраженных волн и уточняются некоторые свойства дифракционных лучей в волноводе. Во второй части настоящей работы обсуждаются приближенные представления поля, связанные с методом путевых интегралов, с геометрооптическим приближением многократно отраженных волн и, наконец, с их квазигеометрооптическим приближением, включающим дифракционные поправки Уэйта. В третьей части на примере двух модельных задач иллюстрируется применение строгого подхода к проблеме представления поля в волноводе в виде ряда многократно отраженных волн. Наконец, в Приложении дан обзор работ, посвященных развитию и некоторым применениям метода скачков. Здесь же приведены отдельные примеры из акустики, квазиоптики, математической физики, а также из теории распространения коротких радиоволн вокруг Земли.

## 1. СТРОГИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ

Одной из модельных задач в теории распространения длинных и сверхдлинных волн в волноводном канале Земля — ионосфера является задача о поле вертикального электрического диполя в трехслойной изотропной среде со сферическими границами раздела. На примере этой задачи проиллюстрируем взаимосвязь различных представлений поля и, в частности, разложений по нормальным и многократно отраженным волнам и проанализируем различные математические формулировки метода многократно отраженных волн.

В сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$ , начало которой совпадает с центром сфер, полярная ось — с осью диполя, уравнения граничных поверхностей волновода запишем в виде  $r=a$  и  $r=b$ . Слой  $a \leq r \leq b$  пусть представляет собой вакуум. Будем считать, что свойства областей  $r < a$  и  $r > b$  не являются функциями углов  $\theta$  и  $\phi$  (волноводный канал  $a \leq r \leq b$  регулярен), но могут произвольным образом меняться вдоль радиуса  $r$  (поле диполя в такой среде обладает аксиальной симметрией). На поверхностях раздела  $r=a$  и  $r=b$  подразумеваются выполненные либо приближенные граничные условия импедансного типа, когда приведенные поверхности импедансы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  областей  $r \leq a$  и  $r \geq b$  являются некоторыми (удовлетворяющими условию физической осуществимости  $\operatorname{Re} \delta_{1,2} \geq 0$  [15]) постоянными, либо (вытекающие из требования непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля) строгие условия, когда величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$  зависят от спектрального параметра задачи [15]. Зависимость от времени всюду подразумевается в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Сформулированная выше задача, математически представляющая собой двумерную краевую задачу в частных производных с разделяющимися переменными, может быть записана в виде [15, 16]

$$(L_r + L_\theta) Z(r, \theta) = F(r, \theta), \quad (1)$$

где  $L$ , и  $L_\theta$  — определяемые уравнениями Максвелла и граничными условиями линейные дифференциальные операторы второго порядка по координатам  $r$  и  $\theta$  с коэффициентами, зависящими соответственно от  $r$  и  $\theta$  (зависимость от электрических и магнитных свойств областей  $r \leq a$  и  $r \geq b$  входит только в  $L_r$ ),  $Z(r, \theta)$  — искомая функция, определяющая электромагнитное поле,  $F(r, \theta)$  — заданная функция источника.

Строгое решение краевой задачи (1) можно построить в виде разложения по спектральным функциям или поперечного  $L_r$  (метод нормальных волн), или продольного  $L_\theta$  операторов [15, 16]. Хорошо известно преобразование Ватсона, связывающее оба типа разложений [1, 2, 14–16]. В тех случаях, когда спектральная задача для  $L$ , сложна (скажем, когда спектральный параметр входит в граничные условия [25]), преобразование Ватсона используют при получении разложения по нормальным волнам из альтернативного спектрального представления, порожденного угловым оператором  $L_\theta$  (ряда Дебая) [14–16].

Выпишем ряд Дебая для вертикальной компоненты электрического поля  $\tilde{E}_r$ , считая, что обе корреспондирующие точки расположены в слое  $a \leq r \leq b$  [14, 15]:

$$\tilde{E}_r = 2i \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) f(n) [1 - R_1(n) R_2(n)]^{-1}. \quad (2)$$

Здесь  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра, или собственная функция  $L_\theta$ ,

$$f(n) = P_0(8\pi\epsilon_0 kr^2 r'^2)^{-1} n(n+1/2)(n+1) [\xi_n^{(2)}(kr_<) + \\ + R_1(n) \xi_n^{(1)}(kr_<)] [\xi_n^{(1)}(kr_>) + R_2(n) \xi_n^{(2)}(kr_>)],$$

$P_0$  — дипольный момент источника,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $k$  — волновое число в вакууме,  $\xi_n^{(1), (2)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{n+1/2}^{(1), (2)}(x)$ , а  $H_{n+1/2}^{(1), (2)}$  — функции Ханкеля первого и второго рода,  $r_< = \min(r, r')$ , а  $r_> = \max(r, r')$ , причем подразумевается, что координаты источника —  $(r', 0)$ , точки наблюдения —  $(r, \theta)$ . В свою очередь

$$R_1(n) = [\xi_n^{(2)}(ka)/\xi_n^{(1)}(ka)] \tilde{R}_1(n),$$

$$R_2(n) = [\xi_n^{(1)}(kb)/\xi_n^{(2)}(kb)] \tilde{R}_2(n),$$

тогда как

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(n) &= - \frac{\ln' \xi_n^{(2)}(ka) + i\delta_1(n)}{\ln' \xi_n^{(1)}(ka) + i\delta_1(n)}, \\ \tilde{R}_2(n) &= - \frac{\ln' \xi_n^{(1)}(kb) - i\delta_2(n)}{\ln' \xi_n^{(2)}(kb) - i\delta_2(n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Наконец, штрих всюду означает дифференцирование по аргументу.

Входящие в (2) функции  $\xi_n^{(1), (2)}(kr) P_n(\cos \theta)$  (представляющие собой линейно независимые решения однородного уравнения (1)) принято вслед за Бреммером [2] называть зональными гармониками, а величины  $\tilde{R}_1(n)$  и  $\tilde{R}_2(n)$  — коэффициентами отражения зональных гармоник соответственно от поверхности  $r=a$  и  $r=b$ , или сферическими коэффициентами отражения.

Заменим сумму по  $n$  в (2) контурным интегралом [1, 2, 15]:

$$\tilde{E}_r = \int_C \frac{P_{v-1/2}(\cos(\pi - \theta))}{\cos v\pi} \frac{f(v) dv}{1 - R_1(v) R_2(v)}, \quad (4)$$

где  $C$  — петля вокруг положительной полусоси комплексной плоскости спектрального параметра  $v$  (см. рис. 1),  $P_{v-1/2}(\cos(\pi-\theta))$  — функция Иржандра, а выражения для  $f(v)$ ,  $R_1(v)$  и т. п. получаются соответственно из выражений для  $f(n)$ ,  $R_1(n)$ , ... посредственной заменой дискретного значка  $n$  на непрерывный  $v = 1/2$ . Интегрирование по петле  $C$  в (4) эквивалентно интегрированию по контурам  $\Gamma$  и  $C'$ , один из которых  $\Gamma$  целиком расположен в верхней полу-плоскости  $v$ , другой  $C'$  — симметричен относительно начала координат плоскости  $v$  (см. рис. 1). Контур  $\Gamma$ , как и  $C$ , разделяет полюсы резольвент по-перечного  $L_r$  и продольного  $L_\theta$  операторов [15, 16], т. е. нули  $1 - R_1 R_2 \cos v\pi$ .

Предположим, что спектр  $L_r$  — чисто точечный\*. В отсутствие непрерывного спектра  $L_r$  контур  $C$  в (4) можно заменить на  $\Gamma$ , поскольку соответствующий интеграл по контуру  $C'$  тождественно равен нулю.

На контуре  $\Gamma$  (но не на  $C$ ) можно исключить из  $E_r$  антиподные, или кругосветные, волны, воспользовавшись стандартным приемом [26, 27]. Действительно, расщепим угловую функцию

$$\frac{P_{v-1/2}(\cos(\pi-\theta))}{\cos v\pi} = \frac{2}{\pi} Q_{v-1/2}^-(\cos \theta) - \frac{ie^{iv\pi} P_{v-1/2}(\cos \theta)}{\cos v\pi}. \quad (5)$$

Функция  $Q_{v-1/2}^-(\cos \theta)$  регулярна в правой полуплоскости  $v$  [26]. При больших  $|v \sin \theta|$  и  $|\arg v| < \pi$  ее асимптотика имеет вид [27]

$$Q_{v-1/2}^-(\cos \theta) = \left( \frac{\pi}{2v \sin \theta} \right)^{1/2} \exp\left(i\theta + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (6)$$

При тех же условиях в полуплоскости  $\text{Im } v > 0$  асимптотика второго слагаемого правой части (5) пропорциональна бесконечной сумме  $\exp[i\theta(2\pi q \pm \theta \mp \pi/4)]$ , где  $q = 1, 2, \dots$ . Поэтому разбиение угловой функции в (4) согласно (5) соответствует расщеплению решения на две части, одна из которых, именно

$$E_r = \frac{2}{\pi} \int_{\Gamma} Q_{v-1/2}^-(\cos \theta) \frac{f(v) dv}{1 - R_1(v) R_2(v)}, \quad (7)$$

допускает интерпретацию в виде волн, прошедших кратчайшее угловое расстояние между корреспондентами, равное  $\theta$ , другая — отвечает антиподным волнам, прошедшим угловой путь  $2\pi q \pm \theta$ , больший  $\pi$  (в этом можно убедиться с помощью теоремы о вычетах, см. ниже).

Рассмотрим два альтернативных способа вычисления интеграла (7). Первый из них, связанный с методом нормальных волн, состоит в представлении этого интеграла по вычетам в полюсах его подынтегрального выражения или нулях  $1 - R_1(v) R_2(v)$ . Как известно [14–16], эти нули являются собственными значениями  $L_r$ , а разложение по вычетам есть не что иное, как разложение по собственным функциям  $L_r$ , или ряд нормальных волн. В случае вырождения собственных значений  $L_r$  ряд нормальных волн пополняется рядом присоединенных волн [16]. Случай непрерывного спектра  $L_r$  требует специального рассмотрения — отчасти

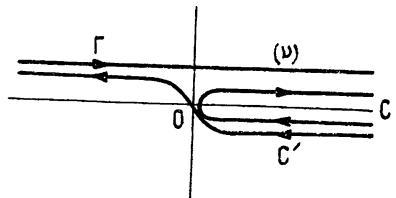


Рис. 1.

\* Формальным признаком отсутствия непрерывного спектра  $L_r$  является четность  $\delta_1$  и, следовательно, подынтегрального выражения (4) относительно  $v$ . Это имеет место, если ядро сферы  $r \ll r_0 < a$  — металлизовано, т. е. обладает бесконечной проводимостью [15].

в связи с невозможностью столь же просто отделить прямую от круго-световых волн. Напомним, что в задачах со сферической геометрией непрерывный спектр  $L_r$ , всегда заполняет мнимую ось  $v$  [27], тогда как асимптотическое выражение второго слагаемого правой части (5) терпит разрыв на вещественной оси  $v$ . К тому же в задачах со сферической геометрией непрерывному спектру  $L_r$ , при принятом нами (рис. 1) методе построения контуров сопутствуют неспектральные особенности резольвенты  $L_r$  — нули  $1 - R_1(v)R_2(v)$  в левой полуплоскости  $v$ , не являющиеся собственными значениями  $L_r$  [27].

Что касается второго способа вычисления (7), связанного с методом многократно отраженных волн, то он, как уже отмечалось нами во Введении, отнюдь не удовлетворяет обычным требованиям математической строгости. Положим для простоты  $r=r'=a$ , после чего перейдем от представления (7) к эквивалентному ему представлению:

$$E_r = E_r^{(0)} + \int_{\Gamma} Q_{v-1/2}^-(\cos \theta) \frac{g(v)}{1 - R_1(v)R_2(v)} dv, \quad (8)$$

где

$$g(v) = P_0 (4\pi^2 \epsilon_0 k a^4)^{-1} v (v^2 - 1/4) [\xi_{v-1/2}^{(2)}(ka) + R_1(v) \xi_{v-1/2}^{(1)}(ka)]^2,$$

а выражение для  $E_r^{(0)}$  получается из (7) повсеместной формальной заменой  $R_2$  нулем.

Первое слагаемое, выделенное в (8),  $E_r^{(0)}$  отвечает так называемой земной волне, характерной для открытой сферы  $r=a$ , второе — неявно содержит многократно отраженные волны.

Формально ряд многократно отраженных волн получают из (8), разлагая знаменатель подынтегрального выражения (8) в бесконечную геометрическую прогрессию

$$(1 - R_1 R_2)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (R_1 R_2)^m, \quad (9)$$

меняя порядок интегрирования и суммирования и, возможно, деформируя путь интегрирования, причем способ вычисления полученных интегралов не предрешается. В результате оказывается, что (Бреммер [2, 9], Уэйт [17] и др. [18, 20–23])

$$E_r = E_r^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} I_m, \quad (10)$$

где

$$I_m = \int_{C_m} Q_{v-1/2}^-(\cos \theta) R_1^{m-1}(v) R_2^m(v) g(v) dv, \quad (11)$$

а  $C_m$  — некоторый контур на комплексной плоскости  $v$ , как правило, не зависящий от  $m$  и, например, совпадающий с  $\Gamma$  (см. рис. 1) или составленный из двух полупрямых.

Интеграл  $I_m$  (11) называют многократно отраженной волной, не фиксируя четко его пути интегрирования  $C_m$ . При этом считается [9, 10, 13, 17], что интерпретация  $I_m$  в виде волны, претерпевшей  $m-1$  отражений от стенки  $r=a$  и  $m$  — от стенки  $r=b$ , предопределена видом подынтегрального выражения  $I_m$ , явно содержащего соответствующие

степени сферических коэффициентов отражения  $\tilde{R}_1$  и  $\tilde{R}_2$ . В пользу последнего утверждения, казалось бы, говорит тот факт, что результат формального вычисления интеграла  $I_m$  методом седловой точки действительно имеет указанную выше интерпретацию.

Кроме того, принято считать, что разложение (10) является строгим и в этом смысле эквивалентным разложению по нормальным волнам

нам, а нестрогость дифракционно-лучевого представления поля или высокочастотной асимптотики (10) связывают только со способом вычисления  $I_m$  (11), см., например, [17, 20–23].

В связи со сказанным возникает ряд взаимосвязанных вопросов, касающихся и математического определения термина «многократно отраженная волна», и схемы выделения разложения поля по многократно отраженным волнам из точного решения задачи — правомерности разложения в бесконечную геометрическую прогрессию (9), возможности ее почлененного интегрирования, правомерности произвольной деформации контуров интегрирования  $C_m$  в интегралах  $I_m$  в представлении (10) и т. п.

Начнем с проблемы определения термина «многократно отраженная волна». Спрашивается, корректно ли называть многократно отраженной волной интеграл  $I_m$  (11), не указывая его пути интегрирования  $C_m$ ? Ведь подынтегральное выражение  $I_m$  имеет особенности — полюсы на комплексной плоскости  $v$ . Так, в задачах со сферической (цилиндрической) геометрией в каждом квадранте плоскости  $v$  имеется счетное множество полюсов  $R_1(v)$  или  $R_2(v)$  даже при идеальной проводимости стенок волновода — последние локализованы на линиях нулей  $\xi_{v-1/2}^{(1)}(ka)$  и  $\xi_{v-1/2}^{(2)}(kb)$ . В свою очередь учет конечной проводимости областей  $r \leq a$  и  $r \geq b$  приводит не только к смещению указанных выше полюсов на комплексной плоскости  $v$ , но и к появлению новых, вообще говоря, бесконечных серий полюсов. Из сказанного ясно, что интеграл  $I_m$ , несомненно, зависит от пути и выбор контура интегрирования  $I_m$  предопределяет его физическую интерпретацию.

Представляется целесообразным фиксировать контур интегрирования  $C_m$  в интеграле  $I_m$  (11) так, чтобы его высокочастотная асимптотика допускала априори заданную интерпретацию в виде луча геометрической оптики или в виде (своегообразного семейства) дифракционных лучей в зависимости от положения наблюдателя по отношению к линии оптического горизонта  $m$ -го луча  $\theta = 2m \arccos(a/b)$ .

Прежде чем конкретизировать это определение, напомним, как связаны между собой строгое и асимптотическое представление  $I_m$ . Попутно уточним некоторые понятия, касающиеся описания многократно отраженной волны в области геометрической тени.

В области света  $\theta < 2m \arccos(a/b)$  высокочастотная асимптотика  $I_m$  получается, как известно, методом перевала (Бреммер [2, 9, 13], Уэйт [10, 17], Джолер [18] и др. [14–16, 20–22]). Для его применения воспользуемся асимптотическими выражениями Дебая [28] цилиндрических функций, входящих в (11), и асимптотикой угловой функции (6). Совместим, далее, путь интегрирования  $C_m$  в  $I_m$  с контуром спуска  $\Gamma_m$ , проходящим через седловую точку

$$v_m = ka \sin \varphi_m = kb \sin \psi_m = kab \sin(\theta/2m) D_m^{-1} \quad (12)$$

фазовой функции подынтегрального выражения  $I_m$ , считая, что

$$\theta < 2m \arccos(a/b), \cos \varphi_m > O((ka)^{-1/3}),$$

$$\sin \varphi_m > O((ka \sin \theta)^{-1}), \quad (13)$$

а  $D_m = [a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta/2m)]^{1/2}$ . Вычисление  $I_m$  в седловой точке  $v_m$  (в условиях применимости простейшей схемы метода перевала) дает [8, 15]

$$I_m = \frac{k^2 P_0}{4\pi \epsilon_0} \frac{\exp(ik2mD_m)}{2mD_m} g_m \tilde{R}_1^{m-1}(\varphi_m) \times \\ \times \tilde{R}_2^m(\psi_m) [1 + \tilde{R}_1(\varphi_m)]^2 \sin^2 \varphi_m. \quad (14)$$

Это выражение допускает интерпретацию в виде обычного луча геометрической оптики, последовательно отражающегося от стенок волновода. Значок  $m$  здесь (но не в (11)) фиксирует число отражений от стенки  $r=b$ , величина  $2mkD_m$  имеет смысл оптической длины пути  $m$ -го луча,  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  — углы падения  $m$ -го луча соответственно на стенки  $r=a$  и  $r=b$ , далее,

$$g_m = \left( \frac{\cos \psi_m}{\cos \varphi_m} \right)^{1/2} \left( \frac{2m \sin (\theta/2m)}{\sin \theta} \right)^{1/2} \quad (15)$$

— множитель сходимости (всегда  $g_m > 1$ ), наконец, величины

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1(\varphi_m) &= (\cos \varphi_m - \delta_1) (\cos \varphi_m + \delta_1)^{-1}, \\ \tilde{R}_2(\psi_m) &= (\cos \psi_m - \delta_2) (\cos \psi_m + \delta_2)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

имеют смысл коэффициентов отражения локально плоской волны от локально плоских стенок волновода, или коэффициентов отражения Френеля. Математически  $\tilde{R}_1(\varphi_m)$  и  $\tilde{R}_2(\psi_m)$  представляют собой значения асимптотически упрощенных величин  $\tilde{R}_1(v)$  и  $\tilde{R}_2(v)$  (3) в седловой точке  $v_m$  (12), определяющей траекторию  $m$ -го луча.

Заметим, что, выбирая в качестве линейно независимых решений соответствующего уравнения не  $\xi_n^{(1)}(kr)$  и  $\xi_n^{(2)}(kr)$ , как это сделано в настоящей работе, а, скажем,  $\xi_n^{(1)}(kr)$  и  $\psi_n(kr) = (1/2)(\xi_n^{(1)}(kr) + \xi_n^{(2)}(kr))$  [18, 19, 29], нельзя добиться совпадения асимптотик  $\tilde{R}_1(\varphi_m)$  и  $\tilde{R}_2(\psi_m)$  с коэффициентами отражения Френеля (15), а асимптотика  $I_m$  — с геометрооптическим приближением многократно отраженной волны (его легко построить эвристически [30–33]). Тем самым снимается поставленный Уэйтром вопрос о неоднозначном выборе сферических коэффициентов отражения, а значит, и вопрос о гибридных волнах [29].

В свою очередь, интерпретация  $I_m$  в области тени основана на его вычислении по вычетам в кратных полюсах  $v=v^{(s)}$  функции  $R_1(v)$ , локализованных в окрестности линии нулей  $\xi_{s-1/2}^{(1)}(ka)$  в 1-м квадранте  $v$  (Уэйт [17], Макаров, Федорова [34]). Совместим путь интегрирования  $C_m$  в  $I_m$  с петлей  $\Gamma_0$  вокруг указанных выше полюсов  $R_1(v)$ . Предположим, для простоты, что обе стенки волновода — идеально проводящие ( $\delta_1=\delta_2=0$ ). Тогда, в частности, полюсы  $R_1(v)$  совпадут с нулями  $\xi_{s-1/2}^{(1)}(ka)$ . Заменим функции аргумента  $ka$ , входящие в (11), асимптотическими выражениями Фока [26], а функции аргумента  $kb$  — асимптотическими выражениями Дебая [28] и воспользуемся асимптотикой угловой функции (6). Вычисляя, далее,  $I_m$  по вычетам в  $(m+1)$ -кратных полюсах  $v=v^{(s)}$  и упрощая полученное выражение, будем иметь [34]

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{k^3 P_0 \exp [i(3/2-m)(\pi/2)]}{2m! \varepsilon_0 \sqrt{\pi \sin \theta}} \left( \frac{ka}{2} \right)^{-5/6} \times \\ &\times \sum_{s>1} \frac{[W_2'(\tau_s)]^{m-1}}{\tau_s^{m+1} W_1^{m+1}(\tau_s)} p_m^{(s)}(z_m) \exp (iy^{(s)} \theta_m + i2mk \sqrt{b^2 - a^2}). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $W_{1,2}(\tau)$  — функции Эйри,  $\tau_s$  — нуль уравнения  $W_1'(\tau)=0$ , а  $v^{(s)}=-ka+(ka/2)^{1/3}\tau_s$ , далее,  $p_m^{(s)}(z_m)$  — полином  $m$ -й степени относительно  $z_m=(ka/2)^{1/3}0_m$ , а  $\theta_m=\theta-2m \arccos(a/b)$  (величина  $z_m$  имеет смысл приведенного расстояния, отсчитываемого от линии оптического горизонта  $m$ -го луча).

Выражение (17) справедливо при условии

$$\sqrt{y} > m |\tau_s|^2, \quad (18)$$

где  $y = (ka/2)^{-1/3} kh$  — приведенная высота волновода,  $h = b - a$ .

В области тени  $\theta > 2m \arccos(a/b)$  выражение (17) допускает интерпретацию в виде своеобразной суммы дифракционных лучей типа луча Келлера над открытым цилиндром (или сферой) [35, 36]. Однако траектория дифракционного луча в волноводе не определяется однозначно, и каждому слагаемому в сумме по  $s$  в (17) отвечает бесчисленное множество синфазных лучей с фиксированным суммарным углом проскальзывания  $\theta_m$  вдоль выпуклой стенки волновода  $r=a$  и «плавающей» точкой срыва лучей по касательным к  $r=a$ . Поэтому поле дифракционных лучей в волноводе по сравнению с полем обычных геометрооптических лучей до некоторой степени утрачивает локальный характер (и, следовательно, отличается большей стабильностью, если речь идет о волноводном канале Земля—ионосфера). На рис. 2 условно изображены траектории семейства дифракционных лучей в волноводе при  $m=1$  (все возможные траектории заключены между траекториями  $ABCD$  и  $AC'B'D'$ ). Далее, механизм переноса энергии от источника к приемнику включает в себя не только высвечивание или ослабление амплитуды по келлеровскому закону  $\exp[-(ka/2)^{1/3} \operatorname{Im} \tau_s \theta_m]$  из-за срыва лучей по касательным к  $r=a$ , но и как бы обратный процесс, заключающийся в усилении амплитуды  $s$ -й волны в (17) за счет суммирования наблюдателем синфазных лучей (соскользнувших с  $AC'$  и отразившихся от  $BB'$  в случае  $m=1$ , см. рис. 2). Можно думать, что математически этот процесс контролируется предэкспоненциальными полиномами  $p_m^{(s)}(z_m)$ . В частности, при  $z_m \gg 1$  оказывается, что  $p_m^{(s)}(z_m) = (iz_m)^m$  и

$$|I_m| \sim z_m^m \exp(-\operatorname{Im} \tau_s z_m). \quad (19)$$

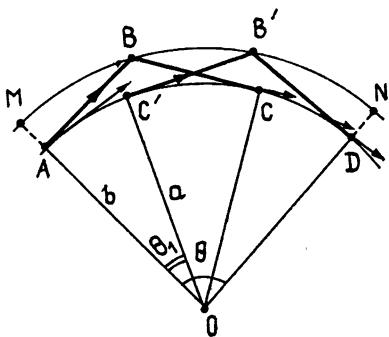


Рис. 2.

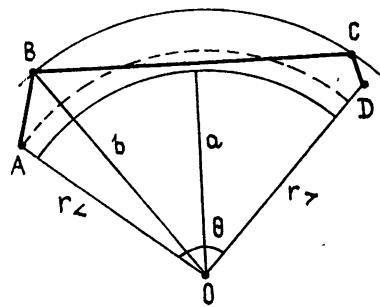


Рис. 3.

Эта формула описывает изменение амплитуды многократно отраженной волны с расстоянием в области глубокой тени. Помимо экспоненциального убывания, характерного для открытой сферы [17, 20], здесь имеется и рост амплитуды с расстоянием как полинома  $m$ -й степени, тогда как геометрооптическая расходимость отсутствует. Тем самым многократно отраженная волна в области тени в известном смысле подобна присоединенным волнам [16]. Нетрудно, наконец, объяснить тот факт, почему степень предэкспоненциального полинома в (19), т. е. мера возрастания амплитуды  $I_m$ , растет с ростом  $m$ -числа отражений от стенки  $r=b$ . Дело в том, что число участков длиной  $\theta_m$ , которые обладают тем свойством, что соскользнувшие с них дифракционные лучи возвращаются в точку наблюдения, тоже растет с ростом  $m$ .

Подчеркнем также следующие различия между понятиями дифракционного луча в случаях волновода и открытой сферы. В случае открытой сферы выражение поля в виде суммы дифракционных лучей связано со спектральным представлением решения — разложением по нормальным волнам, или собственным функциям поперечного оператора данной краевой задачи. Именно в области геометрической тени при выполнении условия, аналогичного (18), асимптотическое выражение з-нормальной волны ( $s$ -го члена известного ряда Фока [26]) интерпретируется в виде дифракционного луча Келлера [35, 36]. Источник нормальной волны — нить  $\theta=0$ , если источник поля — вертикальный электрический диполь [14]. В то же время траектория дифракционного луча указывает на тот факт, что его источник локализован в точке расположения заданного б-образного источника. Иными словами, в высокочастотном случае эффективно «светит» в области тени и создает дифракционные лучи только одна точка на бесконечной нити  $\theta=0$ , совпадающая с точкой расположения заданного источника поля. В случае же волновода понятие дифракционного луча связано не с разложением поля по нормальным волнам, а с разложением по многократно отраженным волнам. Последнее не носит спектральный характер и, в частности, не обладает полнотой. Поэтому вопрос об источнике многократно отраженной волны остается открытым. Тем не менее асимптотика (17) указывает на тот факт, что источник дифракционных лучей в волноводе локализован в точке расположения заданного источника — диполя. То же самое справедливо и для лучей геометрической оптики.

Вернемся к проблеме терминологии. В соответствии со сказанным выше ясно, что в освещенной области  $\theta < 2m \arccos(a/b)$  при выполнении условия (13) под многократно отраженной волной имеет смысл понимать интеграл  $I_m$  (11), в котором путь интегрирования  $C_m$  совмещен с надлежащим контуром спуска  $\Gamma_m$ . Тем самым мы разграничиваем два понятия — многократно отраженная волна в области света ( $C_m = \Gamma_m$  в (11)) и ее геометрооптическое приближение (14). Первое связано с точным описанием поля и определено нами почти для всей области света, второе — отвечает лучевому (приближенному) описанию поля и имеет смысл только в условиях применимости простейшей схемы метода перевала (когда полное асимптотическое разложение  $I_m$  в ряд по обратным степеням оптической длины пути  $m$ -го луча  $2mkD_m$  можно оборвать на младшем члене (14)).

В свою очередь в области геометрической тени  $\theta > 2m \arccos(a/b)$  под многократно отраженной волной имеет смысл понимать интеграл  $I_m$  (11), в котором путь интегрирования  $C_m$  совмещен с «дифракционным» контуром  $\Gamma_0$ , т. е. петлей вокруг полюсов  $R_1(v)$ , расположенных вблизи или на линии нулей  $\xi_{-1/2}^{(1)}(ka)$  в 1-м квадранте  $v$  (при учете конечной проводимости областей  $r \leq a$  и  $r \geq b$  эта серия полюсов отнюдь не исчерпывает всех полюсов подынтегрального выражения  $I_m$  в 1-м квадранте  $v$ ). Сохраним это определение и в том случае, когда  $\theta < 2m \arccos(a/b)$ , но второе неравенство в (13) не удовлетворено (наблюдатель находится в области полутени). В этом случае нет вещественных седловых точек (12), предыдущее определение, сформулированное нами для области света, утрачивает смысла, а попытка связать понятие «многократно отраженная волна» с комплексной седловой точкой, попадающей в область  $|v-ka| < O((ka)^{-1/3})$ , не приводит к успеху [34]. Наконец, требует специального рассмотрения случай  $m \rightarrow \infty$ , когда  $\varphi_m \rightarrow 0$  и не справедлива асимптотика (6) угловой функции в седловой точке (12) (эта трудность не свойственна задачам с цилиндрической геометрией).

Итак, совместим  $C_m$ -контуры интегрирования  $I_m$  в (10) с надлежащими контурами  $\Gamma_m$  или  $\Gamma_0$ , однозначно определяющими многократно отраженные волны в своих областях света или полутени и тени,

И в этом и только в этом случае будем называть представление поля (10) разложением по многократно отраженным волнам (скаккам).

Выясним, эквивалентно ли это разложение точному решению задачи (8), а тем самым — и разложению поля по нормальным волнам. С этой целью проанализируем схему выделения разложения поля по скачкам из представления (8). Заметим, что теперь помимо разложения в прогрессию (9) и ее почлененного интегрирования эта схема необходимо включает в себя последующую деформацию контура интегрирования в определенные выше контуры  $\Gamma_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ).

Ясно, что для оправдания разложения в бесконечную прогрессию (9) под знаком контурного интеграла (8) достаточно совместить контур интегрирования  $\Gamma$  в (8) с контуром  $\Gamma'$ , во всех (или почти во всех) точках которого выполнено неравенство (Берри [20], Джолер [18])

$$|R_1(v)R_2(v)| < 1. \quad (20)$$

Очевидные примеры нарушения (20) — каждая точка дискретного спектра  $L_r$ , когда  $R_1R_2=1$ , и каждый полюс  $R_1$  или  $R_2$ , когда  $R_1R_2=\infty$ , указывают на нетождественность преобразования (9) на комплексной плоскости  $v$  и, следовательно, на нетривиальность вопроса о сходимости рядов по степеням  $R_1R_2$  при любой постановке задачи — строгой или приближенной импедансной.

Стоит подчеркнуть, что условие (20) не позволяет поменять местами порядок интегрирования по  $\Gamma'$  и суммирования по  $m$ , или почленно проинтегрировать бесконечную прогрессию (9). Для оправдания этой процедуры достаточно, например, чтобы прогрессия (9) равномерно сходилась на контуре  $\Gamma'$  [37, 38], т. е. для всех  $v \in \Gamma'$  должно быть выполнено неравенство

$$|R_1(v)R_2(v)| \leq R < 1, \quad (21)$$

где  $R$  — некоторая, не зависящая от  $v$  постоянная. Однако требование равномерной сходимости прогрессии не выполняется в задачах со сферической или цилиндрической геометрией [34]. В отсутствие равномерной сходимости прогрессии возможность ее почлененного интегрирования в (8) гарантирует ограниченная сходимость ряда  $\sum_m g(v) R_1^{m-1} R_2^m$  (в соответствии с общей теоремой Лебега о сходимости [37]). Последняя, как легко показать, имеет место, если для всех  $v \in \Gamma'$  выполнено условие

$$|g(v)R_2(v)| < A |1 - R_1(v)R_2(v)|, \quad (22)$$

где  $A$  — некоторая не зависящая от  $v$  постоянная. Разумеется, это неравенство, как и предыдущее (21), не вытекает из (20).

Допустим, что найдется контур  $\Gamma'$ , удовлетворяющий сформулированным выше условиям (20) и (22) или более сильному условию (21) (эти условия могут, вообще говоря, не определять  $\Gamma'$  однозначно [34]). Предположим также, что контур интегрирования  $\Gamma$  в (8) эквивалентен  $\Gamma'$  в том смысле, что в области на комплексной плоскости  $v$ , заключенной между ними, нет особых точек подынтегрального выражения (8)\*. Деформируем  $\Gamma$  в (8) в  $\Gamma'$ . На контуре  $\Gamma'$  воспользуемся преобразованием (9) подынтегрального выражения (8) и поменяем порядок интегрирования и суммирования. В силу предполагаемой эквивалентности  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  в результате получим строгое представление поля (10), в котором под контурами интегрирования  $C_m$  подразумевается один и тот же контур  $\Gamma'$ . Однако в соответствии с принятым выше определением это разложение не является разложением поля по скачкам. С целью получения

\* Забегая вперед, отметим, что этот случай типичен для задач с плоской геометрией [39, 40]; в задачах со сферической или цилиндрической геометрией такая ситуация заведомо реализуется в отсутствие непрерывного спектра  $L_r$ .

последнего деформируем  $\Gamma'$  в определенные выше контуры спуска  $\Gamma_m$  ( $m=1, 2, \dots$ ) или «дифракционный» контур (в зависимости от положения наблюдателя по отношению к линии оптического горизонта  $m$ -го луча).

Уместен вопрос. эквивалентны ли контуры  $\Gamma'$  и  $\Gamma_m$  при всех  $m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ )? Навряд ли, поскольку контуры  $\Gamma'$  и  $\Gamma_m$  выбираются исходя из разных соображений (незквивалентность  $\Gamma'$  и  $\Gamma_m$  могут обусловить, в частности, полюсы  $R_1(v)$  и  $R_2(v)$ ). Поэтому деформация  $\Gamma'$  в  $\Gamma_m$ , как правило, будет сопровождаться пополнением разложения поля по скачкам разложением по волнам иного типа, математически связанным, например, с комплексными полюсами  $R_1$  или  $R_2$ .

Итак, или представление (10) — строгое ( $C_m = \Gamma'$  в  $I_m$ , а  $\Gamma'$  эквивалентен  $\Gamma$ ), но не имеет четкой интерпретации в виде суммы земной и многократно отраженных волн, или оно четко интерпретируется ( $C_m = \Gamma_m$  или  $C_m = \Gamma_0$  в  $I_m$ ), но не является строгим и нуждается в пополнении разложением по волнам иного типа, неявно содержащимся, к примеру, в особенностях подынтегрального выражения  $I_m$ , рассматриваемого как функция комплексной переменной интегрирования.

При ином выборе контура интегрирования  $C_m$  в  $I_m$  разложение (10) может оказаться либо лишенным смысла, либо неполным и не имеющим общепринятой интерпретации.

Отметим, что, начиная с основополагающей работы Бреммера [2], отдельные аспекты проблемы обоснования метода скачков так или иначе затрагивались в работах Уэйта [17, 10], Джолера [18], Берри [20]. Тем не менее исчерпывающего обсуждения этого вопроса, на наш взгляд, до сих пор не было. И самым слабым местом общепринятой теории, пожалуй, следует считать отсутствие определения термина «многократно отраженная волна».

Обсудим кратко вопрос об обобщении метода многократно отраженных волн на случай приподнятых корреспондентов. Случай, когда одна корреспондирующая точка находится на поверхности  $r=a$ , а другая — приподнята над нею, рассматривается аналогично исследованному выше случаю  $r=r'=a$ . Новые эффекты возникают, когда необходимо учесть ненулевые высоты обеих корреспондирующих точек. Тогда, в частности, вместо (10) будем иметь

$$E_r = E_r^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 I_m^{(i)}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} I_m^{(i)} &= P_0 (4\pi^2 \epsilon_0 k r^2 r'^2)^{-1} \int_{\Gamma} Q_{v-1/2}^{-} (\cos \theta) \times \\ &\times R_1^{m-1} (v) R_2^m (v) [\xi_{v-1/2}^{(2)} (kr_<) + R_1 (v) \xi_{v-1/2}^{(1)} (kr_<)] \times \\ &\times \xi_{v-1/2}^{(2)} (kr_>) v (v^2 - 1/4) dv, \end{aligned}$$

а выражение для  $I_m^{(2)}$  получается из выражения для  $I_m^{(1)}$  формальной заменой  $\xi_{v-1/2}^{(2)} (kr_>)$  произведением  $R_1 \xi_{v-1/2}^{(1)} (kr_>)$ . Под контуром интегрирования  $\Gamma$  в  $I_m^{(i)}$  подразумевается контур, представленный на рис. 1.

Заметим, что при больших  $|v|$  в силу экспоненциального роста слагаемых подынтегральных выражений интегралов  $I_m^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) последние не представимы в виде сумм двух интегралов.

Нетрудно убедиться в том, что высокочастотная асимптотика  $I_m^{(i)}$  в освещенных областях включает в себя не только формулы геометрической оптики для волн, попеременно отражающихся от стенок волноводов  $r=a$  и  $r=b$ , но содержит и геометрооптические формулы для

волн, которые огибают вогнутую стенку волновода  $r=b$ , последовательно отражаясь от нее, и не касаются выпуклой стенки  $r=a$ . Это связано с тем фактом, что каждое слагаемое подынтегрального выражения  $I_m^{(i)}$  ( $i=1, 2$ ) наряду со «старой» седловой точкой  $v(m, j)$  первого порядка, расположенной левее точки  $v=ka$  на вещественной оси комплексной плоскости  $v$ , именно

$$0 < v(m, j) < ka, \quad (24)$$

имеет и новые (одну или две) седловые точки  $\tilde{v}(m, j)$  первого или даже второго порядков, расположенные правее  $v=ka$  на вещественной оси  $v$ :

$$ka < \tilde{v}(m, j) < kr < \quad (25)$$

(это разбиение утрачивает смысл при  $m=1$  и  $j=1$ ). Здесь и далее индексы  $j=1$  и  $j=2$  относятся соответственно к первому и второму слагаемым подынтегрального выражения  $I_m^{(1)}$ , тогда как индексы  $j=3$  и  $j=4$  — к первому и второму слагаемым  $I_m^{(2)}$ .

Вычисление  $I_m^{(i)}$  в старых седловых точках  $v(m, j)$  (24) дает результат, аналогичный (14) [21]. Наличие четырех, вообще говоря, седловых точек  $v(m, j)$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) вместо одной  $v_m$  (12) обуславливает расщепление луча (14) с подъемом обеих корреспондирующих точек над поверхностью  $r=a$ . Этот эффект характерен и для плоского волновода. Вычисление же  $I_m^{(i)}$  в новых изолированных седловых точках первого порядка  $\tilde{v}(m, j)$  (25) приводит к геометрооптическим формулам для лучей-рикошетов  $N(m, j)$ , претерпевших  $m$  отражений от стенки  $r=b$  и не коснувшихся стенки  $r=a$ .

$$N(m, j) = \frac{k^2 P_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(ikr_m^{(j)})}{\sqrt{J_m^{(j)}}} \exp(-im^*\pi/2) \tilde{R}_2^m(\beta_m^{(j)}) g_m^{(j)}. \quad (26)$$

Здесь  $r_m^{(j)}$  — длина пути  $m^{(j)}$ -го луча,  $J_m^{(j)}$  — геометрическая расходимость поля лучей,  $\tilde{R}_2$  — коэффициент отражения Френеля,  $\beta_m^{(j)}$  — угол падения луча на стенку  $r=b$ , далее,  $g_m^{(j)}$  — геометрический множитель, а множитель  $\exp(-im^*\pi/2)$  учитывает изменение фазы  $m^{(j)}$ -го луча при прохождении им  $m^*$  каустик (явные выражения входящих в (26) величин мы не выписываем). На рис. 3 в качестве примера показана траектория  $m^{(j)}$ -го луча  $ABCD$  при  $m=2$  и  $j=1$ .

Лучи-рикошеты (26) связаны с явлением прилипания волн любой природы к вогнутым поверхностям, или явлением шепчущей галереи. Оно хорошо изучено в рамках метода нормальных волн (Краснушкин и др. [3, 4, 41, 42], Бреммер [2], Бадден и Мартин [43] и др. [5, 10, 18]) и совсем не рассмотрено в рамках метода многократно отраженных волн. Некоторые соображения о лучах-рикошетах можно найти в [3, 18].

Наконец, высокочастотная асимптотика  $I_m^{(i)}$  в областях геометрической тени по-прежнему основана на теореме о вычетах и допускает интерпретацию в виде дифракционных лучей Келлера.

Итак, учет подъема обеих корреспондирующих точек над поверхностью  $r=a$  влечет за собой усложнение дифракционно-лучевой структуры поля в волноводе в связи с появлением лучей-рикошетов. Вследствие этого точное решение задачи наряду с общепринятым разложением поля по многократно отраженным волнам, претерпевающим попеременные отражения от обеих стенок волновода  $r=a$  и  $r=b$ , неявно содержит в себе и разложение по многократно отраженным волнам нового типа, характеризующимся отражениями только от вогнутой стенки

волновода  $r=b$ . Для явного выделения и тех и других из представления (23) необходимо обобщить определение понятия «многократно отраженная волна» на случай  $r, r' > a$ , на чем мы останавливаться не будем.

За рамки данной работы выходит и обобщение на анизотропный случай. Напомним, что при учете магнитного поля переменные по  $r$  и  $\theta$  в уравнениях Максвелла не разделяются для сферически слоистых сред [8, 14, 15] и вместо задачи со сферическими границами раздела надлежит рассмотреть задачу с цилиндрическими или плоскими границами раздела. При этом вопрос о выборе контура  $\Gamma'$  предстоит решать заново, поскольку при учете магнитного поля коэффициенты отражения представляют собой матрицы.

Другая математическая формулировка метода многократно отраженных волн (Бреммер [2], Джолер [18, 19] и др. [22]):

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_r^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{I}_m, \quad (27)$$

где

$$\tilde{I}_m = i\pi \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) R_1^{m-1}(n) R_2^m(n) g(n), \quad (28)$$

порождена представлением решения данной краевой задачи в виде ряда зональных гармоник, или ряда Дебая (2). Как обычно, первое слагаемое, выделенное в (27),  $\tilde{E}_r^{(0)}$  соответствует земной волне, характерной для открытой сферы  $r=a$ . Каждому же члену  $\tilde{I}_m$  бесконечной суммы по  $m$  необоснованно сопоставляют [19, 22] волну, претерпевшую  $m$  отражений от слоя  $r \geq b$  (ионосфера).

Комментируя представление (27), прежде всего напомним тот известный факт, что в случае двойных бесконечных рядов различные способы их суммирования могут оказаться, вообще говоря, не равносильными [37, 38]. Выписанный выше двойной ряд следует понимать как повторный, когда сначала находится внутренняя сумма (по  $n$ ), а затем вычисляется сумма этих сумм (по  $m$ ). Наряду с (27) рассмотрим и альтернативный повторный ряд

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_r^{(0)} + i\pi \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) g(n) \sum_{m=1}^{\infty} R_1^{m-1}(n) R_2^m(n), \quad (29)$$

формально получающийся из ряда Дебая (2) после выделения из него слагаемого  $\tilde{E}_r^{(0)}$  и последующего разложения известного сомножителя в бесконечную прогрессию (9) по степеням  $R_1(n)R_2(n)$ . Из сказанного ясно, что сходимость повторного ряда (29) предопределена сходимостью его внутренних сумм. Именно, повторный ряд (29) сходится, если для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$  выполнено

$$|R_1(n)R_2(n)| < 1, \quad (30)$$

и расходится, если найдется  $n_0$ :  $|R_1(n_0)R_2(n_0)| \geq 1$ .

Коль скоро суммы по  $m$  в (29) играют роль коэффициентов при  $P_n(\cos \theta)$ , то это разложение в отличие от предыдущего (27) если не теряет смысла, то носит спектральный характер.

Основываясь, далее, на признаке сходимости Даламбера [38] и используя легко проверяемые соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_1(n)| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |R_2(n)| = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |g(n+1)/g(n)| = 0$$

(справедливые при любой постановке задачи — строгой или приближенной импедансной), а также оценку  $|P_n(\cos \theta)| \leq 1$ , можно показать, что сходящийся ряд (29) необходимо абсолютно сходится. Абсолютно сходящиеся ряды, как известно [37, 38], коммутативно сходятся, т. е. имеют одну и ту же сумму при любом порядке суммирования.

Из всего сказанного выше вытекает, что если условие (30) удовлетворено при всех  $n$ , то разложение (27) эквивалентно (29), а тем самым и исходному спектральному разложению (2).

Несомненно, представляет интерес выяснить, какие ограничения на приведенные поверхностные импедансы областей  $r \leq a$  и  $r \geq b$  диктует неравенство (30). Вещественность параметра  $n$  позволяет проделать такое исследование в общем виде. Именно, используя асимптотические выражения Дебая [28] функций  $\xi_n^{(1)}, (2)(x)$ , входящих в  $R_1$  и  $R_2$ , нетрудно показать, что (30) удовлетворено, если

$$\operatorname{Re} \delta_1(n) \geq 0, \quad \operatorname{Re} \delta_2(n) \geq 0, \quad \operatorname{Re} \delta_1(n) + \operatorname{Re} \delta_2(n) > 0. \quad (31)$$

Эти условия совпадают с известными условиями физической осуществимости сред с потерями [15] и являются не только достаточными, но и необходимыми условиями заведомо абсолютной сходимости рядов (27) и (29). В частности, если обе стенки волновода идеально проводят ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ), то последнее неравенство в (31) нарушается, и двойные ряды (27) и (29) расходятся.

Переходя к интерпретации двойных рядов (27) и (29), прежде всего отметим, что будучи точным решением задачи представление (27) помимо разложения поля по скачкам не может не содержать в себе и разложение по волнам иных типов. Действительно, перейдем от (27) к эквивалентному ему представлению, используя для  $\tilde{I}_m$  (28) выражение в виде контурного интеграла

$$\tilde{I}_m = (\pi/2) \int_C P_{v-1/2}(\cos(\pi - \theta)) (\cos v\pi)^{-1} R_1^{m-1}(v) R_2^m(v) g(v) dv$$

по петле  $C$  вокруг положительной полуоси  $v$  (см. рис. 1) [2, 18]. В результате получим представление поля типа исследованного выше (см. формулы (10), (11))\* . Поэтому высказанное выше утверждение о несоответствии строгого представления поля (10) его общепринятой интерпретации в виде земной и бесконечной суммы многократно отраженных волн дословно переносится и на (27).

В то же время легко проинтерпретировать повторный ряд (29) (при интерпретации удобнее иметь дело со случаем  $r > a$ , который ниже и подразумевается). Подобно (2) выражение (29) представляет собой разложение поля по бесконечной системе зональных гармоник  $\xi_n^{(1)}, (2)(kr) P_n(\cos \theta)$ , каждая из которых состоит из суммы двух волн, распространяющихся по  $\theta$  в противоположных направлениях (Макаров, Новиков [15]). Это непосредственно видно из асимптотики

$$P_n(\cos \theta) \sim \sum_{j=1}^2 \exp \{i(-1)^j[(n+1/2)\theta - \pi/4]\}.$$

Далее, тип волн, образующих зональную гармонику, различен при  $n \geq kr$  (что обусловлено различием асимптотики  $\xi_n^{(1)}, (2)(kr)$ ). Так, при  $n < kr$  эти (однородные) волны называются спиральными [15], поскольку уравнения их фазовых фронтов

\* В отсутствие непрерывного спектра  $L_r$  выражения для  $\tilde{E}_r^{(0)}$  и  $E_r^{(0)}$  и  $\tilde{I}_m$  и  $I_m$  отличаются только тем, что в первых из них неявно учтены кругосветные волны.

$$\int_{n+1/2}^{kr} [1 - (n+1/2)^2/\rho^2]^{1/2} d\rho \pm (n+1/2)\theta = \text{const}$$

представляют собой уравнения эвольвенты круга  $\rho=kr$ , или спирали. Углы падения спиральных волн  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  на стенки волновода  $r=a$  и  $r=b$  определяются, как это следует из последнего выражения, соотношениями

$$\sin \alpha_n = (n+1/2)/ka,$$

$$\sin \beta_n = (n+1/2)/kb.$$

На рис. 4 схематически изображены фазовые фронты спиральных волн, образующих зональную гармонику  $\xi_n^{(1)}(kr)P_n(\cos \theta)$ . Стрелками указано направление нормалей к фазовым фронтам.

Спиральные волны отражаются от стенок волновода по геометрооптическим законам, причем отражение сопровождается изменением типа спиральных волн (в соответствии с преобразованием при отражении одной из функций  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}(kr)$  в другую). Интересно также отметить, что при использовании асимптотических выражений Дебая [28] функций  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}(x)$ , входящих в коэффициенты отражения зональ-

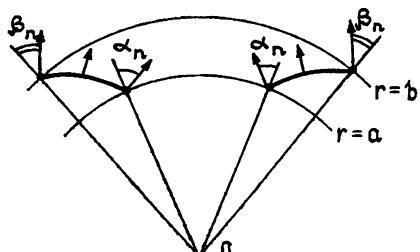


Рис. 4.

В свою очередь, при  $n > kr$  волны, составляющие зональную гармонику, являются неоднородными, их фазовые фронты описываются уравнениями  $\theta=\text{const}$  и перпендикулярны поверхностям  $r=a$  и  $r=b$ , поэтому  $\alpha_n = \beta_n = \pi/2$ . Амплитуды этих неоднородных волн экспоненциально растут с ростом  $r$ , и мы имеем дело с волнами, как бы «прилипшими» к вогнутой стенке волновода  $r=b$ .

Что же касается роли внутренних сумм по  $m$  в рядах вида (29), то они определяют (соответственно с модулем и аргументом  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}(kr) \times P_n(\cos \theta)$ ) амплитуды и фазы зональных гармоник (физический смысл отдельным членам двойных рядов (27), (29) придавать, по-видимому, не стоит).

Итак, разложение (27) не тождественно разложению поля «по лучам» [22] или скачкам [19]. Уместно назвать его модифицированным рядом зональных гармоник [19]. Модифицированные ряды зональных гармоник представляют самостоятельный интерес — их успешно использует Джолер при численных расчетах поля в сферическом волноводном канале Земля—ионосфера [19].

В заключение еще раз подчеркнем, что из двух рассмотренных выше представлений поля (10) и (27) второе — наиболее общее. Действительно, в отличие от (10) в (27), во-первых, допускается наличие непрерывного спектра  $L_r$ , тогда как учет непрерывного спектра  $L_r$  в (10) требует специального рассмотрения, нетривиального даже в случае открытой сферы [27], а, во-вторых, в (27) учтены кругосветные волны, что может иметь значение в диапазоне сверхнизких частот.

Мы подробно остановились на особенностях разложений по многочленам отраженным волнам в случае сферического волновода. Очевид-

но, что те же проблемы, что и затронутые выше, встретятся при рассмотрении плоских волноводов. В последнем случае иногда разложением поля по скачкам ошибочно называют [44, 45] разложение по плоским волнам вида [5, 46, 47]

$$E_z = E_z^{(0)} + iP_0 k^3 (8\pi^2 \epsilon_0)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2-i\infty} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' [1 + R_1(\theta')]^2 \times \\ \times R_1^{m-1}(\theta') R_2^m(\theta') \sin^3 \theta' \exp[ik\rho \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')], \quad (32)$$

где  $E_z$  — вертикальная компонента электрического поля,  $E_z^{(0)}$  — земная (прямая) волна,  $R_2(\theta') = R_2(\theta') \exp(ikh \cos \theta')$ , далее,  $R_1(\theta')$  и  $R_2(\theta')$  — коэффициенты отражения Френеля соответственно от стенок волновода  $z=0$  и  $z=h$ , а источник и приемник расположены при  $z=0$  (подразумевается, что введены цилиндрические координаты  $(\rho, \varphi, z)$ ; зависимость от  $\varphi$  — кажущаяся).

Подобно (27) представление (32) помимо разложения поля по скачкам неявно включает в себя разложение по волнам иных типов, математически связанных с возможными вещественными или комплексными полюсами и точками ветвления  $R_1(\theta')$  и  $R_2(\theta')$ . Случай плоского волновода с идеально проводящими стенками, когда  $R_1 = R_2 = 1$ , составляет очевидное исключение (этот случай — один из немногих, когда источник многократно отраженной волны — точное, а не асимптотическое понятие, что согласуется с картиной мнимых источников [5]).

Строгие представления поля, содержащие в явном виде разложения по многократно отраженным волнам, приведены в третьем разделе настоящей работы.

## 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛЯ

В рамках метода многократно отраженных волн естественно рассмотреть и некоторые заведомо приближенные представления поля, каждое из которых связано с тем или иным упрощением входящих в (10) интегралов.

Наиболее известно представление  $E_r$ , включающее обычные формулы геометрической оптики для многократно отраженных волн (14) (Бреммер [2], Уэйт и Марфи [30, 31], Джолер [18, 32, 33] и др. [21, 22, 46–49]). Его пишут эвристически [30–33, 49] или получают из (10), заменяя каждый интеграл  $I_m$  в (10) результатом его формального вычисления методом стационарной фазы, т. е. выражением (14)\* [21, 22, 46–48]. В результате получается асимптотическая форма ряда многократно отраженных волн, или лучевое представление  $E_r$ . При этом возможность его пополнения, о которой шла речь в предыдущем разделе настоящей работы, автоматически исключается.

Границы применимости лучевого представления  $E_r$  обычно определяют, исходя из границ применимости геометрооптического приближения многократно отраженных волн [22, 47]. К дополнительной ошибке может привести пренебрежение волнами, пополняющими это представление. Грубая оценка условия применимости лучевого приближения  $I_m$  (14) хорошо известна: оно справедливо в освещенной области для каждой из волн, что согласуется с приведенными выше условиями (13) [14, 15]. Критерий применимости (14) легко получить, оценив следующее приближение к геометрической оптике в полном асимптотическом разложении  $I_m$  в ряд по обратным степеням  $2mkD_m$ . При этом окажется,

\* Для вычисления земной волны  $E_r^{(0)}$  используют формулу Вейля—Ван дер Поля или ряд Фока [26]

что сферические коэффициенты отражения  $\tilde{R}_1(v)$  и  $\tilde{R}_2(v)$  должны быть медленно меняющимися функциями  $v$  в окрестности седловой точки  $v_m$  (12). Такая оценка, по-видимому, никем не проделана в рамках сферической модели волновода, хотя вопрос о границах применимости лучевого приближения  $I_m$  неоднократно обсуждался [18, 21, 22, 47, 50]. Соответствующие результаты для плоских волноводов можно найти, например, в монографии Бреховских [5]. Другой путь получения оценки связан с применением численных методов и состоит в сравнении двух способов расчета  $I_m$  — по формулам (10) и (14) (интегрирование в (10) проводится по контуру спуска). В [22] такое сравнение проделано в предположении, что  $\tilde{R}_1(v)$  и  $\tilde{R}_2(v)$  — медленно меняющиеся функции  $v$ . Поэтому приведенные в [22] результаты носят частный характер.

В связи со сказанным заметим, что, рассматривая процесс распространения СДВ в земных условиях, разные авторы указывают различную величину максимального расстояния между корреспондентами, при котором справедливо лучевое представление ряда скачков. Эта цифра колеблется от 600 до 1500 км [4, 31, 50]. По-видимому, разумна наиболее жесткая оценка, полученная Бьентегардом [50] и перекликающаяся с неявно содержащейся в [22].

Второе представление поля связано с методом путевых интегралов [20, 21, 48, 49, 51], предложенным Берри для вычисления поля в волноводе вне сферы действия геометрооптического приближения ряда скачков. Идея этого метода состоит в том, что на главном участке пути интегрирования  $I_m$  в (10) сферический коэффициент отражения  $\tilde{R}_2(v)$  (но не  $\tilde{R}_1(v)$ ) можно считать медленно меняющейся функцией  $v$  и вынести за знак интеграла в некоторой точке  $v'_m$ . Последняя совпадает с  $v_m$ : (12) в области света и, следовательно, является седловой точкой при выполнении условий (13); в теневой области  $v'_m = ka$ . В свою очередь  $\tilde{R}_2(v'_m)$  (но не  $R_1(v)$ ) можно упростить с помощью асимптотик Дебая и, следовательно, заменить коэффициентом отражения Френеля (16). В результате вместо (11) в (10) нужно подставить произведение  $I_m = \tilde{R}_2^m(v'_m) I'_m$ , где

$$I'_m = \int_{\Gamma} Q_{v'-1/2}^-(\cos \theta) R_1^{m-1}(v) [\xi_{v'-1/2}^{(1)}(kb)/\xi_{v'-1/2}^{(2)}(kb)]^m g(v) dv$$

— путевой интеграл, не зависящий от свойств области  $r \geq b$  (ионосфера), а  $\Gamma$  — некоторый контур на комплексной плоскости  $v$ , как правило, совпадающий с вещественной осью (см. рис. 1).

Как следует из предшествующего изложения, метод путевых интегралов не дает разложения поля по скачкам, но зато с его помощью вычисляется полное поле в волноводе. Поэтому этот метод имеет самостоятельное значение, и его плодотворность в приложении к теории распространения радиоволн в земных условиях можно видеть в том, что здесь эффект отражения от изменчивой во времени ионосферы ( $R_2^m(v'_m)$ ) рассматривается независимо от остальных эффектов относительно постоянных параметров трассы ( $I'_m$ ) [20].

Путевые интегралы табулированы с помощью численных методов [20, 48]. При этом используется два стандартных упрощения: функция  $Q_{v'-1/2}^-(\cos \theta)$  заменяется асимптотикой (6), что, как легко показать, эквивалентно переходу от сферической модели волновода к цилиндрической, а функции  $\xi_{v'-1/2}^{(1), (2)}$  выражаются через функции Эйри  $W_{1,2}$  [26]. Правомерность последней замены обсуждена в [21].

Еще одним приближенным методом, связанным с попыткой расширить границы применимости лучевого представления  $E_r$ , является метод волновых поправок Уэйта, который не вытекает из строгой теории и носит заведомо эвристический характер. В соответствии с этим методом для вычисления многократно отраженной волны в областях полутени и тени в выражение (14) вводятся некоторые корректирующие сомножители. Так, множитель сходимости  $g_m$  (15), имеющий особенность на линии оптического горизонта  $m$ -го луча  $\theta = 2m \arccos(a/b)$  (или, что одно и то же,  $\varphi_m = \pi/2$ ), заменяется произведением  $g_m A_m$  [52, 53], где

$$A_m = \sqrt{\frac{\pi \rho_m}{2}} H_{1/3}^{(1)}(\rho_m) \exp\left[i\left(\frac{5\pi}{12} - \rho_m\right)\right],$$

а  $\rho_m = ka \cos^3 \varphi_m (3 \sin^2 \varphi_m)^{-1}$ . Нетрудно убедиться в том, что при  $\varphi_m \rightarrow \pi/2$  величина  $A_m \sim \sqrt{\cos \varphi_m}$  и, следовательно,  $A_m g_m$  не имеет особенности на линии горизонта. В освещенной области  $A_m = 1$  и произведение  $A_m g_m$  приобретает обычный «геометрооптический» характер. В свою очередь каждый сомножитель  $[1 + R_1(\varphi_m)]$  в (14), обращающийся в нуль на линии горизонта  $\varphi_m = \pi/2$ , заменяется величиной [52, 54] (см. также [32, 33])

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(ika\theta_m) \int_{-\infty \exp(i2\pi/3)}^{\infty} \frac{\exp(iz_m\tau)}{W'_1(\tau) - q W_1(\tau)} d\tau,$$

где, как и выше,  $\theta_m = \theta - 2m \arccos(a/b)$  — расстояние точки наблюдения до линии горизонта,  $z_m = (ka/2)^{1/3} \theta_m$ , далее,  $W_1$  — функция Эйри, а  $q = i(ka/2)^{1/3} \delta_1$ . Эта замена в какой-то мере учитывает дифракционные эффекты, связанные с ненулевой кривизной стенок волновода, в чем можно убедиться, вычисляя  $F_m$  при  $\theta_m > 0$  по вычетам в полюсах  $\tau = \tau_s$  его подынтегрального выражения, совпадающих с полюсами асимптотического выражения функции  $R_1(v)$  (и подразумевая, что  $\delta_1 = \text{const}$ ). Однако этот учет не последователен. В самом деле, поведение многократно отраженной волны в области глубокой тени ( $z_m > 1$ ) описывает множитель  $|F_m|^2 \sim \exp(-2z_m \operatorname{Im} \tau_1)$ . Показатель экспоненты в этой формуле в два раза больше, чем это вытекает из строгой теории (см. формулу (19)). Кроме того, введенный, по-видимому, по аналогии [33, 53] со случаем открытой сферы (или цилиндра) [54]  $F_m$  не учитывает ни полиномиального роста амплитуды семейства дифракционных лучей в области тени (полюсы  $R_1(v)$  в соответствующем интегrale в действительности кратные), ни отсутствия геометрооптической сходимости поля дифракционных лучей (оба свойства специфичны для волноводной задачи). Вероятно, высказанное объясняет тот факт, что вычисления по геометрооптическим формулам с поправками приводят, как правило, к заниженным по сравнению с полученными другими способами значениям поля [18, 49, 21].

Хотя волновые поправки были предложены Уэйттом еще в шестидесятых годах, дискуссия об их правомерности не затихает и по сей день. На необходимость их пересмотра указывали Джолер [18], Берри [49], Гонзалес и Берри [21]. Возражения авторам [21] приведены в новом обзоре Уэйта [10]. Однако по существу они ничего не меняют. В частности, попытка связать сингularity  $g_m$  (15) с двойными седловыми точками соответствующей фазовой функции [10] не является состоятельной. В силу сказанного, вероятно, не стоит рекомендовать для расчетов формулы с поправками.

### 3. АНАЛИЗ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

На примере двух задач выясним, какими именно волнами пополняется разложение поля по скачкам. Вначале рассмотрим задачу о поле вертикального электрического диполя в трехслойной среде с плоскими

ми границами раздела [40] (см. также [39]). В цилиндрических координатах  $(\rho, \varphi, z)$  уравнения граничных поверхностей запишутся в виде  $z=0$  и  $z=h$ . Будем считать слой  $z \leq 0$  идеально проводящим, а слой  $z \geq h$  — однородной средой с комплексной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon'_m$ , причем  $0 \leq \arg \epsilon'_m \leq \pi/2$ . Пусть обе корреспондирующие точки расположены в слое  $0 \leq z \leq h$ , который представляет собой вакуум.

Строгое решение сформулированной задачи, записанное для вертикальной составляющей электрического поля  $E_z$ , можно представить в виде [40]

$$E_z = E_z^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_m^{(j)}} F_m^{(j)}(\psi) d\psi + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_m^{(j)}} F_m^{(j)}(\psi) d\psi + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 P_m^{(j)}. \quad (33)$$

Здесь  $E_z^{(0)}$  представляет собой земную волну и соответствует полю диполя над открытой поверхностью  $z=0$ . Интегралы по контурам спуска  $\Gamma_m^{(j)}$  (см. рис. 5) отвечают многократно отраженным волнам. Асимптотическое выражение для каждого из них, полученное по методу перевала в седловой точке  $\psi_m^{(j)}$ , допускает обычную лучевую интерпретацию

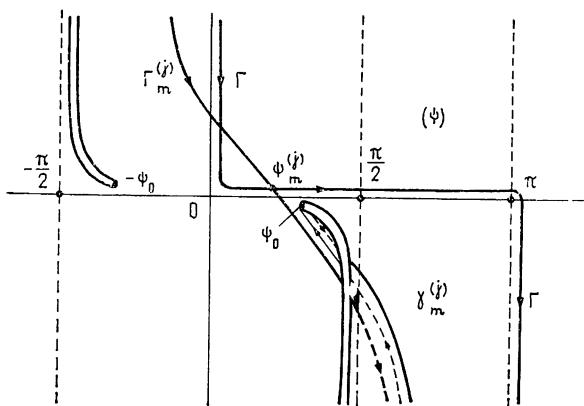


Рис. 5.

В случае плоского волновода эти две группы исчерпывают разложение поля по скачкам. Интегралы по контурам быстрейшего спуска  $\Gamma_m^{(j)}$ , проходящим через точку ветвления  $\psi_0 = \arccos \sqrt{\epsilon'_m}$  функции  $F_m^{(j)}$  (см. рис. 5), отвечают боковым волнам. Асимптотическое выражение поля боковых волн имеет вид [40]

$$E_z^{\text{бок}} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^4 a_m^{(j)} \exp [ikl_m^{(j)} - k\kappa l_m^{(j)} + ik \sqrt{\epsilon'_m} L_m^{(j)}] \rho^{-1/2} (\rho_m^{(j)})^{-3/2}, \quad (34)$$

где  $l_m^{(j)}$  — суммарный путь боковой волны в вакууме,  $\kappa = \kappa(\epsilon'_m)$  — диффузионное (не связанное с механизмом потерь) затухание на пути в вакууме,  $L_m^{(j)}$  — суммарный при  $m \geq 2$  путь боковой волны вдоль стенки

$z=h^*$ . На рис. 6а, б схематически изображены траектория  $ABCDE$  геометрооптического луча и одна из возможных траекторий  $AFGHMN$  семейства боковых волн в волноводе при  $m=2$  и  $j=1$ . Точки  $H'$  и  $H''$  маркируют предельные положения точки  $H$ .

Наконец, внеинтегральные слагаемые  $P_m^{(l)}$  в (33), или вычеты в полюсе  $\psi^* = \arcsin(\varepsilon_m' + 1)^{-1/2}$  функции  $F_m^{(l)}$  на II (нефизическом) листе римановой поверхности  $F_m^{(l)}$  ( $\operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon_m' - \cos^2 \psi} < 0$ ) отвечают поверхностным волнам. Асимптотически

$$P_m^{(l)} = \rho^{-1/2} p_{m-1}(k\rho_m^{(j)}) \exp[i k \rho_m^{(j)} \cos(\psi^* - \psi_m^{(l)})], \quad (35)$$

где  $p_{m-1}(k\rho_m^{(j)})$  — полином степени  $m-1$  относительно оптической длины пути  $m^{(j)}$ -го луча  $k\rho_m^{(j)}$ , а  $\operatorname{Re} \cos(\psi^* - \psi_m^{(l)}) < 1$ . Выражение (35) интерпретируется в виде быстрой поверхностной волны, распространяющейся в вакууме по геометрооптическому пути ( $ABCDE$  в случае  $m=2$ ,  $j=1$ , см. рис. 6а) с фазовой скоростью  $v=c/\operatorname{Re} \cos(\psi^* - \psi_m^{(j)})$ , большей скорости света в пустоте  $c$ , и диффузионным (не связанным с механизмом потерь) затуханием  $\chi_0 = \operatorname{Im} \cos(\psi^* - \psi_m^{(j)}) > 0$ . Для каждой волны (35) характерен экспоненциальный рост амплитуды с увеличением высоты волновода  $h$  и экспоненциальное убывание с ростом расстояния  $\rho$ . Это убывание частично компенсируется ростом предэкспоненциального сомножителя  $|p_{m-1}(k\rho_m^{(j)})|$ . Тем самым поверхностные волны в волноводе аналогичны и волне Ценнека [15], и присоединенным волнам [16, 55], и квазинормальным (или неспектральным, вытекающим) волнам [5, 55, 56]. Неспектральные волны специфичны для представлений поля, использующих методы седловой точки, и быстрейшего спуска [56].

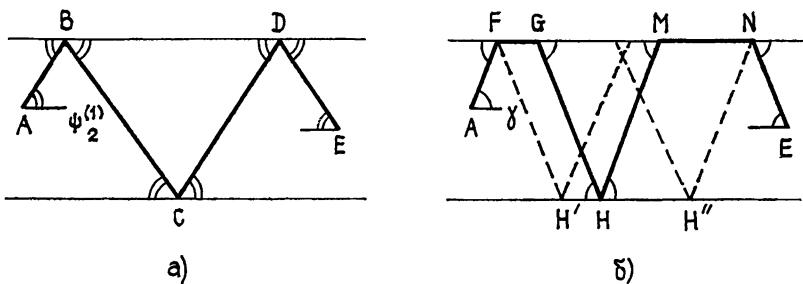


Рис. 6

Отметим, что в отличие от многократно отраженных волн боковые и поверхностные волны возникают только при определенных положениях точки наблюдения. Так, интегралы по контурам  $\gamma_m^{(l)}$  учитываются при однократном пересечении контуров спуска  $\Gamma_m^{(l)}$  и разрезов во II или IV квадрантах  $\psi$  в зависимости от  $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_m'} \geq 1$ . При этом, в частности, должно быть выполнено условие  $\psi_m^{(l)} < \gamma$ , геометрический смысл которого ясен из рис. 6а, б. Внеинтегральные слагаемые добавляются в (33), если полюс  $\psi^*$  попадает в область, затемненную на рис. 5 (при этом  $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_m'} < 1$ ). Нетрудно показать, что обе последние суммы по  $m$  в (33) всегда конечны.

\* Начиная с  $m=2$  траектория боковой волны в волноводе не определяется однозначно, и каждому слагаемому двойной суммы (34) отвечает несчетное множество синфазных боковых волн с фиксированным суммарным путем  $L_m^{(l)}$  и «плавающей» точкой срыва боковой волны со стенки  $z=h$

Итак, в рассматриваемой нами задаче разложение поля по многократно отраженным волнам пополняется разложением по боковым и, быть может, поверхностным волнам. Математически это пополнение является следствием неэквивалентности исходного контура интегрирования  $\Gamma$  (см. рис. 5) контурам спуска  $\Gamma_m^{(j)}$ , определяющим многократно отраженные волны. Ряд многократно отраженных волн дает вклад как в геометрооптическое поле, так и дифракционное поле (связанное с высшими членами разложения интегралов по контурам  $\Gamma_m^{(j)}$  в ряд по обратным степеням  $k\rho_m^{(j)}$ ). Боковые и поверхностные волны описывают только дифракционное поле. Дифракционное поле в плоском волноводе обусловлено эффектом конечной проводимости областей, ограничивающих волновод.

В качестве второго примера рассмотрим простейшую задачу с неплоскими границами раздела — задачу о поле линейного магнитного тока постоянной плотности  $j_0$  в коаксиальном цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками [34]. Слой между граничными поверхностями, как обычно, представляет собой вакуум.

В связи с эффектами тени здесь в отличие от предыдущей задачи приходится, во-первых, иметь дело с двумя определениями многократно отраженной волны, одно из которых сформулировано нами для области света, другое — для областей полутиени и тени; во-вторых, с эффектом ненулевой кривизны стенок волновода связан и целый ряд особых свойств контуров спуска  $\Gamma_m$  ( $m \geq 1$ ), не имеющих аналога ни в случае плоского волновода, ни в случае открытого цилиндра (или сферы). Так, контуры спуска  $\Gamma_m$  ( $m \geq 2$ ) не уходят на бесконечность на комплексной плоскости переменной интегрирования, а начинаются и оканчиваются в нулях подынтегрального выражения  $I_m$ . В силу этого контуры спуска  $\Gamma_m$  ( $m \geq 2$ ) всегда не эквивалентны исходному (бесконечному) пути интегрирования, что влечет за собой необходимость пополнения разложения поля по скачкам даже при идеальной проводимости стенок волновода.

Рассмотрим подробнее случай, когда наблюдатель находится в области геометрической тени по отношению к первому скачку. Пусть в полярных координатах  $(\rho, \theta)$  уравнения граничных поверхностей волновода имеют вид  $\rho=a$  и  $\rho=b$ . Координаты источника пусть будут  $(a, 0)$ , приемника  $-(a, \theta)$ ,  $\theta < \pi$ . Строгое выражение вертикальной составляющей электрического поля  $E_\rho$  (без учета кругосветных волн) можно представить в виде [34]

$$E_\rho = E_\rho^{(0)} + \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma_0} F_m(v) dv + \\ + \sum_{m=M+1}^{\infty} \int_{\Gamma_m} F_m(v) dv + \sum_{m=M+1}^{\infty} \int_{\gamma_m} F_m(v) dv. \quad (36)$$

Здесь  $F_m(v) \sim R_1^{m-1}(v)$ , где  $R_1(v) = -H_v^{(2)'}(ka)/H_v^{(1)'}(ka)$  (на рис. 7 полюсы  $R_1$  схематически помечены крестиками, нули — точками),  $\Gamma_0$  — петля вокруг полюсов  $R_1$  в 1-м квадранте  $v$ , далее,  $\Gamma_m$  — контур спуска, проходящий через седловую точку  $v_m$  (совпадающую с (12)) фазовой функции асимптотики  $F_m(v)$ , контуры  $\gamma_m = \gamma'_m + \gamma''_m$ , причем  $\gamma'_m$  и  $\gamma''_m$  дополняют соответственно левую и правую части  $\Gamma_m$  ( $m \geq 2$ ) до бесконечного контура, эквивалентного  $\Gamma_0$  (см. рис. 7). Наконец,  $M$  — целое число, зависящее от 0, именно  $M=N$ , если наряду с неравенствами

$$2N \arccos(a/b) < \theta < 2(N+1) \arccos(a/b) \quad (37)$$

выполнено  $\cos \varphi_{N+1} > O((ka)^{-1/3})$ , и  $M=N+1$ , если наряду с (37) выполнено  $\cos \varphi_{N+1} < O((ka)^{-1/3})$ , где  $\varphi_{N+1}$  — угол падения  $(N+1)$ -го луча на стенку  $\rho=a$  ( $N=1, 2, \dots$ ).

Каждая группа слагаемых в (36) имеет четкий физический смысл. Первое  $E_\rho^{(0)}$ , как обычно, отвечает земной волне. Интегралы по контурам спуска  $\Gamma_m$  и «дифракционному» контуру  $\Gamma_0$  соответственно отвечают многократно отраженным волнам в областях света и полутени и тени, определенных по отношению к линии горизонта  $m$ -го луча. Эти три группы слагаемых исчерпывают разложение поля по скачкам для неплоских волноводов в том случае, когда обе корреспондирующие точки расположены на выпуклой стенке  $\rho=a$ . Наконец, последняя группа слагаемых  $E_\rho^{\text{пов}}$ , пополняющая указанное выше разложение, по-видимому, до сих пор не учитывалась в явном виде в рамках стандартной схемы метода скачков. Сворачивая последнюю сумму по  $m$  в (36) и учитывая тот факт, что бесконечная сумма интегралов по контурам  $\gamma'_m$  превалирует над бесконечной суммой интегралов по контурам  $\gamma''_m$ , можно получить асимптотически

$$E_\rho^{\text{пов}} = \frac{j_0}{a} \left( \frac{ka}{2} \right)^{2/3} \frac{\exp(ikb\theta - 4y^{3/2}/3)}{\pi \sqrt{y}} G_M(\delta), \quad (38)$$

где

$$G_M(\delta) = \int_{-\infty \exp(i4\pi/3)}^{\infty} \left[ \frac{W'_1(\tau)}{W'_2(\tau)} \right]^{M+1} \frac{W'_2(\tau) \exp(i\delta\tau)}{[W'_2(\tau) - W'_1(\tau)]} d\tau$$

— специальная функция, подлежащая табулированию,  $\delta=x+2i\sqrt{y}$ ,  $x=(ka/2)^{1/3}\theta$ ,  $y=(ka/2)^{-1/3}kh$ ,  $h=b-a$ , а интегрирование на плоскости  $\tau$  ведется вдоль лучей  $\arg \tau=4\pi/3$  и  $\arg \tau=0$ . Соотношение (38) показывает, что  $E_\rho^{\text{пов}}$  имеет смысл поверхностной волны, как бы «прилипшей» к вогнутой стенке волновода  $\rho=b$ . Поскольку на отрезках  $AM$  и  $ND$ , показанных на рис. 2 пунктиром, амплитуда этой волны экспоненциально уменьшается, тогда как потери отсутствуют (а фаза не получает приращения), то говорят о диффузионном механизме возбуждения такой волны. Эта волна есть не что иное, как интерференционно-поверхностная волна шепчущей галереи, исследованная в ряде задач дифракции Бабичем, Булдыревым и их коллегами [57, 58].

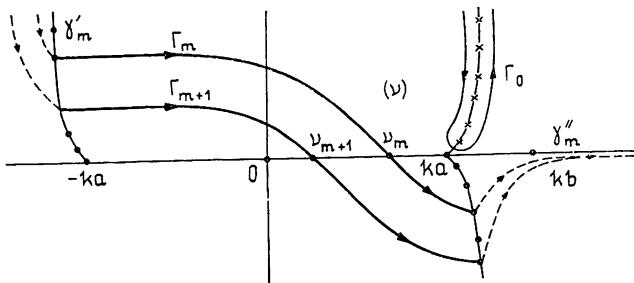


Рис. 7.

Итак, учет ненулевой кривизны стенок волновода даже при идеальной их проводимости приводит к неполноте разложения поля по скачкам, что обусловлено появлением поверхностной волны шепчущей галереи. При учете подъема обеих корреспондирующих точек над поверхностью  $\rho=a$ , несомненно, удастся проследить, как от этой поверхностной волны отщепляются лучи-рикошеты вида (26). Как и выше, учет конечной проводимости областей  $\rho \leq a$  или  $\rho \geq b$  пополнит (36) раз-

ложением по волнам иного типа, неявно содержащимся в полюсах  $R_1$  или  $R_2$ . Это будут волны волноводного типа, связанные с возможными подземными или ионосферными волноводными каналами, или волны соскальзывания, аналогичные лучам Келлера над открытым цилиндром  $\rho=d$  ( $d \geq b$ ). Механизм возбуждения всех этих волн — диффузионный.

## ПРИЛОЖЕНИЕ (Исторический обзор)

Проследим вкратце эволюцию представлений, связанных с методом многократно отраженных волн. Математические формулировки вида (10) и (27) впервые встречаются в ранних работах Ридбека [59] и Бреммера [2] в связи с исследованием задачи о поле диполя в сферически слоистой среде. В обеих работах представление  $I_m$  в виде контурного интеграла получается из ряда типа (28). Бреммер указывает и два альтернативных способа вычисления интегралов  $I_m$  — по вычетам и методом седловой точки. Детально им разработан только второй способ [2, 13].

Прямой путь выделения лучевых разложений из полного решения задачи, основанный на разложении в прогрессию (9) под знаком контурного интеграла, впервые, по-видимому, был рассмотрен Пекерисом [60]. Его статья посвящена проблеме распространения звуковых волн в плоскослоистых средах, моделирующих мелководье. Здесь же Пекерис формулирует понятие «многократно отраженная волна», предлагаая понимать под лучом не луч в обычном понимании, а соответствующий интеграл в выражении для поля.

Аналогичный прием получения разложения по многократно отраженным волнам впоследствии применил Уэйт [17], рассмотрев задачу о распространении электромагнитных волн в сферическом волноводе с импедансными стенками. Уэйт [17, 61] также показал, что вблизи границы свет—тень для вычисления интеграла  $I_m$  годятся только численные методы и что в теневой области  $I_m$  можно вычислять по вычетам, и это приводит к интерпретации  $I_m$  в виде дифракционных лучей Келлера. Оба эти результата можно рассматривать как контраргументы предложенной им ранее теории волновых поправок к геометрической оптике [52, 53].

В своем новом обзоре Уэйт модифицирует ряд «скачков», рассматривая вместо (9) разложение в конечную прогрессию [10]

$$(1 - R_1 R_2)^{-1} = \sum_{m=1}^M (R_1 R_2)^{m-1} + R_M$$

с остаточным членом  $R_M = (R_1 R_2)^M (1 - R_1 R_2)^{-1}$ . При таком подходе проблема выбора надлежащего контура  $\Gamma'$  (см. соотношения (20)–(22)) заменяется не менее сложной проблемой интерпретации и оценки слагаемого с остаточным членом.

На необходимость пополнения разложения поля по скачкам ионосферными волнами, связанными с полюсами сферического коэффициента отражения  $\tilde{R}_2(v)$  (3), указывает Джолер [18]. Представляет интерес и выявленный в [19] Джолером феномен стоячей волны, или интерференционная структура поля отдельного «скачка»  $\tilde{I}_m$  (28). Объяснение этого явления можно видеть в том, что  $\tilde{I}_m$  надлежит интерпретировать в виде суммы по крайней мере двух интерферирующих между собой волн [19], именно неявно содержащихся в  $\tilde{I}_m$  многократно отраженной волны в собственном смысле и волны иного типа.

Полезное обсуждение различных аспектов метода скачков (метода путевых интегралов) содержат работы Берри и его коллег [20, 21, 48, 49, 51]. Уникальный результат, полученный Берри численно — топологию области  $G : |R_1 R_2| < 1$  на комплексной плоскости  $v$ , можно найти в [20]. В рамках метода путевых интегралов обсуждаются и некоторые эффекты СДВ, например, квазибюстлеровское отражение [20, 48, 49]. В настоящее время метод путевых интегралов широко используется в практических расчетах [62, 63].

Вопрос о положении контуров спуска для интегралов  $I_m$  на комплексной плоскости переменной интегрирования (в рамках сферической модели волновода) обсуждают Гюнинен и Забавина [22] Аномалия случая  $m=1$  [34] ими не замечена.

Расчет формы атмосфериков методом многократно отраженных волн можно найти в [64].

Случай подъема одной корреспондирующей точки обсуждается в [21, 63, 65], обеих — в [10, 21] (лучи-рикошеты при этом упущены).

В [50, 66, 67] затрагиваются различные аспекты вычисления лучевым методом земного СВЧ поля на коротких трассах

Обобщение метода многократно отраженных волн на анизотропный случай дано в [14, 15, 20, 22, 30, 51]\*.

Сравнение двух способов расчета поля — модового и лучевого — содержитя в [46, 64, 66, 69].

Особый интерес представляет статья Тамира и Фельзена [39], в которой, по-видимому, впервые выделено разложение по боковым волнам, пополняющее ряд многократно отраженных волн.

Строгий подход к проблеме представления поля в виде ряда скачков развивается в наших предыдущих работах [34, 40].

На несовершенство стандартного метода скачков указывают и Кравцов, Тинин и Черкашин в обзорных работах [44, 45], посвященных проблеме дальнего распространения коротких волн вокруг Земли.

Проблема обоснования метода многократно отраженных волн примыкает к проблеме обоснования лучевых разложений, встречающихся в акустике, квазиоптике, математической физике. Взаимосвязь между разложениями поля по лучам и по нормальным волнам обсуждалась в статье Пекериса [24], в монографиях Бреховских [5], Уэйта [7], Толстого и Клэя [69], в других работах Толстого [70, 71]. Большое внимание преобразованию различных представлений поля друг в друга, включая разложение по многократно отраженным волнам, уделяется в недавно вышедшей под редакцией Келлера и Пападакиса книге по подводной акустике [72]. Во всех этих работах рассмотрены задачи с плоской геометрией. В этой связи представляет интерес цикл работ Бабича, Булдырева и др. [57, 58, 73–75], которые посвящены проблеме распространения волн вдоль вогнутых поверхностей в ряде типичных задач дифракции. Случай двух границ раздела ими не рассмотрен. Наконец, обсуждение общих принципов взаимосвязи лучевого (приближенного) и модового (строгого) представлений поля в граничных задачах содержит обзор Фельзена по квазиоптике [76].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Watson G. N — Proc Roy Soc London, 1919, A95, № 673, p. 546
2. Вегетег H Terrestrial radio waves — N Y etc Elsevier Publ Co, 1949
3. Краснушкин П. Е. Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей — М: Гос. ун-т, 1947
4. Краснушкин П. Е., Яблочкин Н. А. Теория распространения сверхдлинных волн — М: ВЦ АН СССР, 1963
5. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах — М: Наука, 1973
6. Budden K G The wave-guide mode theory of wave propagation — London Logos Press—Acad. Press, 1961.

\* В работе [51] исправляются некоторые ошибки, допущенные ранее в [20].

7. Wait J R Electromagnetic waves in stratified media.— Oxford—Paris Pergamon Press, 1962.
8. Макаров Г. И., Новиков В. В., Орлов А. Б.— Изв. вузов — Радиофизика, 1970, 18, № 3, с. 321.
9. Bremmer H Symp. math., I st. naz alta mat.. London—New York, 1976, 18, p. 57.
- 10 Wait J R — Rev Geophys. Space Phys., 1978, 16, № 3, p. 320
- 11 Keller J B.— SIAM Review, 1979, 21, № 2, p. 229.
12. Времмер H— Radio Sci., 1980, 15, № 3, p. 459.
13. Времмер H Handbuch der Physik — Berlin: Springer-Verl, 1958, 16, S 243.
14. Макаров Г. И., Новиков В. В. И Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн Тексты лекций.— Москва—Харьков, 1968, с. 242
15. Макаров Г. И., Новиков В. В. Четыре лекции по теории распространения радиоволн — Л: Гос. ун-т, 1972.
16. Краснушкин П. Е.— ДАН СССР, 1969, 185, № 5, с. 1014.
17. Wait J. R.—J. Geophys. Res., 1961, 66, № 6, p. 1713.
18. Johler J. R.—J. Res. NBS, 1964, 68D, № 1, p. 67
19. Johler J R— Radio Sci., 1970, 5, № 12, p. 1429.
20. Berry L. A—J Res NBS, 1964, 68D, № 12, p. 1275
21. Gonzales G, Berry L A.— Can. J. Phys., 1977, 55, № 12, p. 1092.
22. Гюнниен Э. М., Забавина И. Н.— Проблемы дифракции и распространения волн, 1966, вып. 5, с. 5.
23. Гюнниен Э. М., Забавина И. Н.— Проблемы дифракции и распространения волн, 1968, вып. 7, с. 142
24. Rekegis C. L. Proc Sympos. Appl. Math., 1950, 2, p. 71.
25. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. С дополнением Аграновича М. С.— М.: Наука, 1977.
26. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М: Сов. радио, 1970.
27. Макаров Г. И., Рыжков А. В.— Проблемы дифракции и распространения волн, 1977, вып. 15, с. 3.
28. Петрашень Г. И., Смирнова Н. С., Макаров Г. И.— Учен. зап. Ленингр. ун-та, 1953, № 170(27), с. 7
29. Wait J. R.—J. Res. NBS, 1964, 68D, № 1, p. 79.
30. Wait J. R., Migrhy A.— Geofis. Pura e Appl., 1956, 35, p. 61.
31. Wait J. R., Migrhy A.— Proc. IRE, 1957, 45, № 6, p. 754.
32. Johler J. R.—J. Res. NBS, 1961, 65D, № 5, p. 507.
33. Johler J R— Proc IRE, 1962, 50, № 4, p. 404.
34. Макаров Г. И., Федорова Л. А.— Проблемы дифракции и распространения волн, 1981, вып. 18, с. 3.
35. Keller J. B.— Trans. IRE, 1956, AP-4, № 3, p. 312.
36. Keller J. B.— Bull. Amer. Math. Soc., 1978, 84, № 5, p. 727
37. Титчмарш Е. Теория функций.— М: Наука, 1980.
38. Воробьев Н. Н. Теория рядов.— М: Наука, 1979.
39. Tamir T, Felsen L. B.— Trans. IEEE, 1965, AP-13, № 3, p. 410
40. Макаров Г. И., Федорова Л. А— Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 10, с. 1424
41. Краснушкин П. Е., Мустель Е. Р.— ДАН СССР, 1946, 54, № 3, с. 211
42. Краснушкин П. Е.— ЖТФ, 1948, 18, № 4, с. 431.
43. Budden K G, Martin H G— Proc. Roy. Soc. London, 1962, A265, № 1323, p. 554.
44. Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Черкашин Ю. Н Препринт № 30(229), М: ИЗМИРАН, 1978.
45. Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Черкашин Ю. Н.— Геомагнетизм и аэроно-мия, 1979, 19, № 5, с. 769.
46. Volland H— J Res. NBS, 1961, 65D, № 4, p. 357.
47. Аксенов В. И., Лшин И. В., Назарова М. В.— Распространение радио-волн— М: Наука, 1975, с. 228
48. Berry L. A., Chrismann M E— J. Res NBS, 1965, 69D, № 11, p. 1469.
49. Berry L. A. Proc. conf MF, LF and VLF radio propagation. Part I— London IEE publ., 1967, p. 63
50. Björntegard G— Geophysica Norvegica, 1973, 30, № 5, p. 13
51. Berry L. A., Gonzales G, Lloyd J L— Radio Sci., 1969, 4, № 11, p. 1025
52. Wait J. R. Electromagnetic wave propagation.— London— New York Acad Press, 1960, p. 87
53. Wait J. R— Proc. IRE, 1962, 50, № 7, p. 1624
54. Wait J. R, Conda A. M— Trans IRE, 1958, AP-6, № 4, p. 348.
55. Макаров Г. И., Новиков В. В— Проблемы дифракции и распространения волн, 1972, вып. 11, с. 33.
56. Tamir T, Oliner A. A.— Proc. IEEE, 1963, 51, № 2, p. 317.

57. Бабич В. М., Булдырев В. С., Филиппов В. Б. XI Всесоюзная конференция по распространению радиоволн. Тезисы докладов. Часть III, Казань: Гос. ун-т, 1975, с. 64.
58. Бабич В. М., Булдырев В. С.—Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн—М.: Наука, 1972.
59. Rydbeck O. E. H.—Trans Chalmers Univ. Technol., 1944, № 34.
60. Пекерис К. Распространение звука в океане.—М.: ИЛ, 1951, с. 48.
61. Wait J. R., Conda A. M.—J. Geophys. Res., 1961, 66, № 6, p. 1725.
62. Burgess B., Jones T. B.—The Radio and Electronic Engineer, 1975, 45, № 1/2, p. 47.
63. Campbell R. H. M., Jones T. B.—IEE Conf. Publ. № 196, part II, 1978, p. 47.
64. Забавина И. Н.—Проблемы дифракции и распространения волн, 1969, вып. 9, с. 64.
65. Забавина И. Н.—Проблемы дифракции и распространения волн, 1977, вып. 15, с. 121.
66. Björntegaard G., Larsen T. R.—J. Atmos. Terr. Phys., 1975, 37, № 1, p. 43.
67. Орлов А. Б., Пронин А. Е.—Изв. вузов—Радиофизика, 1975, 18, № 12, с. 1786.
68. Рыбачек С. Т., Гюннинен Э. М.—Проблемы дифракции и распространения волн, 1966, вып. 6, с. 115.
69. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана.—М.: Мир, 1969.
70. Tolstoy I.—J. Geoph. Res., 1959, 64, № 7, p. 815.
71. Толстой И. Квазиоптика—М.: Мир, 1966, с. 63.
72. Распространение волн и подводная акустика /Под ред. Д. Б. Келлера и Д. С. Пападакиса—М.: Мир, 1980.
73. Булдырев В. С., Ланин А. И.—ЖВММФ, 1966, 6, № 1, с. 90.
74. Булдырев В. С., Ланин А. И.—Численные методы решения задач математической физики.—М.: Наука, 1966, с. 131.
75. Ланин А. И.—Записки научных семинаров ЛОМИ, 1968, 9, с. 64.
76. Фельзен Л. Квазиоптика.—М.: Мир, 1966, с. 11.

Ленинградский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
31 марта 1982 г.

## ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

**Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма:** Пер. с японск—М: Мир, 1983.—18 л, ил

Монография известного японского физика посвящена основам магнетизма и техническим применением магнитных материалов. В ясной и доступной форме автор излагает классическую теорию магнетизма, атомный магнетизм, ди- и парамагнетизм, магнетизм металлов, окислов и других соединений.

Для физиков и других специалистов в области магнитных явлений, для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

**Электреты:** Пер. с англ./Под ред. Г. Сесслера.—М. Мир, 1983—33 л, ил.

Коллективная монография, написанная известными специалистами США, ФРГ, Нидерландов, Бразилии. Изложены вопросы теории и практического применения электретов. Отражены достижения в физике радиационного накопления зарядов, пьезо- и пироэлектрические свойства электретов, биоэлектреты.

Для физиков и инженеров, специализирующихся в области электроматериалов, а также для разработчиков измерительных приборов.

**Эшенфельдер А. Физика и техника цилиндрических магнитных доменов:** Пер. с англ.—М: Мир, 1983.—22 л, ил

Монография одного из ведущих американских специалистов посвящена основам бурно развивающейся области прикладной физики—физическими свойствами цилиндрических магнитных доменов и разработке микроелектронных устройств на их основе.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области магнетизма и физики твердого тела, а также для специалистов, занимающихся разработкой запоминающих устройств.