ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 538.3

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Ю. Г. Павленко

На основе гамильтонова формализма развита теория возмущений для решения системы уравнений поля и релятивистских уравнений движения. Найден алгоритм, позволяющий найти эволюцию во времени любой экспериментально измеряемой величины, обусловленную взаимодействием частиц и поля. Результат представлен в виде ряда, каждый член которого связан с соответствующим спонтанным и индуцированным процессом. Рассмотрены эффекты первого порядка при движении частиц в волноводе.

В последнее время возрос интерес к изучению взаимодействия свободных электронов с внешними полями. Ввиду того, что пучки электронов, движущихся в электромагнитных полях [1,2], могут быть использованы для генерации и усиления микроволнового излучения, существенным преимуществом электронных мазеров и лазеров является отсутствие принципиальной необходимости в специальном устройстве накачки, поскольку энергии инжектируемых электронов находятся в области высоковозбужденных уровней. В условиях, представляющих практический интерес, квантовомеханические эффекты, связанные с волновым характером движения, не проявляются, и задача является по существу классической.

В результате взаимодействия частиц между собой, с их «изображениями», а также со свободным полем волновода и внешними полями возникают различные радиационные процессы, приводящие к излучению, рассеянию, уширению пучка и т. д. Для исследования этих эффектов необходимо найти решение самосогласованных уравнений движения и уравнений Максвелла. Однако в настоящее время в классической электродинамике не существует единой теории возмущения, аналогичной теории S-матрицы в квантовой электродинамике. По этой причине решение самосогласованных уравнений имеет сложную структуру, отсутствует алгоритм, позволяющий находить высшие приближения. Так, например, теория возбуждения волноводов и резонаторов [3] позволяет рассчитать электромагнитное поле лишь в приближении заданных источников, т. е. только эффекты первого порядка. Причина этого — в использовании лагранжева формализма, роль которого сводится по существу к выводу уравнений второго порядка. В то же время из работ [4] можно сделать вывод о широких возможностях, которые открывает метод канонических преобразований для получения приближенных решений в гамильтоновом формализме первого порядка.

В настоящей статье этот метод применяется к решению задачи о взаимодействии релятивистских частиц с электромагнитным полем. Развита теория возмущений, которая в принципе дает точное решение самосогласованных уравнений движения частиц и уравнений Максвелла. Основным результатом статьи является формула (22), представляющая эволюцию произвольной динамической переменной, обусловленную взаимодействием частиц и поля, в виде ряда по степеням заряда. Это выражение — результат канонического преобразования той же величины, взятой в начальный момент времени. Каждый член ряда соответствует определенному спонтанному или индуцированному процессу и может быть представлен в виде диаграммы. В этом смысле членам ряда соответствуют квадратичные комбинации диаграмм Фейнмана, вычисленных в классическом пределе.

1. ГАМИЛЬТОНИАН РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

В четырехмерном пространстве* $x^\mu = (tc, \boldsymbol{x})$ гамильтониан, приводящий к правильным уравнениям движения, имеет вид [5]

$$H(\boldsymbol{x}, p) = -\sum_a \left[\frac{1}{2m_a}\left(p_a - \frac{e_a}{c} A(x_a)\right)^2 - \frac{m_a c^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Здесь $A^\mu(\boldsymbol{x})$ — четырех-потенциал электромагнитного поля, p^μ — обобщенный четырех-импульс, связанный с четырех-скоростью u^μ соотношением

$$mu_\mu = (p - ec^{-1}A)_\mu . \qquad (2)$$

Канонические уравнения движения могут быть записаны в терминах скобок Пуассона (СП):

$$dx_\mu/d\tau = [x_\mu, H], \qquad dp_\mu/d\tau = [p_\mu, H], \qquad (3)$$

где СП функций f и h определены соотношением

$$[f, h] = \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x^\alpha}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial p_\alpha}\right).$$

Переменная τ параметризует одновременно траектории всех частиц. Для того, чтобы параметр τ имел смысл собственного времени, необходимо после вычисления СП положить $p^2 = m^2$.

Временная составляющая обобщенного четырех-импульса p^μ играет роль полной энергии, причем $dp_0/d\tau = \partial H/\partial t$. В нерелятивистском пределе гамильтониан (1) может быть разложен в ряд

$$H = \sum_a [2m_a^{-1}(p_a - e_a c^{-1}A)^2 + e_a A_0(x_a) + \ldots] .$$

2. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

По аналогии с механикой основной величиной в каноническом формализме является гамильтониан, зависящий от четырех-потенциалов $A^\mu(x)$, которые играют роль координат [6]. При переходе к гамильтоновой форме уравнений хорошо известна [6] трудность, связанная с выбором лагранжиана поля. Несмотря на то, что в нашем подходе форма лагранжиана несущественна, мы выберем лагранжиан Ферми

$$L_\gamma = -\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu . \qquad (4)$$

Четырех-потенциал, определяющий ТМ- или ТЕ-типы волн, конкретной электродинамической системы (волновода или резонатора) можно представить в виде

$$A^0(\boldsymbol{x}) = -\operatorname{div} \Pi^{(e)}, \qquad A(\boldsymbol{x}) = -(i\omega/c)\,\Pi^{(e)} + \operatorname{rot} \Pi^{(m)}, \qquad (5)$$

где $\Pi^{(e)}(s, \boldsymbol{x})$ и $\Pi^{(m)}(s, \boldsymbol{x})$ — электрический и магнитный векторы

* Мы используем метрику, задаваемую тензором $g_{\mu\nu}$ с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Скалярное произведение четырех-векторов: $ab = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, $a^2 = a_\mu a^\mu$.

Герца [3], удовлетворяющие волновому уравнению и граничным условиям, буквой s для краткости обозначен набор дискретных и непрерывных собственных значений, характеризующих пространственную конфигурацию моды. Нормировка вводится соотношением

$$\int \Pi^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x})\, \Pi^{(\lambda')}(s', \boldsymbol{x})\, d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ss'}. \tag{6}$$

Представление (5) определяет собственные функции $A_{\mu}^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x})$ системы.

При переходе от (4) к гамильтонову формализму следует разложить четырех-потенциал произвольного поля в ряд по собственным функциям

$$A_{\mu}(x) = \sqrt{4\pi} \sum_{\lambda, s} q_{\lambda}(s)\, A_{\mu}^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Здесь по непрерывным собственным значениям подразумевается интегрирование.

Для электромагнитного поля в пустом безграничном пространстве разложение (7) имеет вид

$$A_{\mu}(x) = \frac{\sqrt{4\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\boldsymbol{k}\, e_{\mu}^{\lambda}(\boldsymbol{k})\, q_{\lambda}(\boldsymbol{k})\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},$$

где индекс λ характеризует поляризацию.

Подставим теперь (7) в (4) и, учитывая (6), вычислим функционал действия:

$$\begin{gathered} S = \int L_{\gamma}\, d^4x = \int L\,dt, \\ L = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, s} \left[\frac{dq_{\lambda}(-s)}{dt} \frac{dq_{\lambda}(s)}{dt} - \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}(-s)\, q_{\lambda}(s) \right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Выберем в качестве «координат» поля переменные $q_{\lambda}(s)$. Тогда структура лагранжиана (8) соответствует набору бесконечного числа осцилляторов ТМ- и ТЕ-типов. Далее обычным образом [7], вводя «импульсы» соотношением $p_{\lambda}(s) = \partial L/\partial \dot{q}_{\lambda}(s) = \dot{q}_{\lambda}(-s)$, найдем гамильтониан электромагнитного поля:

$$H_{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, s} \left[p_{\lambda}(-s)\, p_{\lambda}(s) + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}(-s)\, q_{\lambda}(s) \right]. \tag{9}$$

По аналогии с квантовой электродинамикой удобно перейти к комплексному представлению переменных, совершая каноническое преобразование к новым координатам $q'_{\lambda} = a_{\lambda}$ и импульсам $p'_{\lambda} = ia'_{\lambda}$ с помощью производящей функции:

$$\begin{aligned} S_{\gamma} = \sum_{\lambda, s} \Big[& \frac{i}{2} p'_{\lambda}(-s)\, p'_{\lambda}(-s) \exp(2i\omega_{\lambda} t) - \frac{i\omega_{\lambda}}{2} q_{\lambda}(-s)\, q_{\lambda}(-s) + \\ & + \sqrt{2\omega_{\lambda}}\, p'_{\lambda}(s)\, q_{\lambda}(s) \exp(i\omega_{\lambda} t) \Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Старые и новые переменные связаны уравнениями преобразования

$$p_{\lambda}(s) = \partial S_{\gamma} / \partial q_{\lambda}(s), \qquad q'_{\lambda}(s) = \partial S_{\gamma} / \partial p'_{\lambda}(s),$$

из которых находим

$$q_\lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_s}}\left[a_\lambda(s)\exp(-i\omega_\lambda t) + a_\lambda^*(-s)\exp(i\omega_\lambda t)\right],$$
$$p_\lambda(s) = -i\sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2}}\left[a_\lambda(-s)\exp(-i\omega_\lambda t) - a_\lambda^*(s)\exp(i\omega_\lambda t)\right]. \quad (11)$$

Преобразование (11) эквивалентно переходу к представлению взаимодействия в квантовой электродинамике. Учитывая (10), можно убедиться, что новый гамильтониан $H'_\gamma = H_\gamma + \partial S_\gamma/\partial t$ равен нулю, а четырех-потенциал (7) приобретает вид

$$A_\mu(x) = \sqrt{4\pi}\sum_{\lambda, s}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\lambda}}\left[a_\lambda(s)A_\mu^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x})\exp(-i\omega_\lambda t) + a_\lambda^*(s)\overset{*}{A}{}_\mu^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x})\exp(i\omega_\lambda t)\right]. \quad (12)$$

Из теоремы Нетер [6] можно найти четырех-импульс и момент импульса излучения. В частности, энергия поля излучения совпадает с гамильтонианом (9)

$$P_0 = \sum_{\lambda, s}\omega_\lambda a_\lambda^*(s)\, a_\lambda(s). \quad (13)$$

В дальнейшем важную роль будут играть СП четырех-потенциалов. Учитывая значение СП $[a_\lambda^*(s), a_{\lambda'}(s')] = i\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ss'}$, найдем

$$[A_\mu(x_1), A_\nu(x_2)] = 4\pi D_{\mu\nu}(x_1, x_2),$$
$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = -i\sum_{\lambda, s}\frac{1}{2\omega_\lambda}\left[A_\mu^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}_1)\overset{*}{A}{}_\nu^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}_2)\exp[-i\omega_\lambda(t_1 - t_2)] - \text{к.с}\right]. \quad (14)$$

Для поля в пустом неограниченном пространстве $D_{\mu\nu}$ совпадает с функцией Паули [6]. $D_{\mu\nu}$ связана с запаздывающей функцией Грина волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)D_{\mu\nu}^{\text{ret}}(x, x') = g_{\mu\nu}\delta^{(4)}(x - x')$$

соотношением

$$D_{\mu\nu}^{\text{ret}}(x_2, x_1) = \theta(t_2 - t_1)D_{\mu\nu}(x_2, x_1) \quad (15)$$

и удовлетворяет граничным условиям на поверхности волновода.

3. КОВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим общий случай, предполагая, что в волноводе имеются источники, создающие дополнительное поле, задаваемое четырех-потенциалом $A_\mu^{\text{ext}}(x)$. Благодаря преобразованию (11) гамильтониан системы частиц, взаимодействующих с полем волновода и внешними полями, имеет вид

$$H = -\sum_a\left[\frac{1}{2m_a}\left(p_a - \frac{e_a}{c}A^{\text{ext}} - \frac{e_a}{c}A\right)^2 - \frac{m_a c^2}{2}\right],$$

где $A_\mu(x)$ определен соотношением (12). Произвольная динамическая переменная F, зависящая от x_μ, p_μ, $a^\dagger_\gamma$, a_γ, удовлетворяет уравнению

$$dF/d\tau = [F, H]. \quad (16)$$

Наша цель — найти зависимость F от времени. Для этого перейдем к новым координатам и импульсам x'_μ, p'_μ с помощью производящей функции $S(x, p', \tau)$. Искомое преобразование определяется соотношениями

$$p_\alpha = -\partial S/\partial x^\alpha, \qquad x'_\alpha = -\partial S/\partial p'^\alpha. \tag{17}$$

Уравнения движения в новых переменных сохраняют форму (10) с новым гамильтонианом

$$H' = H + \partial S/\partial\tau.$$

Интегрирование становится элементарным, если производящую функцию выбрать так, чтобы $H'=0$. Для этого необходимо найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби

$$H(x_\alpha, p_\alpha = -\partial S/\partial x^\alpha) + \partial S/\partial\tau = 0.$$

Так как эта задача в общем случае неразрешима, то мы вынуждены использовать приближенные методы. С этой целью представим H в виде $H=H_0+V$. Разбиение H на части производится так, чтобы уравнение

$$H_0 + \partial S/\partial\tau = 0 \tag{18}$$

допускало точное решение. Положим

$$H_0 = -\sum_a \left[\frac{1}{2m_a}\left(p_a - \frac{e_a}{c} A^{\text{ext}}\right)^2 - \frac{m_a c^2}{2}\right]. \tag{19}$$

Если произвольные постоянные C^a_μ в полном интеграле $S= =S(x, C^a, \tau)$ уравнения (18) принять за новые импульсы $C^a_\mu = p^{a'}_\mu$, то новые координаты определяются соотношениями (17). Возвращаясь к уравнению (16), мы находим, что уравнения движения в новых переменных принимают вид

$$dF/d\tau = \partial F'/\partial\tau + [F', V'], \tag{20}$$

$$V' = \sum_a \left[\frac{e_a}{c} u^a_\mu A^\mu - \frac{e_a^2}{2m_a c^2} A^2\right], \qquad m u_\mu = p_\mu - \frac{e}{c} A^{\text{ext}}_\mu,$$

где $F'(x', p', a, a^*; \tau)$ и $V'(x', p', a, a^*; \tau)$ — функции F и V, в которых совершена замена переменных (17). Второй член в (20) определяет неявную зависимость F' от параметра τ. Уравнения (16) и (20) принципиально не отличаются, и переход от (16) к (20) оправдан только в том случае, если V можно рассматривать как возмущение. Изложенный выше прием известен как метод вариации канонических постоянных [8]. Обычно решение уравнения (20) находят только в первом приближении или используют его для применения метода усреднения. Существует, однако, возможность построить решение (20) в виде ряда. Используя итерационную процедуру, получим

$$\begin{gathered} F(x, p; a_\lambda, a^*_\lambda) = \sum_n \int\limits_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int\limits_{\tau_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n, \\ [\ldots[F'(t), V'(\tau_1)]\, V'(\tau_2)] \ldots]\, V'(\tau_n)]. \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь СП вычисляются по переменным x'_α, p'_α, a_λ, a^*_λ, взятым в момент времени $\tau_0 \to -\infty$. При этом предполагается, что взаимодействие V вводится с помощью адиабатического включения [6].

В некоторых случаях более удобным для вычислений является другое представление (21), в котором четырех-потенциалы поля не содержат переменных, относящихся к частицам:

$$F(x,\ p;\ a_\lambda,\ a_\lambda^*) = \sum_n \frac{1}{n!}\int d^4x_1 \int d^4x_2 \ldots \int d^4x_n\,,$$

$$P\,[\ldots[F'(t);\ V(x_1)]\,V(x_2)]\ldots]\,V(x_n)]\,, \tag{22}$$

$$V(x) = \sum_a \int \left[\frac{e_a}{c}\,u_\mu^a A^\mu(x) - \frac{e_a^2}{2m_a c^2}\,A^2(x)\right] \delta^{(4)}(x - x_a(\tau))\,d\tau\,.$$

Здесь P — хронологический оператор Дайсона [6].

Соотношение (22) определяет эволюцию во времени произвольной динамической переменной, относящейся к системе N частиц и электромагнитному полю, обусловленную их взаимодействием. Очевидно, (22) является классическим выражением для среднего значения оператора $\hat{F}$ (соответствующего переменной F), вычисленного в квантовой теории.

Представлению (22) в виде разложения по степеням заряда соответствует перечисление вкладов различных радиационных процессов. Каждому члену ряда можно поставить в соответствие диаграмму, описывающую определенный радиационный процесс. В этом смысле члены $\sim e^2$ описывают излучение одной волны и релятивистское взаимодействие зарядов, учитывающее запаздывание, члены $\sim e^4$ — излучение двух независимых волн, рассеяние и высшие приближения к кулоновскому взаимодействию, члены $\sim e^6$ — тормозное излучение, обусловленное взаимодействием частиц и т. д. Следует отметить, что члены одного порядка включают как спонтанные, так и индуцированные процессы.

В том случае, когда начальные состояния представляют статистический ансамбль, то наблюдаемую величину (22) необходимо усреднить по фазам и невозмущенной функции распределения частиц и поля. При этом возникнут корреляционные тензоры, характеризующие статистические свойства системы частиц и излучения.

Ряд (22) можно применить к анализу взаимодействия плазмы с релятивистскими пучками. Действительно, динамика плазмы описывается уравнением Лиувилля, имеющим вид (16). Если в (22) положить $F = A(x,\ p;\ a,\ a^*)\,D(x,\ p;\ a,\ a^*;\ \tau)$, где A — динамическая переменная, а D — функция распределения частиц и поля, то (22) дает среднее значение A в виде ряда. В частности, выбирая функцию A равной плотности тока $j_\alpha(x)$, получим ряд, описывающий нелинейную реакцию классической активной среды на внешнее возмущение. Таким путем можно получить тензор восприимчивости, учитывающий вклад всех возможных радиационных процессов. При этом естественным образом возникают запаздывающие релятивистские функции Грина частиц

$$G_{\mu\nu}^{\mathrm{ret}}(\tau_2,\ \tau_1) = \theta(\tau_2 - \tau_1)\,[\,x_\mu(\tau_2),\ x_\nu(\tau_1)\,]$$

и электромагнитного поля (14).

Формула (22) в принципе представляет точное решение уравнения (16). Ниже мы рассмотрим ряд примеров, демонстрирующих преимущества канонической формы теории возмущений по сравнению с используемым обычно методом последовательных приближений.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим движение частиц в плосковолновых полях. Этот класс полей, который определяется тензором $F^{\mu\nu}(\varphi)$, удовлетворяющим условию $F_{\mu\nu}k^{\nu}=0$ ($\varphi=kx$, $k^2=0$), включает значительное число практически реализуемых конфигураций. Особый интерес представляют скрещенные поля, поскольку для релятивистских частиц любое слабонеоднородное поле в системе покоя выглядит как скрещенное [9].

Вектор-потенциал плосковолнового поля является суперпозицией функций вида $A_\mu(x)=a_\mu h(\varphi)$, где $h(\varphi)$ — произвольная функция, a_μ — постоянный вектор, причем $ak=0$. Уравнения движения (3) в этом случае допускают точное решение [10, 11]. Ниже, однако, мы получим точное решение уравнений движения, используя формулу (21). Запишем гамильтониан в виде

$$H=H_0+V,$$

$$H_0=-\frac{p^2}{2m}+\frac{mc^2}{2},\qquad V=\frac{e}{mc}pA-\frac{e^2}{2mc^2}A^2.$$

Полный интеграл уравнения (18)

$$S=-xp'+\left(\frac{p'^2}{2m}-\frac{mc^2}{2}\right)(\tau-\tau_0)$$

реализует преобразование к новым переменным x', p', которые связаны со старыми формулами (17):

$$x_\mu(\tau)=x'_\mu+(p'_\mu/m)(\tau-\tau_0),\qquad p_\mu=p'_\mu.$$

Следовательно, новый гамильтониан (20)

$$V'=\frac{e}{mc}p'A(\varphi)-\frac{e^2}{2mc^2}A^2(\varphi),\qquad \varphi=kx'+\frac{kp'}{m}(\tau-\tau_0).$$

Теперь, полагая в (21) $F\equiv x_\alpha$, получим решение уравнений движения

$$x_\alpha(\tau)=x_\alpha^{(0)}(\tau)+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}[x_\alpha^{(0)}(\tau),\ V(\tau_1)]\,d\tau_1+\ldots,$$

$$x_\alpha^{(0}(\tau)=x'_\alpha(\tau_0)+p'_\alpha(\tau_0)/m\,(\tau-\tau_0).$$

После вычисления СП находим, что ряд обрывается на втором члене, и мы получаем точное решение:

$$x_\alpha(\tau)=x_\alpha^{(0)}(\tau)-\frac{e}{mc}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}A_\alpha(x_1)\,d\tau_1+$$

$$+\frac{e}{mc}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(p'-eA(x_1))_\nu\frac{\partial A^\nu}{\partial x_{1\sigma}}d_{\alpha\sigma}(\tau,\ \tau_1)\,d\tau_1,$$

$$d_{\alpha\sigma}=[x_\alpha^{(()}(\tau),\ x_\sigma^{(0)}(\tau_1)]=g_{\alpha\sigma}m^{-1}(\tau-\tau_1),\qquad x_1=x^{(0)}(\tau_1).$$

Решение этой задачи, приведенное в [10] и [11] (стр. 149), требует знания первых интегралов.

Формула (21) позволяет найти закон движения частиц в полях произвольных конфигураций. Свобода в выборе гамильтониана «нулевого приближения» открывает широкие возможности нахождения приближенных решений и оценки остаточного члена.

5. РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему частиц, движущихся в волноводе, помещенном во внешнее поле, и найдем интенсивность спонтанного и индуцированного излучения. Существующая теория возбуждения волноводов [3] позволяет найти лишь энергию спонтанного излучения, а энергия индуцированного излучения обычно вычисляется в два этапа — сначала находят закон движения частиц в поле волны, а затем вычисляют работу, совершаемую полем волны над зарядами. В канонической теории возмущений (как и в квантовой электродинамике) оба эффекта рассчитываются одновременно. В нашем подходе решение непосредственно следует из формулы (22), где вместо F следует подставить выражение для энергии электромагнитного поля (13). Тогда энергия излучения в приближении $\sim e^2$ равна

$$P_0(t) = \int\limits^{t} d^4x_1 \int\limits^{t_1} d^4x_2 \{ [[P_0, A^\alpha(x_1)]_f A^\beta(x_2)] j_\alpha(x_1) j_\beta(x_2) + + [[P_0, A^\alpha(x_1)]_f j_\alpha(x_1), j_\beta(x_2) A^\beta(x_2)]_m + \ldots \tag{23}$$

Здесь $j_\alpha(x)$ — плотность тока:

$$j_\alpha(x) = \sum_a \int e_a u_\alpha^a(\tau)\, \delta^{(4)}(x - x_a(\tau))\, d\tau.$$

Первый член в (23) (двойная СП по переменным поля) соответствует энергии спонтанного излучения, второй (две СП по переменным поля и частицы) — энергии индуцированного излучения.

Найдем теперь спектральное распределение энергии излучения в единицу времени, усредненное по ансамблю и фазам частиц и поля. Учитывая (12), (13) и значение СП:

$$[P_0, A_\alpha(x)] = -\partial A_\alpha/\partial t,$$

получим из (23) интенсивность спонтанного излучения:

$$\frac{dP_0^{\text{сп}}}{dt} = -4\pi e^2 \frac{m}{p_0} \int d\tau \left\langle \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial t_1}(x_1, x_2)\, u^\alpha(\tau_1)\, u^\beta(\tau_2) \right\rangle = = 2\pi e^2 \frac{m}{p_0} \sum_{\lambda, s} \int d\tau \langle v_\lambda(s, \tau_1) \overset{*}{v}_\lambda(s, \tau_2) \rangle, \tag{24}$$

$$v_\lambda(s, \tau) = u^\alpha(\tau) A_\alpha^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}(\tau)) \exp(i\omega_\lambda t).$$

Здесь $\tau_{1,2} = \pm\tau/2$, p_0 — начальная энергия частицы, $x^\mu(\tau) = (ct(\tau), \boldsymbol{x}(\tau))$ — закон движения частиц во внешнем поле.

Второе слагаемое в (23) определяет интенсивность индуцированного излучения:

$$\frac{dP_0^{\text{инд}}}{dt} = -e^2 \frac{m}{p_0} \int d\tau\, \mathrm{Re} \left\langle \left[u^\alpha(\tau_1) \frac{\partial A_\alpha^{(+)}(x_1)}{\partial t_1},\; u^\beta(\tau_2) A_\beta^{(-)}(x_2) \right] \right\rangle = = -e^2 \frac{m}{p_0} \int d\tau\, \mathrm{Re} \frac{\partial}{\partial p'_\sigma} \left\langle u^\alpha(\tau_1) \frac{\partial A_\alpha^{(+)}(x_1)}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} u^\beta(\tau_2) A_\beta^{(-)}(x_2) \right\rangle. \tag{25}$$

Здесь $A_\alpha^{(+)}(A_\alpha^{(-)})$ — положительно (отрицательно)-частотная часть четырех-потенциала (12). Статистические свойства генерируемого излучения определяются классической корреляционной функцией первого порядка [12]

$$\Gamma_{\alpha\beta}(x_2, x_1) = \langle A_\alpha^{(+)}(x_2) A_\beta^{(-)}(x_1) \rangle .$$

Таким образом, интенсивность индуцированного излучения получается в результате элементарного вычисления СП по фазовым координатам частицы.

Формулы (24) и (25) для интенсивности спонтанного и индуцированного излучения имеют самый общий характер и применимы к произвольной электродинамической системе, в частности, к безграничному пространству, заполненному диэлектриком. Вычисляя, в этом наиболее простом случае, интенсивность индуцированного черенковского излучения, нетрудно убедиться в преимуществах формулы (25) в сравнении с методом последовательных приближений [13], где для решения задачи приходится разлагать в ряды координаты, скорость, энергию, выражения типа $\exp[i\boldsymbol{kx}(t)]$ и т. д.

Формула (22) позволяет также вычислять любые экспериментально наблюдаемые величины. Например, для нахождения напряженности электрического и магнитного полей волновода в рабочем режиме в (22) следует подставить выражение для тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda, s} [a_\lambda(s) F_{\mu\nu}^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}) \exp(-i\omega_\lambda t) + a_\lambda^*(s) \overset{*}{F}{}_{\mu\nu}^{(\lambda)}(s, \boldsymbol{x}) \exp(i\omega_\lambda t)],$$

где $F_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ определяется четырех-потенциалами $A_\mu^\lambda(s, \boldsymbol{x})$.

Весьма важным является вопрос об изменении параметров пучка в процессе генерации, обусловленном взаимодействием частиц с полем волновода и кулоновским взаимодействием. С этой целью найдем зависимость от времени импульса p_μ^a частица a. Подставляя в (22) $F \equiv p_\mu^a$, получим в приближении $\sim e^2$

$$\begin{aligned} p_\mu^a(\tau) = p_\mu^a(\tau_0) + \int [p_\mu^a, V(x_1)]\, d^4x_1 + \\ + \frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 \{ [[p_\mu^a, j_\alpha(x_1) A^\alpha(x_1)]_m j_\beta(x_2) A^\beta(x_2)]_m + \\ + [[p_\mu^a, j_\alpha(x_1) A^\alpha(x_1)]_m j_\beta(x_2) A^\beta(x_2)] + \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

Второй и третий члены в (26) описывают влияние поля излучения на траекторию частицы. Последний член, не содержащий полевых переменных, представляет вклад кулоновского взаимодействия рассматриваемой частицы a с остальными частицами пучка. Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_\mu^a(\tau) = \ldots \sum_b \frac{\partial}{\partial x'^\mu_a} \int d^4x_1 j_\alpha^a A_b^\alpha(x_1) + \ldots , \\ A_\alpha^b(x_1) = 4\pi \int D_{\alpha\beta}^{\mathrm{ret}}(x_1, x_2) j_b^\beta(x_2) d^4x_2 , \end{aligned} \tag{27}$$

где $D_{\alpha\beta}^{\mathrm{ret}}$ — запаздывающая функция Грина (15), $A_\mu^b(x)$—потенциал Лиенара — Вихерта, создаваемый частицей b. Выражение, стоящее в (27) под знаком интеграла, равно энергии кулоновского взаимодействия заряда a с частицами пучка. Заметим, что энергия кулоновского взаимодействия включает также члены, соответствующие взаимодействию зарядов с их «изображениями». Это обстоятельство — следствие того, что функция Грина (15) является точным решением волнового уравнения, учитывающим граничные условия.

6. РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных изучению взаимодействия свободных электронов с сильным полем излучения. Один из аспектов этой проблемы связан с исследованием возможности нагрева или охлаждения электронной компоненты плазмы в результате вынужденного рассеяния [14].

Вычисление интенсивности расеянного излучения, изложенное в монографиях по классической электродинамике, обладает двумя недостатками. Во-первых, оно имеет нековариантную форму, во-вторых, решение разбивается на два этапа — сначала находят координаты и скорость электронов в поле волны, а затем подставляют их в выражение для энергии излучения заданным током (см. [11], стр. 277). В нашем подходе для анализа эффектов, связанных с рассеянием, следует учесть в правой части (23) члены порядка $\sim e^4$, содержащие четыре СП.

Самосогласованные уравнения Максвелла и уравнения движения представляют систему нелинейных уравнений. Предложенный метод решения этой системы обладает рядом особенностей.

1) Общее решение (22) является в принципе точным и позволяет рассчитать спонтанные и индуцированные процессы в любом порядке теории возмущений.

2) Все вычисления имеют релявистски ковариантную форму.

3) При изучении поведения системы частиц нет необходимости включать кулоновское взаимодействие в невозмущенный гамильтониан (19). Взаимодействие между зарядами появляется в третьем члене ряда (26). Следующие члены ряда представляют высшие поправки к кулоновскому взаимодействию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапонов А В, Петелин М И, Юлпатов В. К.— Изв. вузов — Радиофизика, 1967, **10**, № 9—10, с. 1414
2 Релятивистская высокочастотная электроника Материалы Всесоюзного семинара.— Горький, 1979
3. Каценеленбаум Б З Высокочастотная электродинамика — М: Наука, 1966, с 145.
4. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 3.— Киев· Наукова думка, 1971.
5. Пановский В, Филлипс М Классическая электродинамика.— М: Физматгиз, 1963.
6. Боголюбов Н. Н, Ширков Д В. Введение в теорию квантовых полей.— М: Наука, 1976.
7. Голдстейн Г Классическая механика — М· Наука, 1975
8. Курант Р Уравнения с частными производными.— М· Мир, 1964
9 Никишов А И, Ритус В. И — ЖЭТФ, 1964, **46**, № 2, с 776.
10 Швингер Ю Новейшее развитие квантовой электродинамики — М.: ИЛ, 1954, с 254.
11. Ландау Л Д, Лифшиц Е М Теория поля — М: Наука, 1973.
12. Перина Я. Когерентность света — М· Мир, 1974.
13 Цитович В Н — УФН, 1966, **89**, с 89
14. Бункин Ф. В, Казаков А Е, Федоров М В — УФН, 1972, **107** (4), с 559.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 18 сентября 1981 г.

A GENERAL METHOD FOR SOLUTION OF SELF-CONSISTENT EQUATIONS OF MOTION AND MAXWELL EQUATIONS

Yu. G. Pavlenko

Based on Hamiltonian formalism the theory of disturbance has been developed for the solution of a system of field equations and relativistic equations of motion An algorithm has been found which permits to obtain time evolution of any experimentally varied value due to interaction of particles and the field The results is presented in the form of a series each member of which is connected with the corresponding spontaneous and induced process Effects of the first order are considered when a particle moves in the waveguide,