ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 537.86

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОЛИТОНА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ф. Г. Басс, Ю. А. Синицын

На примере уравнения Sine—Gordon в борновском приближении рассмотрено распространение одномерного солитона через слой трехмерных случайных неоднородностей. Исследована структура и корреляционные функции собственной моды солитона-резонатора, а также полей, распространяющихся в обе стороны от солитона при прохождении неоднородного слоя.

Исследование распространения волн в случайных средах представляет собой значительный раздел радиофизики [1]. К настоящему времени подавляющее большинство авторов рассматривает распространение линейных волн, а также нелинейное взаимодействие волновых пакетов в среде с неоднородностями.

В последние годы был достигнут существенный прогресс в построении теории волн в нелинейных однородных средах с дисперсией, где фундаментальным является понятие солитона — уединенной волны [2].

В реальных физических системах — плазме, твердом теле, гидродинамике — нелинейные волны, как правило, распространяются на фоне неоднородностей. Поэтому возникает задача описания прохождения солитонов в случайно-неоднородной среде, что и является предметом данной работы.

В линейной теории весьма распространенным является борновское приближение, которое позволяет рассмотреть довольно широкий круг явлений в случае малых неоднородностей. В данной работе мы также ограничимся рассмотрением солитонов в случайно-неоднородной среде в рамках борновского приближения.

В линейной системе рассеяния поле определяется свойствами среды. В нелинейном случае имеет место самовоздействие, т. е. солитон изменяет параметры среды, так что вид решения первого приближения существенно зависит от характеристик нелинейной волны. В частности, поля, возникающие при распространении видеоимпульса в турбулентной системе [3] и солитона в случайно-неоднородной среде, имеют различный вид, несмотря на то, что формы падающих волн, вообще говоря, могут совпадать.

Влияние регулярных неоднородностей на динамику солитона рассматривалось в работе [4]. В работе [5] исследованы статистические характеристики джозефсоновского вихря в случайном потенциале. В [6] на примере уравнения Кортевега—де Вриза—Бюргерса рассмотрено распространение солитона на фоне шумовых источников.

В [7] рассмотрены статистические эффекты при распространении простой звуковой волны в турбулентной среде.

В данной работе рассмотрение проведено на примере уравнения Sine—Gordon, описывающего нелинейные волны во многих физических системах — ток в джозефсоновских контактах, движение дислокаций в кристаллах, электромагнитное поле в полупроводниках со сверхрешеткой и т. д. Результаты работы могут быть легко обобщены и на другие типы уравнений.

В первом разделе получены общие решения уравнений, описывающие в борновском приближении распространение солитона в среде с трехмерными случайными неоднородностями. Во второй части рассмотрена структура и корреляционная функция поля, локализованного в области солитона (собственная мода солитона-резонатора) в предельных случаях крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностей. В третьем разделе приведены характеристики излучения быстрого солитона в сплошном спектре. Характеристики волны, возбуждаемой солитоном в пространственно-неоднородной среде, могут быть использованы для диагностики нелинейных волн.

1. Рассмотрим распространение нелинейной уединенной волны при наличии трехмерных случайных неоднородностей на примере уравнения Sine—Gordon:

$$\Delta u - [1 + \varepsilon(x, y, z)]\, u_{tt} = \sin u, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x, y, z)$ описывает наличие неоднородностей (функция ε отлична от нуля при $0 \leqslant x \leqslant L$).

Поскольку $|\varepsilon(x, y, z)| \ll 1$, воспользуемся методом возмущений, взяв в качестве нулевого приближения одномерный солитон. В отсутствие неоднородностей решение уравнения (1), соответствующее уединенной волне, имеет, как известно [2], вид

$$\begin{gathered} u^{(0)}(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \exp [\lambda (x - vt)], \\ \lambda = (1 - v^2)^{-1/2}, \end{gathered} \tag{2}$$

где скорость распространения солитона v будет в дальнейшем считаться меньше единицы (случай, когда $v > 1$, может быть рассмотрен аналогично).

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, y, z, t) = u^{(0)}(x, t) + u^{(1)}(x, y, z, t). \tag{3}$$

Уравнение первого приближения имеет вид

$$\Delta u^{(1)} - u^{(1)}_{tt} - u^{(1)} \cos u^{(0)} = \varepsilon(x, y, z)\, u^{(0)}_{tt}. \tag{4}$$

Совершая далее преобразование Фурье по поперечным координатам (y и z) и вводя новые переменные

$$\begin{gathered} \xi = x, \\ \tilde{\eta} = x - vt, \end{gathered} \tag{5}$$

приведем уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi\, \partial \tilde{\eta}} + (1 - v^2)\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \tilde{\eta}^2} - (q^2 + \cos u^{(0)})\, u^{(1)} = v^2 \varepsilon(\xi, q)\, u^{(0)}_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}}, \tag{6}$$

где q — поперечный волновой вектор.

Далее перейдем к компонентам Фурье по ξ и представим функцию $u^{(1)}(\varkappa, \tilde{\eta}, q)$ (где $\varkappa$ — волновой вектор в направлении ξ) в виде

$$u^{(1)}(\varkappa, \tilde{\eta}, q) = U(\varkappa, \tilde{\eta}, q) \exp(- i\lambda^2 \varkappa \tilde{\eta}). \tag{7}$$

При этом для амплитуды $U(\varkappa, \tilde{\eta}, q)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\hat{L}U \equiv d^2U/d\eta^2 + \{\lambda^2 v^2 \varkappa^2 - q^2 - 1 + 2\mathrm{ch}^{-2}\eta\}\, U = \lambda^2 v^2 \varepsilon(\varkappa, q)\, u^{(0)}_{\eta\eta}\, e^{i\lambda\varkappa\eta}, \tag{8}$$

где $\eta = \lambda\tilde{\eta}$.

Решение уравнения (8) удобно искать в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{L}$, стоящего в левой части (8). $\hat{L}$ представляет собой оператор Штурма—Лиувилля с потенциалом $\mathrm{ch}^{-2}\eta$. Спектр такого оператора, как известно [8], состоит из дискретного уровня

$$\Lambda_1 = -\lambda^2 v^2 \varkappa^2 + q^2, \tag{9}$$

соответствующего отрицательному значению «энергии». В области положительных «энергий» спектр непрерывный. Дискретному уровню отвечает собственная функция, имеющая максимум в центре солитона и экспоненциально убывающая вдали от солитона. Решение уравнения (8), соответствующее дискретному уровню, описывает возбуждение собственной моды резонатора-солитона, проходящего через слой неоднородности. Решение, отвечающее непрерывному спектру, соответствует излучению солитоном волны.

Начальные условия для локализованного решения $u_d^{(1)}$ выбираются таким образом, чтобы до попадания солитона в область неоднородности поле первого приближения было равно нулю. При этом локализованная часть возмущения имеет вид

$$u_d^{(1)}(\xi, \eta, q) = \frac{\lambda^2 v^2}{\varkappa_0^2}\,\frac{1}{\mathrm{ch}\,\eta}\int\limits_0^L d\xi'\varepsilon(\xi', q)\int\limits_0^\infty d\eta_1\,\frac{\mathrm{th}\,[\eta_1 + \eta - (\xi - \xi')/\lambda]}{\mathrm{ch}^2\,[\eta_1 + \eta - (\xi - \xi')/\lambda]}\sin\varkappa_0\lambda\eta_1, \tag{10}$$

где $\varkappa_0 = q/\lambda v$.

Для решения, соответствующего сплошному спектру, должно выполняться условие излучения. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_c^{(1)}(\xi, \eta, q) = &-\lambda^2 v^2 \int\limits_{-(1/v)\sqrt{q^2+1}}^{(1/v)\sqrt{q^2+1}}{}' d\varkappa\,\frac{1}{W}\,e^{i\varkappa\xi}\varepsilon(\varkappa, q)\,\times \\ &\times\int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta'\,u^{(0)}_{\eta'\eta'}\,e^{i\lambda\varkappa(\eta'-\eta)}\,[U_2(\eta')\,U_1(\eta) - U_1(\eta')\,U_2(\eta)] - \\ &-\lambda^2 v^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}{}' d\varkappa\,\frac{1}{W}\,e^{i\varkappa\xi}\varepsilon(\varkappa, q)\left\{\left[\int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' u^{(0)}_{\eta'\eta'}\,e^{i\lambda\varkappa\eta'}U_2(\eta') + c_1\right]U_1(\eta)\,e^{-i\lambda\varkappa\eta} - \right. \\ &\left. - \left[\int\limits_{-\infty}^{\eta} d\eta' u^{(0)}_{\eta'\eta'}e^{i\lambda\varkappa\eta'}U_1(\eta') + c_2\right]U_2(\eta)\,e^{-i\lambda\varkappa\eta}\right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где
$$\int\limits_{-(1/v)\sqrt{q^2+1}}^{(1/v)\sqrt{q^2+1}}{}' d\varkappa\ldots = \int\limits_{-(1/v)\sqrt{q^2+1}}^{-(1/\lambda v)\sqrt{q^2+1}} d\varkappa\ldots + \int\limits_{(1/\lambda v)\sqrt{q^2+1}}^{(1/v)\sqrt{q^2+1}} d\varkappa\ldots,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}{}' d\varkappa\ldots = \int\limits_{-\infty}^{-(1/v)\sqrt{q^2+1}} d\varkappa\ldots + \int\limits_{(1/v)\sqrt{q^2+1}}^{\infty} d\varkappa\ldots,$$

$$U_1(\eta) = \mathrm{ch}^2\eta F\left[\frac{1}{2}(2+i\mu),\ \frac{1}{2}(2-i\mu),\ \frac{1}{2},\ -\mathrm{sh}^2\eta\right],$$

$$U_2(\eta) = \mathrm{ch}^2\eta\,\mathrm{sh}\,\eta F\left[\frac{1}{2}(3+i\mu),\ \frac{1}{2}(3-i\mu),\ \frac{3}{2},\ -\mathrm{sh}^2\eta\right],$$

$$\mu^2 = \lambda^2 v^2 \varkappa^2 - q^2 - 1, \qquad W = U_{1\eta}U_2 - U_{2\eta}U_1,$$

$F[\ldots]$ — гипергеометрическая функция.

При $\varkappa < 0$ $c_2 = -c_1(B_1/B_2)$,

$$c_1 = \frac{A_2B_2}{A_2B_1 + A_1B_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta u_{\eta\eta}^{(0)} e^{i\lambda\varkappa\eta}U_1(\eta) - \frac{A_1B_2}{A_2B_1 + A_1B_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta u_{\eta\eta}^{(0)} e^{i\lambda\varkappa\eta}U_2(\eta).$$

При $\varkappa > 0$ $c_2 = -c_1(A_1/A_2)$,

$$c_1 = \frac{A_2B_2}{A_2B_1 + A_1B_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta u_{\eta\eta}^{(0)} e^{i\lambda\eta\varkappa}U_1(\eta) - \frac{A_2B_1}{A_2B_1 + A_1B_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta u_{\eta\eta}^{(0)} e^{\lambda\varkappa\eta}U_2(\eta),$$

$$A_1 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\Gamma(-i\mu)\,e^{i\mu\ln 2}}{\Gamma(1-i\mu/2)\,\Gamma(-1/2-i\mu/2)}\right.,$$

$$A_2 = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\Gamma(-i\mu)\,e^{i\mu\ln 2}}{\Gamma(1-i\mu/2)\,\Gamma(-i\mu/2)},$$

$$B_1 = A_1^*, \qquad B_2 = A_2^*;$$

звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Полное решение уравнения (6), описывающее в борновском приближении распространение солитона через слой со случайными неоднородностями, таким образом, имеет вид

$$u^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q) = u_d^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q) + u_c^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q).$$

Дальнейшее изучение структуры поля, возбуждаемого солитоном, при прохождении неоднородного слоя удобно производить отдельно для дискретного уровня и для непрерывного спектра.

2. Рассмотрим поле, локализованное в области солитона. В случае, когда неоднородности являются одномерными, так что в поперечном направлении слой однороден (т. е. $\varepsilon(\xi,\ q) = \varepsilon(\xi)\,\delta(q)$), из (10) получаем

$$u_d^{(1)}(\xi,\ \eta) = \int u_d^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q)\,dq = \frac{1}{2}\lambda^3 v^2 \frac{1}{\mathrm{ch}\,\eta}\int\limits_0^L d\xi'\varepsilon(\xi')\left\{1 - \mathrm{th}\left[\eta - \frac{1}{\lambda}(\xi - \xi')\right]\right\}. \tag{12}$$

В частности, если масштаб продольных неоднородностей больше размера солитона, то выражение для локализованного поля упрощается:

$$u_d^{(1)}(\xi,\ \eta) \approx \lambda^3 v^2 \frac{1}{\mathrm{ch}\,\eta}\int\limits_0^{\xi_0} d\xi'\varepsilon(\xi'), \tag{13}$$

где $\xi_0 = \min\{L,\ |\xi - \lambda\eta|\}$.

В другом предельном случае, когда поперечные неоднородности являются мелкомасштабными ($\varkappa_0 \to \infty$), из выражения (10), интегрируя по η_1 по частям, получаем

$$u_d^{(1)}(\xi, \eta, q) \approx \frac{\lambda v^2}{\varkappa_0^2} \frac{1}{\operatorname{ch}\eta} \int_0^L d\xi' \varepsilon(\xi', q) \frac{\operatorname{th}(\eta - (\xi - \xi')/\lambda)}{\operatorname{ch}^2(\eta - (\xi - \xi')/\lambda)} + O\left(\frac{1}{\varkappa_0^2}\right). \quad (14)$$

Таким образом, амплитуда локализованного поля в случае мелкомасштабных (по сравнению с размером солитона) поперечных неоднородностей прямо пропорциональна квадрату размера неоднородностей.

Если неоднородности в продольном направлении велики по сравнению с размером солитона, то внутри слоя из (14) имеем

$$u_d^{(1)}(\xi, \eta, q) \approx \frac{1}{2} \frac{\lambda v^2}{\varkappa_0^2} \frac{1}{\operatorname{ch}\eta} \varepsilon(\xi - \lambda\eta, q) \left\{\operatorname{th}^2\left(\eta - \frac{\xi - L}{\lambda}\right) - \operatorname{th}^2\left(\eta - \frac{\xi}{\lambda}\right)\right\},$$
$$0 < \xi - \lambda\eta < L. \quad (15)$$

Из выражения (15) видно, что поле вблизи центра солитона (при $\eta = 0$) при движении солитона изменяется различным образом в зависимости от соотношения между размером солитона и шириной слоя L. Если слой существенно шире солитона, то внутри слоя (т. е. при $0 < \xi < L$) амплитуда поля экспоненциально мала. В этом случае поле достигает экстремальных значений вблизи границ слоя, где оно равно

$$u_d^{(1)}(0, 0, q) \approx (1/2)(\lambda v^2/\varkappa_0^2)\, \varepsilon(0, q) \operatorname{th}^2(L/\lambda),$$

$$u_d^{(1)}(L, 0, q) \approx -(1/2)(\lambda v^2/\varkappa_0^2)\, \varepsilon(L, q) \operatorname{th}^2(L/\lambda).$$

Представляет интерес рассмотреть асимптотическое поведение $u_d^{(1)}(\xi, \eta, q)$ вдали от пространственно-неоднородного слоя. Ограничимся случаем $\eta = 0$.

Поскольку $\xi \gg L$, в выражении (10) можно пренебречь величиной ξ' по сравнению с ξ, после чего, интегрируя по η_1 при $\xi \to \infty$, получаем

$$u_d^{(1)}(\xi, 0, q) \approx \frac{\pi}{2} \lambda^2 v^2 \frac{(1 - \varkappa_0^2\lambda^2)\cos\varkappa_0\xi}{\varkappa_0 \operatorname{ch}(\pi\varkappa_0\lambda/2)} \int_0^L d\xi' \varepsilon(\xi', q). \quad (16)$$

Таким образом, величина локализованного поля вдали от пространственно-неоднородного слоя определяется соотношением между размером солитона и масштабом поперечных неоднородностей, экспоненциально убывая при $\varkappa_0\lambda \gg 1$.

Корреляционная функция локализованного поля имеет вид

$$\langle u_d^{(1)}(\xi, \eta, q) u_d^{(1)}(\xi', \eta', q)\rangle = \frac{\lambda^4 v^4}{\varkappa_0^4} \frac{1}{\operatorname{ch}\eta \operatorname{ch}\eta'} \int_0^L d\xi_1 \int_0^L d\xi_2 K(\xi_1 - \xi_2, q) \times$$
$$\times \int_0^\infty d\eta_1 \frac{\operatorname{th}[\eta_1 + \eta - (\xi - \xi_1)/\lambda]}{\operatorname{ch}^2[\eta_1 + \eta - (\xi - \xi_1)/\lambda]} \sin\varkappa_0\lambda\eta_1 \int_0^\infty d\eta_2 \frac{\operatorname{th}[\eta_2 + \eta' - (\xi' - \xi_2)/\lambda]}{\operatorname{ch}^2[\eta_2 + \eta' - (\xi' - \xi_2)/\lambda]} \sin\varkappa_0\lambda\eta_2, \quad (17)$$

где $K(\xi_1 - \xi_2, q) = \langle \varepsilon(\xi_1, q)\, \varepsilon^*(\xi_2, q)\rangle$.

Для случая мелкомасштабных поперечных неоднородностей получаем

$$\langle u_d^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q)\, u_d^{(1)}(\xi',\ \eta',\ q)\rangle = \frac{\lambda^4 v^4}{\varkappa_0^4}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\eta\operatorname{ch}\eta'}\int_0^L d\xi_1 \times$$
$$\times \int_0^L d\xi_2 K(\xi_1-\xi_2,\ q)\,\frac{\operatorname{th}[\eta-(\xi-\xi_1)/\lambda]}{\operatorname{ch}^2[\eta-(\xi-\xi_1)/\lambda]}\,\frac{\operatorname{th}[\eta'-(\xi'-\xi_2)/\lambda]}{\operatorname{ch}^2[\eta'-(\xi'-\xi_2)/\lambda]}. \quad (18)$$

Если случайные неоднородности в продольном направлении являются δ-коррелированными, так что

$$K(\xi_1-\xi_2,\ q) = \sigma_\varepsilon^2(q)\,\delta(\xi_1-\xi_2),$$

то выражение для корреляционной функции приводится к виду

$$\langle u_d^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q)\, u_d^{(1)}(\xi',\ \eta',\ q)\rangle = \lambda^2 v^2 \varkappa_0^{-4}\operatorname{ch}^{-1}\eta\operatorname{ch}^{-1}\eta' \times$$
$$\times\ \sigma_\varepsilon^2(q)\,[I_1(L/\lambda-a_1,\ a_2)-I_1(-a_1,\ a_2)], \quad (19)$$

где

$$I_1(x,\ a_2) = \frac{1}{4}\lambda\frac{\partial}{\partial a^2}\,\frac{\operatorname{th}^2 x}{\operatorname{th}^2 a_2} - \lambda\frac{\partial}{\partial a_2}\,\frac{\operatorname{th} a_2}{\operatorname{sh}^2 a_2}\operatorname{th} x + \lambda\frac{\partial}{\partial a_2}\,\frac{1+2\operatorname{ch}^2 a_2}{2\operatorname{sh}^4 a_2}\times$$
$$\times \ln(1+\operatorname{th} a_2\operatorname{th} x) + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial a_2}(1+\operatorname{th} x\operatorname{th} a_2)^{-1}\operatorname{sh}^{-4}a_2, \quad (20)$$

$$a_1 = -\xi/\lambda+\eta_1+\eta, \quad a_2 = -(\xi-\xi')/\lambda+(\eta_2-\eta_1)+(\eta'-\eta).$$

Если продольные неоднородности имеют размеры существенно большие, чем размер солитона, то корреляционная функция локализованного поля будет пропорциональна корреляционной функции неоднородностей.

В заключение данного раздела приведем выражение для локализованного поля в случае, когда спектр неоднородностей в поперечном направлении также является широким. При этом

$$u_d^{(1)}(\xi,\ \eta,\ r) = \frac{1}{2\pi}\lambda^3 v^4\int dr'\int_0^L d\xi'\varepsilon(\xi',\ r')\times$$
$$\times \int_{v|r-r'|}^{\infty} d\eta' u_{\eta'\eta'}^{(0)}\left[\eta'+\eta-\frac{1}{\lambda}(\xi-\xi')\right]\{\eta'^2-v^2|r-r'|^2\}^{-1/2}, \quad (21)$$
$$r = (y,\ z).$$

3. Общее выражение для корреляционной функции сплошного спектра может быть получено из выражения для поля $u_c^{(1)}(\xi,\ \eta,\ q)$ (11). Ввиду громоздкости здесь оно приводиться не будет.

Рассмотрим предельный случай распространения быстрого солитона ($\lambda \gg 1$) в среде с одномерными неоднородностями. При этом в соответствии с (11) при прохождении солитоном области неоднородности в обе стороны от него будут распространяться волны, соответствующие непрерывному спектру, так что вдали от солитона поле в этом случае будет иметь вид

$$u_c^{(1)}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\lambda v\int_0^L d\xi'\varepsilon(\xi')\,u_\eta^{(0)}\left[\eta-\frac{\xi-\xi'}{\lambda(1+v)}\right]\theta(\xi-\xi')-$$
$$-\frac{1}{2}\lambda v\int_0^L d\xi'\varepsilon(\xi')\,u_\eta^{(0)}\left[\eta-\frac{\xi-\xi'}{\lambda(1-v)}\right]\theta(\xi'-\xi), \qquad (22)$$
$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

Здесь первое слагаемое описывает волну, распространяющуюся впереди солитона, а второе — волну, бегущую в противоположном направлении. При этом, как и ранее, предполагается, что ε мало, так что рассмотренное приближение справедливо.

Корреляционная функция для полей, «обгоняющих» солитон, имеет вид

$$\langle u_c^{(1)}(\xi,\eta)\,u_c^{(1)}(\xi',\eta')\rangle=\frac{1}{4}\lambda^2v^2\int_0^L d\xi_1\int_0^L d\xi_2K(\xi_1-\xi_2)\times$$
$$\times u_\eta^{(0)}\left[\eta-\frac{\xi-\xi_1}{\lambda(1+v)}\right]u_{\eta'}^{(0)}\left[\eta'-\frac{\xi'-\xi_2}{\lambda(1+v)}\right]\theta(\xi-\xi_1)\,\theta(\xi'-\xi_2). \qquad (23)$$

В случае крупномасштабных пространственных неоднородностей из (23) получаем

$$\langle u_c^{(1)}(\xi,\eta)\,u_c^{(1)}(\xi',\eta')\rangle\approx\lambda^3v^2(1+v)\,K\,[(\xi-\xi')-\lambda(1+v)(\eta-\eta')]\times$$
$$\times\left[\operatorname{arctg}\exp\left(\frac{\xi_0}{\lambda(1+v)}\right)-\frac{\pi}{4}\right]\left[\operatorname{arctg}\exp\left(\frac{\xi_0'}{\lambda(1+v)}\right)-\frac{\pi}{4}\right], \qquad (24)$$

где $\xi_0=\min\{\xi,L\}$, $\quad\xi_0'=\min\{\xi',L\}$.

В случае мелкомасштабных продольных неоднородностей получаем в приближении δ-коррелированных неоднородностей

$$\langle u_c^{(1)}(\xi,\eta)\,u_c^{(1)}(\xi',\eta')\rangle=\lambda^3v^2(1+v)\,\sigma_\varepsilon^2\frac{1}{\operatorname{sh}b}\left\{I_2\left(l+\frac{b}{2}\right)-I_2\left(a+\frac{b}{2}\right)\right\}, \qquad (25)$$

где

$$I_2(x)=\ln\frac{1+\operatorname{ch}b+\operatorname{sh}b\operatorname{th}x}{1+\operatorname{ch}b-\operatorname{sh}b\operatorname{th}x},\qquad l=\eta-\frac{\xi-\tilde\xi}{\lambda(1+v)},$$

$$a=\eta-\frac{\xi}{\lambda(1+v)},\qquad b=(\eta'-\eta)-\frac{\xi'-\xi}{\lambda(1+v)},\qquad \tilde\xi=\min\{\xi,\xi',L\}.$$

Корреляционная функция для полей, распространяющихся в разные стороны от солитона, равна

$$\langle u_c^{(1)}(\xi,\eta)\,u_c^{(1)}(\xi',\eta')\rangle=\frac{1}{4}\lambda^2v^2\int_0^L d\xi_1\int_0^L d\xi_2\,K(\xi_1-\xi_2)\times$$
$$\times u_\eta^{(0)}\left[\eta-\frac{\xi-\xi_1}{\lambda(1+v)}\right]u_{\eta'}^{(0)}\left[\eta'-\frac{\xi'-\xi_2}{\lambda(1-v)}\right]\theta(\xi-\xi_1)\,\theta(\xi_2-\xi'). \qquad (26)$$

Корреляционная функция для полей, распространяющихся в противоположную сторону от солитона, получается из (23), (24) при замене знака у скорости v.

Как видно из приведенных выражений, поле, соответствующее непрерывному излучению, определяется как параметром солитона — его скоростью, так и свойствами рассеивающей среды. Поэтому, если известна корреляционная функция неоднородностей, то по излученному полю можно получить характеристики солитона. Как видно из выражения (22), в случае если ширина слоя неоднородностей мала по сравнению с размером солитона, то продолжительность всплесков поля $u_c^{(1)}$ пропорциональна размеру солитона.

Если параметры невозмущенного солитона известны, то может быть решена обратная задача — определение статистических характеристик рассеивающей среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
2. Теория солитонов. Метод обратной задачи./Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
3. Гурбатов С. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И. — Акуст. журн., 1981, 27, с. 618.
4. Fogel M. B., Trullinger S. E., Bishop A. R., Krumansl J. A.—Phys. Rev., 1977, B15, p. 1578.
5. Минеев М. Б., Фейгельсон М. В., Шмидт В. В.— ЖЭТФ, 1981, 81, с. 290.
6. Меерсон Б. И. Тезисы VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн.— М.: ИРЭ АН СССР, 1981, с. 126.
7. Малахов А. Н., Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е. Препринт НИРФИ № 85, Горький, 1976.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1963.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
16 декабря 1981 г.

PROPAGATION OF A SOLITON IN RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

F. G. Bass, Yu. A. Sinitsyn

By an example of Sine — Gordon equation in the Born approximation, propagation of one-dimensional soliton through the layer of three-dimensional random inhomogeneities is considered. The structure and correlation functions of the soliton-resonator eigenmode are considered as well as fields propagating in both directions from the soliton when passing the inhomogeneous layer.