ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 11 РАДИОФИЗИКА 1982

УДК 621.372

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ АМБАРЦУМЯНА К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОТЯЖЕННЫХ СВЕТОВОДОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. Х. Захар-Иткин

Предложена методика статистических экспериментов на коротких отрезках световода для нахождения коэффициентов в отношениях, связывающих распределение вероятностей рассеянной световодом мощности по модам с распределением вероятностей по возбуждающим световод модам.

Изучая отражение света от мутной (случайно-неоднородной) среды, В. А. Амбарцумян ввел принцип инвариантности, утверждающий неизменность свойств коэффициента отражения света при изменениях толщины мутного слоя. Этот результат [1] относился к межзвездной среде, недоступной для непосредственного исследования вероятностного закона неоднородностей, и был установлен без использования динамических уравнений рассеяния света мутной средой. Предложенный подход можно охарактеризовать так. Нет необходимости рассматривать случайные значения интенсивности света в мутной среде, достаточно начинать анализ с определения вероятностей* отражения и преломления света тонким слоем мутной среды и в этих же терминах получать результаты для сколь угодно протяженной случайно-неоднородной среды.

Случайные неоднородности волоконного световода — это вариации показателя преломления, шероховатость стенок, искривления оси и контура волокна. Они не поддаются непосредственному измерению и статистическому исследованию, поэтому невозможно найти достоверно распределение вероятностей случайных неоднородностей световода. К этому примеру мутной среды, отличающейся многомодовым характером распространения волн, целесообразно применить подход и идеи [1].

1. Основные вероятностные задачи о рассеянии на неоднородностях световода. Световедущее волокно — это диэлектрический волновод, чьи поперечные размеры намного превосходят длину электромагнитных волн оптического диапазона. Вдоль такого волокна распространяются с малым затуханием сотни и тысячи мод, которые интенсивно обмениваются мощностью на неоднородностях световода. В результате возникает случайное распределение передаваемой мощности по модам световода, которое будем характеризовать вероятностями $v_i^+(x)$ и $v_i^-(x)$ ее случайного прохождения сквозь сечение в прямом (+) и обратном (—) направлениях по моде i. Число n мод световода может быть конечным или бесконечным. Полный набор вероятностей дают векторы

* Заметим, что в работе Амбарцумяна [1] рассуждения ведутся в терминах интенсивности света и коэффициента отражения света по интенсивности от слоя среды и не используются какие-либо вероятностные понятия.— Прим. ред. — Ю. Н Барабаненкова.

$$V^+(x)=\begin{pmatrix} v_1^+(x)\\ v_2^+(x)\\ \vdots\\ v_n^+(x)\end{pmatrix},\quad V^-(x)=\begin{pmatrix} v_1^-(x)\\ v_2^-(x)\\ \vdots\\ v_n^-(x)\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Этот подход отличается от традиционного, состоящего в задании случайных амплитуд распространяющихся волн как решений стохастических уравнений с последующим переходом к уравнениям для вероятностных распределений, осуществляемым в рамках диффузионного приближения. На этом пути неизбежно принятие ограничительных упрощающих предположений, см. [2]. Не делая этих предположений, в том числе главного из них о δ-корреляции неоднородностей световода, мы не можем пользоваться обычным* методом анализа стохастических уравнений световода.

В работе не привлекается также методика [3], основанная на уравнениях для усредненных мощностей связанных мод прямого направления, так как способ [3] вывода этих уравнений не претендует на корректность.

Разрабатываемый в статье подход основан на постулировании вероятностных векторов (1), что подсказано корпускулярной концепцией в оптике (скорее ньютоновой, чем квантомеханической). Феноменологическое рассмотрение света как потока корпускул, позволяющее вывести основные формулы и соотношения работы, нуждается в дальнейшем обосновании.

Возвращаясь к (1), отметим неудобство этой пары вероятностных векторов, не удовлетворяющий принципу причинности при рассмотрении световода в любом направлении оси x. Действительно, $V^-(x)$ зависит от более «правого» значения $V^-(x+\Delta x)$, а $V^+(x)$ зависит от более «левого» значения $V^+(x-\Delta x)$, так что при $x<\chi$ затруднительно иметь дело с уравнениями, связывающими пару $V^+(x)$, $V^-(x)$ с парой $V^+(\chi)$, $V^-(\chi)$. Принцип причинности будет соблюден, если все варианты рассеяния мощности отрезком световода, представляемые парой векторов $V^-(x)$, $V^+(\chi)$, будут выражены через векторы вероятностей $V^+(x)$, $V^-(\chi)$, представляющие все варианты случайного возбуждения отрезка (x, χ) световода модами обоих направлений.

При реализации излагаемого подхода следующие вероятностные задачи служат базой исследования радиотехнических параметров линий.

Первая задача относится к отрезку световода малой длины Δx и ставится так: при заданном вероятностном распределении $V^+(x)$, $V^-(x+\Delta x)$ мощности по возбуждающим отрезок $(x, x+\Delta x)$ модам найти вероятностное распределение $V^-(x)$, $V^+(x+\Delta x)$ рассеянной отрезком мощности по всем модам световода.

Вторая задача аналогично ставится для протяженного световода длины l: по заданным вероятностям $V^+(0)$, $V^-(l)$ возбуждения световода падающими на него модами найти распределение вероятностей $V^-(0)$, $V^+(l)$ отражения и пропускания мощности по всем модам и направлениям.

2. Дифференциальные уравнения для вероятностей рассеяния мощности. Решение поставленных задач получается в терминах введенных

* При δ-корреляции неоднородностей световода диффузионное приближение дает точный результат Однако диффузионное приближение является также асимптотически точным, если случайные неоднородности световода не δ-коррелированы, обладают свойством достаточно быстрого ослабления корреляций по длине световода и малы по абсолютной величине См. по этому поводу, например, статью R. Burridge and G. Papanicolaou. Communications on pure and applied mathematics, 1972, v. 25, № 6, p. 715—757.— Прим ред.

в [4] $n \times n$-матриц условных вероятностей $p(x, \chi)$, $P(x, \chi)$, $Q(x, \chi)$, $q(x, \chi)$, которые удовлетворяют соотношение

$$\begin{pmatrix} V^+(\chi) \\ V^-(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x, \chi) & Q(x, \chi) \\ q(x, \chi) & P(x, \chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^+(x) \\ V^-(\chi) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \chi \leqslant l. \tag{2}$$

Из (2) ясен физический и вероятностный смысл этих матриц. Именно, элемент q_{ij} матрицы q имеет смысл условной вероятности отражения мощности по i-й моде при условии, что возбуждение световода производилось j-й модой; элемент p_{ij} матрицы p имеет смысл условной вероятности прохождения мощности по i-й моде при условии, что на другом конце отрезка световода возбуждение производилось модой j. Соотношение (2) исчерпывающим образом характеризует случайные преобразования мощности на любом отрезке (x, χ) статистически-неоднородного световода. В частности, при $\chi = x + \Delta x$ получается решение первой задачи и при $x=0$, $\chi=l$ получается решение второй.

Принципиальное значение имеет следующее свойство матриц условных вероятностей (2): если $\begin{pmatrix} p_1 & Q_1 \\ q_1 & P_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p_2 & Q_2 \\ q_2 & P_2 \end{pmatrix}$ — вероятностные матрицы двух примыкающих отрезков световода, то для суммарного отрезка световода соответствующая матрица условных вероятностей имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_2(E - Q_1 q_2)^{-1} p_1 & Q_2 + p_2 Q_1 (E - q_2 Q_1)^{-1} P_2 \\ q_1 + P_1 q_2 (E - Q_1 q_2)^{-1} p_1 & P_1 (E - q_2 Q_1)^{-1} P_2 \end{pmatrix}.$$

Заданный этой формулой закон композиции вероятностных матриц совпадает с законом, по которому волновая матрица рассеяния суммарного отрезка световода строится из волновых матриц рассеяния каждого из примыкающих отрезков световода.

Поскольку закон изменения вдоль оси неоднородного многомодового волновода для вероятностных матриц-функций $p(x, \chi)$, $P(x, \chi)$, $Q(x, \chi)$, $q(x, \chi)$ тот же, что для элементов волновых матриц рассеяния, постольку дифференциальные уравнения для вероятностных матриц-функций записываются так же, как дифференциальные уравнения для элементов волновых матриц рассеяния. Эти последние уравнения хорошо известны, так что для матриц-функций p, P, Q, q (2) справедливы следующие дифференциальные уравнения*:

$$-\partial q(x, \chi)/\partial x = \lambda(x) + M(x) q(x, \chi) + q(x, \chi) \mu(x) + q(x, \chi) \times$$
$$\times \Lambda(x) q(x, \chi), \quad q(\chi, \chi) = 0; \tag{3а}$$

$$-\partial p(x, \chi)/\partial x = p(x, \chi)[\mu(x) + \Lambda(x) q(x, \chi)], \quad p(\chi, \chi) = E; \tag{3б}$$

$$-\partial P(x, \chi)/\partial x = [M(x) + q(x, \chi)\Lambda(x)] P(x, \chi), \quad P(\chi, \chi) = E; \tag{3в}$$

$$-\partial Q(x, \chi)/\partial x = p(x, \chi) \Lambda(x) P(x, \chi), \quad Q(\chi, \chi) = 0. \tag{3г}$$

В этой системе ключевую роль играет матричное дифференциальное уравнение Риккати (3а), через решение $q(x, \chi)$ которого выражаются коэффициенты остальных уравнений дифференциальной системы (3).

Вместо нелинейной системы (3) можно получить линейную систему дифференциальных уравнений, если вместо матрицы (2) условных вероятностей рассеяния волн рассматривать матрицы условных вероятностей передачи волн обоих направлений отрезком (x, χ) световода:

---

* Система уравнений (3) приводится в обзоре [4] Упомянутый закон композиции волновых матриц рассеяния формулируется в другом обзоре (УМН, 1973, т. 28, № 3, с. 83—120), где в сжатом и ясном виде перечислены аналитические свойства решений матричного уравнения Риккати.— Прим. ред.

$$\begin{pmatrix} V^+(\chi) \\ V^-(\chi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x, \chi) & \Psi(x, \chi) \\ \psi(x, \chi) & \Phi(x, \chi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^+(x) \\ V^-(x) \end{pmatrix}.$$

Припасовывание отрезков световода учитывается перемножением вероятностных матриц передачи этих отрезков, так что для матриц-функций φ, Ψ, ψ, Φ получается линейная система дифференциальных уравнений, правда, не удовлетворяющая принципу причинности, см. выше*.

3. Определение статистических характеристик рассеяния по экспериментам на коротких секциях световода. Решение второй вероятностной задачи, описывающее отражение и прохождение света по модам протяженного световода со случайными неоднородностями, сведено к вычислению по (3) матриц условных вероятностей p, P, Q, q, что не составляет трудностей при известных коэффициентах λ, M, μ, Λ системы (3). Эти матрицы не будут зависеть от x, если все секции световода изготовляются и монтируются по единой технологии, так что могут рассматриваться как случайные представители единого вероятностного ансамбля с неизвестной нам статистикой.

Эту статистику желательно определять не приближенными аналитическими методами, а экспериментально, причем желательно проводить эксперименты на коротких отрезках световода. При таком экспериментальном решении первой из поставленных вероятностных задач получается исходный материал для вычисления коэффициентов системы (3) с помощью формулы [4]

$$\begin{pmatrix} \mu & \Lambda \\ \lambda & M \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \chi} \begin{pmatrix} p(0, \chi) & Q(0, \chi) \\ q(0, \chi) & P(0, \chi) \end{pmatrix}, \quad \chi \to 0, \tag{4}$$

где в правой части стоят под знаком производной матрицы условных вероятностей (2), найденные экспериментально для короткой секции $(0, \chi)$.

Ставятся опыты возбуждения этой секции в точке $x=0$ j-й модой и измеряются распределения мощности по модам как для прошедших, так и для отраженных волн. Опыты повторяются для представительной выборки секций световода, имеющих длину χ, после чего производится статистическая обработка полученных распределений мощности по модам. Получаются j-е столбцы матриц $p(0, \chi)$ и $q(0, \chi)$. Принимая $j=1, 2, \ldots, n$, получим все элементы матрицы, стоящей в (4) под знаком производной.

Существенно, что при этом не делается никаких априорных предположений ни о вероятностном законе случайных неоднородностей, ни об амплитуде неоднородностей, ни даже об их типе: то ли это вариация коэффициента преломления, то ли шероховатость стенок, то ли искривления оси и контура поперечного сечения, то ли все типы неоднородностей вместе.

Этот экспериментальный способ нахождения статистических характеристик световода не предполагает ни δ-корреляции, ни особой плавности случайных неоднородностей, он не предусматривает привлечение упрощенных и приближенных формул метода возмущений для параметров.

---

* Линейная система уравнений для матриц передачи φ, Ψ, ψ, Φ говорит о том, что подход автора эквивалентен некоторой линейной теории переноса излучения для существенно многомодовых световодов с вероятностной интерпретацией ее величин и с учетом отражения волн от неоднородностей световода. При этом нелинейные уравнения (3) для матриц рассеяния (2) получаются из линейных уравнений для матриц передачи при заданных граничных условиях на концах свотовода.— Прим. ред.

4. Асимптотическая формула для вероятностного распределения мощности по прямым и обратным модам протяженного световода. Рассматриваем протяженный световод длины l, возбужденный на левом конце, $V^-(l)=0$. Из (2) следует: $V^-(0)=q(0, l)V^+(0)$, где $q(0, l)$ — матрица условных вероятностей отражений. Система (3) характеризует эту матрицу как решение уравнения Риккати, дробно-линейным образом зависящее от своего граничного значения. Это дробно-линейное преобразование — сжимающее, что устанавливается методикой [4] для световода с поглощением и высвечиванием. Как следствие этого, все частные решения уравнения Риккати (3а), различающиеся своими граничными значениями в конечной точке, стягиваются к одному и тому же значению $q(0, l)\to q_\infty$, когда $l\to\infty$.

Получаем $V^-(0)=q_\infty V^+(0)$ при $l\to\infty$, где q_∞ решает нелинейное уравнение

$$\lambda + Mq_\infty + q_\infty\mu + q_\infty\Lambda q_\infty = 0, \tag{5}$$

получающееся из (3а) при $q(x, \chi)\equiv \mathrm{const}=q_\infty$. Для слабоотражающего световода матрица q_∞ мала поэлементно, так что в (5) можно пренебречь квадратичным членом и получить явную формулу для решения:

$$\mathbf{q}_\infty = -(M\otimes E + E\otimes\mu')^{-1}\,\boldsymbol{\lambda}. \tag{6}$$

Здесь вектор означает развертывание $n\times n$-матрицы по строкам в n^2-вектор, штрих—знак транспозиции матрицы, E — единичная матрица, $\otimes$ — знак кронекеровского перемножения [5]. Формулируем полученный результат.

При возбуждении любой моды статистически-неоднородного световода для отраженной мощности получается асимптотически стационарное вероятностное распределение по модам, независимое от длины световода и представляемое соответствующим столбцом матрицы q_∞ (6).

Это утверждение является обобщением принципа инвариантности Амбарцумяна [1], и уравнение (5) аналогично построенному в [1] нелинейному уравнению, обобщая его на многоволновые задачи.

Рассмотрим теперь вероятности прохождения мощности сквозь световод длины l, которые характеризуются j-м столбцом матрицы $p(0, l)$, если на входе световода возбуждается j-я мода. В соответствии с принципом инвариантности $q(x, \chi)\equiv q_\infty$, так что асимптотически постоянен коэффициент $\mu+\Lambda q_\infty$ уравнения (3б). Полученное уравнение

$$-\frac{\partial p(x, l)}{\partial x} = p(x, l)(\mu + \Lambda q_\infty) \tag{7}$$

решается явно относительно матрицы условных вероятностей прохождения мощности сквозь световод:

$$p(0, l) = \exp[-(\mu + \Lambda q_\infty)\,l]. \tag{8}$$

Поскольку вследствие поглощения и высвечивания уменьшается с ростом l вероятность прохождения мощности сквозь световод, постольку положительны все собственные числа матрицы $\mu+\Lambda q_\infty$. Пусть 2α — минимальное из них и $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — соответствующий собственный вектор [5].

При $l\to\infty$ получаем вместо (8)

$$p(0, l) = \Xi e^{-2\alpha l}, \tag{9}$$

причем столбцы матрицы Ξ получаются из вектора ξ умножением на число, зависящее от номера столбца и характеризующее добавочные потери передаваемой мощности из-за неблагоприятного модового состава при одномодовом возбуждении. Наиболее благоприятный модовый состав источника характеризуется распределением возбуждаемой мощности по модам, пропорциональным элементам ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n вектора ξ. Этот модовый состав не изменится при передаче вдоль световода, а мощность любой из мод уменьшится в $e^{2\alpha l}$ раз, см. (9).

5. Погонное затухание интенсивности волны в световоде. В матрице $\mu+\Lambda q_\infty$ (8), играющей роль погонного затухания мощности в многомодовом неоднородном световоде, второе слагаемое учитывает потери и взаимопреобразования мод, вызванные отражениями волн, а первое слагаемое учитывает потери и взаимопреобразования волн, вызванные преломлением на неоднородностях световода.

Добавочные потери из-за отражений обычно в световодах невелики, из чего не следует, однако, допустимость полного пренебрежения отраженными волнами: такое пренебрежение может резко изменить статистическую модель взаимопреобразования мод и даже привести к нефизическим результатам. Пример содержится в [6], где из динамических уравнений для случайных амплитуд волн прямого направления выведены при ряде дополнительных предположений вероятностные уравнения типа (7), однако из-за полного неучета отражений получилось $q_\infty=0$.

Полученная в [6] матрица μ симметрична (вероятность перехода мощности из i-й моды в j-ю равнялась вероятности обратного перехода), а при этом получающееся вместо (9) предельное распределение вероятности оказалось равномерным по всем модам при конечном n и несуществующим при бесконечном числе мод.

Этот парадокс снимается при учете отраженных волн, когда $\Lambda q_\infty \neq 0$. Эта поправка к матрице μ нарушает ее симметрию и приводит к неравномерному предельному распределению мощности по модам, задаваемому вектором ξ независимо от того, конечно или бесконечно число n мод световода.

При определении наименьшего собственного числа 2α матрицы $\mu+\Lambda q_\infty$ просуммированы все виды потерь световода: отражения волн, поглощение в стекловолокне и высвечивание наружу.. Полученный параметр 2α имеет физический смысл погонного затухания интенсивности света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В. А — ДАН СССР, 1943, **38,** № 8, с. 257.
2. Кляцкин В. И, Татарский В. И.— УФН, 1973, **110,** вып. 4, с. 499.
3. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides — New Jork—London: Academic Press, 1974.
4. Захар-Иткин М. Х.— Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21,** № 1, с. 5.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1969.
6. Тутубалин В. Н.— Радиотехника и электроника, 1975, **20,** № 5, с. 914.

Всесоюзный научно-исследовательский институт электроэнергетики

Поступила в редакцию 23 января 1980 г., после переработки 29 апреля 1982 г.

APPLICATION OF THE AMBARTSUMYAN INVARIANT PRINCIPLE IN THE STUDY OF EXTENDED RANDOM-INHOMOGENEOUS LIGHT GUIDES

M. Kh. Zakhar-Itkin

An approach using statistical experiments is suggested for short segments of a light guide to predict the behaviour of long light guides The approach is designed to find the initially unknown factors in ratios governing the probability distribution of the scattered light power over modes as a function of the same item for the exciting modes