ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXV, № 11 *РАДИОФИЗИКА* *1982*

Литовская Советская Социалистическая Республика

УДК 621.382 3

САМОФОКУСИРОВКА И САМОМОДУЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОВОДНИКЕ СО СВЕРХРЕШЕТКОЙ

А. П. Тетервов

Рассматривается распространение нелинейных электромагнитных волн в токовой плазме полупроводника со сверхрешеткой. Найдены условия и определены характерные длины самофокусировки и самоканализации нелинейной волны, распространяющейся в малой окрестности штарковского резонанса. Исследована самомодуляция одномерных нелинейных волн; показано, что исходные уравнения допускают решения в виде стационарных солитонов.

Явлениям самофокусировки (СФ) и самомодуляции (СМ) электромагнитных волн посвящено значительное количество работ (см., в частности, [1–3]), в которых, как правило, нелинейность среды полагалась слабой. Это позволяло разложить диэлектрическую проницаемость в ряд Тейлора и удержать первый—квадратичный по полю волны—член, что соответствует приближению кубично-нелинейной среды.

Вместе с тем могут представиться ситуации, когда уже в сравнительно слабых электромагнитных полях проявляются более сильные нелинейности и указанным приближением ограничиться нельзя. В применении к полупроводниковой плазме впервые на это обстоятельство было указано в работе [4], где исследовалось явление СФ за счет разогрева электронного газа полем волны*.

Сходная ситуация может иметь место в полупроводнике со сверхрешеткой, поскольку неквадратичность спектра электронов в нем приводит к существенной нелинейности ВЧ тока. Наиболее интересным в этом смысле является случай, когда к такому полупроводнику вдоль периода сверхрешетки приложено сильное постоянное электрическое поле E_0, такое, что выполняется условие l-го штарковского резонанса $l\omega=\Omega \gg \nu$. Здесь ω — частота электромагнитной волны, $\Omega=eE_0d$ — штарковская частота (d — период сверхрешетки, $\hbar=1$) и ν — частота релаксации импульса электрона. При этом, как показано в работе [6], в выражении для высокочастотного тока проводимости основную роль играет резонансное слагаемое с показателем степени нелинейности, равным $2l-1$. Иными словами, при $l>2$ нелинейность среды оказывается выше кубической.

Существенно также, что из-за специфики выражения нелинейного тока проводимости даже в случае распространения в полупроводнике со сверхрешеткой (ПСР) сильной электромагнитной волны нелинейность среды оказывается слабой. Это позволяет искать решения исходных уравнений и в таком, представляющем несомненный интерес случае.

Итак, целью данной работы является исследование нелинейных волновых процессов, обусловленных указанными особенностями среды.

* Следует отметить, что в последнее время появился целый ряд экспериментальных работ, посвященных исследованию явлений самофокусировки в полупроводниках (см [5] и приведенную там библиографию).

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть электрическое поле волны $E \parallel E_0$ направлено вдоль периода одномерной сверхрешетки параллельно $0z$. Решение волнового уравнения следует искать в виде

$$E(\boldsymbol{r},\ t) = (1/2)\{\Psi(\boldsymbol{r},\ t)\exp[i(kx - \omega t)] + \text{к.с.}\}, \qquad (1)$$

где k — волновой вектор, $\Psi = A(\boldsymbol{r},\ t)\exp[ikS(\boldsymbol{r},\ t)]$, A и S — медленно меняющиеся в пространстве и времени амплитуда и нелинейный эйконал волны.

Стандартными методами (см. [1, 2]) можно получить нелинейное параболическое уравнение для комплексной амплитуды:

$$\Delta_{\perp}\Psi + 2ik\left(\Psi_x + \frac{1}{v_{\text{гр}}}\Psi_t\right) + \frac{kv'_{\text{гр}}}{v_{\text{гр}}}\Psi_{xx} + \frac{4\pi i\omega}{c^2} j_1 \exp(ikS) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $v_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость волны, $v'_{\text{гр}} = \partial^2\omega/\partial k^2$, j_1 — основная гармоника тока проводимости, нижний индекс у Ψ означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Для ПСР в постоянном электрическом поле величина j_1 вычислялась в [6, 7]: $j_1 = j_{\text{st}}(R + iQ)$, где $j_{\text{st}} = \sigma_0 \nu/ed$, σ_0 — линейная статическая проводимость вдоль оси сверхрешетки [8],

$$R(a) = \nu a^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} nJ_n^2(a)\left[\frac{n\omega - \Omega}{(n\omega - \Omega)^2 + \nu^2} + \frac{n\omega + \Omega}{(n\omega + \Omega)^2 + \nu^2}\right]; \qquad (3а)$$

$$Q(a) = -\frac{\nu^2}{2}\left\{(\Omega^2 + \nu^2)^{-1}\frac{dJ_0^2(a)}{da} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{dJ_n^2(a)}{da}\left[\frac{1}{(n\omega - \Omega)^2 + \nu^2} + \frac{1}{(n\omega + \Omega)^2 + \nu^2}\right]\right\}. \qquad (3б)$$

Здесь $J_n(a)$ — функция Бесселя n-го порядка с аргументом $a = edA/\omega$. Величина $R(a)$ играет роль диссипативного затухания нелинейной волны.

В работе [6] было показано, что в широком интервале значений поля E_0 слабозатухающие нелинейные волны не существуют и распространение их носит резонансный характер. Условие их распространения может быть представлено в виде неравенства

$$|l\omega - \Omega| \ll \nu, \qquad l = 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (4)$$

при выполнении которого с затуханием нелинейной волны можно не считаться.

Необходимо также сделать следующее замечание. Как отмечалось в [6], предположение о слабой нелинейности среды справедливо в двух предельных случаях:

а) концентрация электронов проводимости большая, но амплитуда поля волны мала;

б) концентрация их достаточно мала, так что — хотя амплитуда волны может принимать произвольные значения — ток проводимости в целом мал и трактуется как возмущение. При этом номер штарковского резонанса в принципе может быть любым.

В первом случае решение уравнения (2) в виде нелинейной стационарной волны оказывается устойчивым относительно малых возмущений, т. е. в достаточно плотной плазме ПСР в постоянном электрическом поле СФ (СМ) нелинейных волн не происходит.

В разреженной же плазме ПСР ситуация иная. В этом случае в нулевом приближении током проводимости можно вообще пренебречь и спектр электромагнитных колебаний определяется током смещения:

$$(ck/\omega)^2 = \varkappa(\omega) = \varkappa_0 - \omega_1^2/(\omega^2 - \omega_2^2). \tag{5}$$

Здесь $\varkappa_0$ — диэлектрическая постоянная решетки, которая рассматривается как набор осцилляторов с силой ω_1^2 и собственной частотой ω_2. Влияние тока проводимости учитывается в следующем приближении, вызывая медленное изменение констант, определяющих монохроматическую волну.

Пусть параболическое уравнение (2) в пренебрежении затуханием имеет решение, отвечающее плоской волне с амплитудой A_0 и нелинейным эйконалом S_0. Линеаризуя (2) относительно малых возмущений, пропорциональных $\exp[i(\boldsymbol{\lambda r} - \delta t)]$, можно получить

$$\delta = \lambda_\parallel v_{\text{гр}} \pm \frac{v'_{\text{гр}}}{2}(\lambda_\parallel^2 + \alpha\lambda_\perp^2)\,[1 + g^2(\lambda_\parallel^2 + \alpha\lambda_\perp^2)^{-1}]^{1/2}, \tag{6}$$

где $\lambda_\parallel$ и $\lambda_\perp$ — продольная и поперечная составляющие волнового вектора возмущения, $\alpha = v_{\text{гр}}/k\,v'_{\text{гр}}$, $g^2 = (\omega_0/c)^2\alpha a_0 d/da[Q(a)/a]\,|_{a=a_0}$, $a_0 = edA_0/\omega$, $\omega_0 = (4\pi edj_{\text{st}})^{1/2}$ — обобщенная плазменная частота.

Тогда, как известно [2], при $\alpha < 0$ и $g^2 < 0$ (аналог критерия Лайтхилла) решение неустойчиво относительно продольных возмущений, что приводит к СМ исходной волны. При $\alpha < 0$ и $g^2 > 0$ в результате неустойчивости относительно поперечных возмущений происходит СФ нелинейной волны.

Используя (5), можно показать, что

$$\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \begin{cases} \varkappa_0, & \omega \gg \omega_2 \\ [-(\varkappa(\omega)/3)(\omega_2/\omega)^4], & \omega \ll \omega_2 \end{cases}. \tag{7}$$

Следовательно, СФ (СМ) нелинейной волны в ПСР может произойти только в области низких частот. Используя свойства функций Бесселя [9], результаты вычисления величины $\Gamma = \alpha^{-1}(cg/\omega_0)^2$ в малой окрестности l-го штарковского резонанса (условие (4)) можно представить в виде следующей таблицы. Случай $\Gamma > 0$ соответствует СМ, а $\Gamma < 0$ — СФ электромагнитной волны. Так, для слабой электромагнитной волны, распространяющейся вблизи основного резонанса $\omega = \Omega \ll \omega_2$, происходит СМ, а на высших резонансах — ее СФ. При немалых амплитудах волны имеются чередующиеся полосы значений a_0, соответствующие ее СФ (СМ).

Таблица

$a_0 \ll 1$	$a_0 \gg 1$
a_0^2, $l = 1$	$(-1)^l \times$
$-\dfrac{2}{l!(l-2)!}(a_0/2)^{2(l-1)}$, $l > 1$	$\times\, 8\sin 2a_0/\pi a_0$

2. СТАЦИОНАРНАЯ САМОФОКУСИРОВКА

Полагая аналогично [1–3], что изменение комплексной амплитуды в направлении распространения волнового пучка происходит более медленно, нежели в поперечном, и пренебрегая затуханием, уравнение (2) после отделения вещественной и мнимой частей можно представить в виде

$$a_x + a_r S_r + (1/2)\,a\Delta_\perp S = 0; \tag{8a}$$

$$2S_x + (S_r)^2 = \Delta_\perp a/k^2a - (\omega_0/ck)^2 Q(a)/a. \tag{8б}$$

Здесь $\Delta_\perp = \partial^2/\partial r^2 + (m/r)\partial/\partial r$; для двумерного пучка $m=0$, $r=z$, а для трехмерного $m=1$, $r=\sqrt{y^2+z^2}$. Первое слагаемое в правой части уравнения эйконала (8б) описывает дифракционную расходимость пучка, а второе — силу нелинейной рефракции.

При малых значениях амплитуды, как нетрудно показать, разложение силы нелинейной рефракции в ряд по степеням a содержит три типа слагаемых. Во-первых, не зависящие от a и которые можно внести в определение эйконала; во-вторых, резонансные слагаемые и, в-третьих, нерезонансные члены, которые, как оказывается, входят в разложение умноженными на $(\nu/\Omega)^2 \ll 1$. Пренебрегая последними (соответствующий критерий будет приведен ниже) и полагая условие (4) выполненным, можно записать

$$\frac{Q(a)}{a} \approx -\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^2 \frac{l^2 - 2(l-1)^2}{(l-1)^2} + \frac{1}{l!(l-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2(l-1)}\right\}. \tag{9}$$

Видно, что при $l=2$ система уравнений (8) совпадает с выведенной в [1–3] для кубично-нелинейной среды и все результаты этих работ могут быть перенесены на наш случай. Вместе с тем, при $l > 2$ в среде проявляются высшие нелинейности и схему расчета следует видоизменить.

Введем функцию $u = (a/2)^{l-1}$, в результате чего систему (8) можно представить в виде

$$(u^2)_x + (u^2)_r \tilde{S}_r + (l-1)u^2 \Delta_\perp \tilde{S} = 0; \tag{10а}$$

$$2\tilde{S}_x + (\tilde{S}_r)^2 = \left\{\Delta_\perp u^2 - \frac{2l-3}{l-1}\frac{[(u^2)_r]^2}{2u^2}\right\} \times$$
$$\times [2(l-1)k^2u^2]^{-1} + p^2u^2, \tag{10б}$$

где

$$\tilde{S} = S + (\nu\omega_0/2ck\Omega)^2\left[1 - \frac{2l^2}{(l-1)^2}\right], \quad p^2 = (\omega_0/2ck)^2[l!(l-1)!]^{-1}.$$

Удобство такой трансформации очевидно: несмотря на появление в силе дифракции дополнительного нелинейного слагаемого, последний член в уравнении (10б) квадратичен по переопределенной амплитуде. По этой причине благодаря такому преобразованию среду можно рассматривать как «эффективно кубичную».

Из теории самофокусировки [1, 3] известно, что большое значение для описания ее имеет безаберрационное приближение, в рамках которого интенсивность волнового пучка и эйконал меняются по закону

$$A^2(r, x) = A_0^2 f^{-(m+1)}(x)\exp[-2r^2/D^2f^2(x)] \quad (m = 0,1) \tag{11}$$

и соответственно

$$S(r, x) = (r^2/2)\beta(x) + \varphi(x). \tag{12}$$

Здесь $\beta(x)$ — кривизна волнового фронта пучка, изменяющаяся по мере распространения в нелинейной среде, $\varphi(x)$ — набег фазы на оси пучка, D — начальная и $f(x)$ — безразмерная ширина пучка, связанная с его кривизной соотношением

$$f_x = \beta f. \tag{13}$$

Таким образом, задача о СФ волнового пучка в нелинейной среде в безаберрационном приближении сводится к определению функции $f(x)$.

Из-за физической прозрачности и изящества результатов, полученных в рамках такого приближения, заманчиво найти преобразование, позволяющее искать решения нелинейной системы уравнений (10) в виде, аналогичном (11), (12).

Можно показать, что такое преобразование заключается в замене в выражении (11) $A \to u$ и $m+1 \to M+1=(m+1)(l-1)$ и тем самым позволяет перенести результаты [1, 3] на случай высших (слабых!) нелинейностей.

Здесь необходима следующая оговорка. В работе [1] (см. также [5]) исследовалось влияние на характер СФ эффекта насыщения поляризации. Это соответствует тому, что в разложении диэлектрической проницаемости в ряд по полю волны удерживается не только квадратичное слагаемое, но и слагаемое уже четвертого порядка, т. е. степень нелинейности повышается.

Существенное отличие данной работы от [1] состоит в том, что здесь, во-первых, степень нелинейности задается номером штарковского резонанса и, во-вторых, путем подбора внешних условий эту нелинейность можно сделать доминирующей.

Выполняя выкладки, аналогичные проделанным в [1], можно прийти к следующему нелинейному уравнению для ширины волнового пучка:

$$f_{xx} = -f^{-(M+2)}/R_{NL}^2 + f^{-3}/R_D^2, \tag{14}$$

где величина $R_{NL}=D/\sqrt{2}pu_0$ характеризует силу нелинейной рефракции (заметим, что в кубично-нелинейной среде R_{NL} есть длина СФ), а $R_D=kD^2/2$ — дифракционная длина волнового пучка.

Для пучка с плоским начальным фронтом $f(0)=1$, $f_x(0)=0$ первый интеграл уравнения (14) имеет вид

$$(f_\xi)^2 = (f^{-(M+1)}-1) - \gamma^2(f^{-2}-1) = \Phi(f), \tag{15}$$

где $\xi = xR_{NL}^{-1}\,[2/(M+1)]^{1/2}$, $\gamma^2=[(M+1)/2]\,(R_{NL}/R_D)^2$. Уравнение (15) имеет решение в квадратурах

$$\xi = \pm\int_1^f df\,\Phi^{-1/2}(f). \tag{16}$$

Если f с ростом ξ возрастает, то в (16) следует выбрать знак плюс, если убывает — минус. Очевидно также, что в силу вещественности f подкоренное выражение должно быть неотрицательно для всех f, имеющих физический смысл, т. е. $\Phi(f) \geqslant 0$.

Решение уравнения (15) в явном виде может быть найдено только при некоторых определенных значениях показателя $(M+1)$ (см., например, [10]).

Тем не менее, уже из качественных соображений можно установить характер протекающих нелинейных процессов.

Поведение волнового пучка определяется положением действительных корней уравнения

$$\Phi(f)=0. \tag{17}$$

Из определения (15) следует, что, во-первых, $f=1$ является корнем этого уравнения и, во-вторых, функция $\Phi(f)$ в точке $f_0=[(M+1)/2\gamma^2]^{1/(M-1)}$ имеет минимум. Очевидно, что при $\gamma^2 \ll 1$ корень $f=1$ является единственным. Тогда, как нетрудно видеть, функция $f(\xi)$

может только убывать (так как при $f > 1$ $\Phi(f) < 0$). Это соответствует самофокусировке волнового пучка, причем — как следует из (16) — в начальной стадии СФ ($f \leqslant 1$) ширина его определяется выражением

$$f(\xi) \approx 1 - (\xi^2/2)((M+1)/2 - \gamma^2). \tag{18}$$

При $\gamma^2 > 1$ уравнение (17) имеет еще один вещественный корень f^*, больший единицы при $f_0 > 1$ и меньший единицы, если $f_0 < 1$. Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, можно заключить, что при $f^* > 1$ пучок самофокусируется, а при $f^* < 1$ — расплывается из-за дифракции; при $|f - 1| \ll 1$ ширина пучка задается формулой (18).

Таким образом, в среде с нелинейностью, выше кубичной, результат конкуренции между нелинейной рефракцией и дифракцией определяется величиной соотношения $(m+1)(l-1)/2\gamma^2$.

Из (16) и (18) следует (в этой связи см. [11]), что если корень $f=1$ является кратным, т. е. $\Phi(1) = \Phi_f(1) = 0$, то пучок при распространении в нелинейной среде сохраняет свою начальную ширину. Это означает формирование волнового канала (самоканализацию волны) [1, 3] при условии

$$\gamma^2 = (M+1)/2 > 1^* \tag{19}$$

(т. е. $R_{NL} = R_D$), являющемся обобщением известного в теории СФ условия $\gamma^2 = 1$.

Что касается СФ сильной электромагнитной волны, то — как видно — соответствующий критерий силы ее $a \gg 1$ в окрестности l-го штарковского резонанса означает, что поле волны должно удовлетворять неравенству

$$E \gg l^{-1} E_0, \tag{20}$$

которое реально выполнимо только при достаточно больших значениях l.

Подстановка в (8б) асимптотики функций Бесселя приводит в данном случае к сложному нелинейному уравнению эйконала ,решить которое в общем виде не представляется возможным. Однако качественно характер решения уравнений СФ можно установить следующим образом.

Положим в уравнении (6) $\delta = 0$ (стационарная СФ) и пренебрежем — согласно сказанному в начале этого раздела — $\lambda_{\|}^2$ по сравнению с $\lambda_{\perp}^2$. Тогда для $\Lambda = i\lambda_{\|}$ следует

$$\Lambda = \pm (\lambda_{\perp}/2k) \left[-1 - (\omega_0/ck)^2 a_0 \frac{d}{da} (Q/a)\Big|_{a=a_0} \right]^{1/2}, \tag{21}$$

где $a_0 \approx (l + 2s + 1)\pi/2$, $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ — корень уравнения

$$J_l(a) = 0. \tag{22}$$

Используя свойства функций Бесселя, можно записать

$$\Lambda \approx \pm (\lambda_{\perp}^2/2k) [2(\omega_0/ck)^2 (\pi a_0)^{-1} - 1]^{1/2}. \tag{23}$$

Ясно, что при $1 < a_0 < 2/\pi(\omega_0/c\lambda_{\perp})^2$ решение параболического уравнения, соответствующее $\Lambda > 0$, неустойчиво относительно поперечных возмущений. Максимальный инкремент Λ_{max} определяется оптимальным масштабом поперечной модуляции волны

$$(\lambda_{\perp\,ext})^{-1} = (\pi a_0)^{1/2} (c'\omega_0) \tag{24}$$

* Отметим, что в кубично-нелинейной среде при условии $\gamma^2 > 1$ волновой пучок расплывается.

и равен

$$\Lambda_{\max} = (\omega_0/c)^2 (2\pi k a_0)^{-1}. \tag{25}$$

Обратная величина инкремента $\Lambda_{\max}^{-1}$ характеризует порядок длины самофокусировки. Существенно, что в этом случае она пропорциональна a_0, т. е. определяется дискретными значениями амплитуды, совпадающими с корнями функции Бесселя с индексом, равным номеру резонанса.

Условие самоканализации волнового пучка, как следует из (23), соответствует $\Lambda = 0$.

Номер резонанса и значение корня a_0 должны удовлетворять условию $(-1)^l \sin 2a_0 < 0$, как было показано в разд. 1.

3. САМОМОДУЛЯЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Уравнение, описывающее самомодуляцию нелинейной волны, получается из (2), если в последнем пренебречь производными по поперечным координатам. В пренебрежении затуханием систему нелинейных уравнений для безразмерной амплитуды и эйконала можно представить в виде

$$a_\tau + a_\zeta S_\zeta + (a/2) S_{\zeta\zeta} = 0; \tag{26а}$$

$$2S_\tau + (S_\zeta)^2 = a_{\zeta\zeta}/k^2 a + Q(a)/a. \tag{26б}$$

Здесь введены новые переменные $\zeta = |\alpha|^{1/2}(x - v_{\text{гр}}t)(\omega_0/2ck)$, $\tau = -v_{\text{гр}}t(\omega_0/2ck)^2$ и учтено, что СМ волны происходит при $\alpha < 0$.

Выше уже отмечалось, что при малых значениях амплитуды только при распространении волны в окрестности основного штарковского резонанса возможна ее СМ. Удерживая в выражении (3б) резонансное слагаемое с $n = 1$, можно заключить, что в этом случае среда является кубично-нелинейной. Соответственно система (26) математически эквивалентна уравнениям, описывающим самофокусировку двумерного пучка в такой среде [1]. Это является отражением того факта, что СМ нелинейной волны можно трактовать как ее временну́ю СФ. Используя указанную аналогию, можно сразу записать величины пространственных масштабов [1]:

$$R_D^{(\zeta)} = \frac{k|\alpha|}{2}(v_{\text{гр}}T_{\text{и}})^2, \quad R_{NL}^{(\tau)} = \frac{v_{\text{гр}}T_{\text{и}}}{p a^{(0)}}(|\alpha|/2)^{1/2}, \tag{27}$$

где $R_D^{(\zeta)}$ — длина, на которой в линейной среде происходит существенное расплывание импульса длительностью $T_{\text{и}}$, $R_{NL}^{(\tau)}$ — длина СМ волны, $a^{(0)}$ — значение амплитуды на входе в нелинейную среду. При $R_D^{(\zeta)} = R_{NL}^{(\tau)}$ волна сохраняет свою форму (аналог образования волноводного канала в теории СФ).

Рассмотрим СМ нелинейных стационарных волн, для чего введем переменную $\eta = \zeta - W\tau$. Скорость стационарной волны W определяется из дополнительных (граничных) условий. Из уравнения (26а) следует

$$S_\eta = W + C_1/a^2(\eta), \tag{28}$$

где C_1 — константа интегрирования. Подставляя это выражение в уравнение (26б), стандартными методами можно получить его решение в квадратурах:

$$k\eta = \pm \int\limits_{a(0)}^{a(\eta)} da\, [C_2 - W^2 a^2 - C_1^4 a^{-2} - F(a)]^{-1/2}, \tag{29}$$

где C_2 — константа, $F(a)=2\int da Q(a) \approx -J_l^2(a)$ в случае l-го штарковского резонанса. При $a \ll 1$, как отмечалось, $l=1$ и решение (29) выражается через эллиптические функции. В частном случае $C_1=C_2=0$ (при этом $S = W\eta + \text{const}$) решение принимает вид

$$a(\eta) = 2\sqrt{1-4W^2}\,\text{sech}\,[\sqrt{1-4W^2}(k\eta/2)]. \tag{30}$$

Решение уравнения (29) может быть найдено и при немалых значениях амплитуды. Аналогично [6] для этого надо воспользоваться асимптотикой функции Бесселя и потребовать выполнения условия $|a(\eta)-a(0)| \ll a(0)$ $(a(0) > 1)$, тогда (29) принимает вид

$$k\eta = \pm \int_{a(0)}^{a} da \left\{ C[a(0), C_1, C_2, W] + 2\cos^2\left[a - \frac{\pi}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)\right] \Big/ \pi a(0) \right\}^{-1/2}, \tag{31}$$

где C — константа.

Полученное выражение имеет вид эллиптического интеграла первого рода, обращая который можно найти решение в виде периодических волн. В частности, при $C=0$ и $a(0) = \frac{\pi}{2}\left(l+\frac{3}{2}\right)$ решение имеет **вид** уединенного перепада, или кинк-солитона:

$$a(\eta) = \frac{\pi}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right) + 2\,\text{arctg}\,\{\exp[\sqrt{2/\pi a(0)}\,k\eta]\}. \tag{32}$$

Номер резонанса должен, естественно, удовлетворять условиям, при которых возможна СМ волны (см. таблицу).

Отметим также, что при действии на полупроводник со СР также и ВЧ поля с произвольной амплитудой E^0 и частотой $\omega^0 \gg \Omega$, ω, ωa выражения (3) для тока проводимости умножаются, как это показано в [6], на $J_0^2(eE^0 d/\omega^0)$. Следовательно, подбирая значения E^0 и ω^0, можно ток проводимости вообще обратить в нуль. Это означает, что для любого значения амплитуды поля волны среда вообще будет являться линейной.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исходное условие малости тока проводимости по сравнению с током смещения сводится, как можно показать из определения, к неравенству

$$\varkappa_0 \gg \frac{4\pi\sigma_0\nu}{\omega^2}\,\frac{|Q(a)-iR(a)|}{a} \approx \frac{4\pi e^2 d^2 N\varepsilon_0}{\omega^2}\,\frac{|Q-iR|}{a}, \tag{33}$$

где N — концентрация электронов, ε_0 — ширина минизоны проводимости. При малых значениях амплитуды волны достаточно в первой части (33) удержать только линейные по a слагаемые в разложении величин $R(a)$ и $Q(a)$; тогда соответствующее условие имеет вид

$$\varepsilon_0 \ll \varkappa_0 E_0^2/\pi N. \tag{33a}$$

(При $a \gg 1$ неравенство (33) преобразуется к виду $\varepsilon_0 \ll \varkappa_0 E_0^2 a^2/4Nl^2$ и заведомо выполняется.)

Обращаясь к выражению (3б), можно показать, что при $a \ll 1$ условие доминирования нелинейности с порядком $(2l-1)$ $(l>2)$ — иными словами, проявления l-го штарковского резонанса — имеет вид

$$(a/2)^{l-1} > l!\sqrt{\nu|\Omega - l\omega|/(l-1)\Omega^2}. \tag{34}$$

Последнее неравенство выполнимо лишь при достаточно малой расстройке резонанса и в сильном электрическом поле. Величина последнего, в свою очередь, ограничена неравенством

$$E_0 \ll \varepsilon_0/ed, \tag{35}$$

соответствующим квазиклассическому приближению, в рамках которого вычислялся высокочастотный ток проводимости.

Для характерных параметров сверхрешетки $\varkappa_0 \sim 10$, $d=2\cdot 10^{-6}$ *см*, $\varepsilon_0 = 5\cdot 10^{-2}$ *эВ*, $\nu \approx 10^{11}$ c^{-1} условие (35) выполняется при значениях напряженности поля $E_0 \lesssim 3$ *кВ/см* (что соответствует $\Omega \approx 10^{13}$ c^{-1}), а неравенство (33а) — для концентрации электронов $N \lesssim 10^{15}$ $см^{-3}$.

В заключение автор благодарит Ф. Г. Басса и А. Ю. Матулиса за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.— ЖЭТФ, 1966, **50**, вып. 6, с 1537.
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
3. Литвак А. Г.— В сб.: Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1980, вып. 10, с. 164
4. Басс Ф. Г., Погребняк В. А — ФТТ, 1973, **15**, № 7, с. 2126.
5 Борщ А. А., Бродин М. С., Крупа Н. Н.— ЖЭТФ, 1976, **70**, вып. 5, с. 1805; Квантовая электроника, 1977, **4**, № 9, с. 1959.
6. Басс Ф. Г., Лыках В. А., Тетервов А. П.— ФТП, 1982, **16**, № 5, с. 865.
7. Романов Ю. А — Оптика и спектроскопия, 1972, **33**, вып. 5, с. 917.
8. Шик А. Я — ФТП, 1974, **8**, № 10, с. 1841.
9 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1966, т. 2
10. Голдстейн Классическая механика.— М: Наука, 1975, с. 86.
11. Басс Ф. Г., Гуревич Ю. Г. Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда.— М.: Наука, 1975.

Институт физики полупроводников
АН ЛитССР

Поступила в редакцию
1 июня 1982 г.

SELF-FOCUSING AND SELF-COMPRESSION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE SEMICONDUCTOR WITH A SUPERLATTICE

A. P. Tetervov

The propagation of the non-linear electromagnetic waves in the current plasma of the semiconductor with a superlattice is considered. The conditions and characteristic lengthes of self-focusing and self-channeling of the non-linear wave, propagating in the small region of Stark resonance are found It is shown that in the case of the non-linear one-dimensional wave self-compression there exist the solutions in the form of solitary waves.