3. Гочелашвили К. С., Шишов В. И. — ЖЭТФ, 1974, 66, № 4, с. 1237.
4. Шишов В. И., Шишова Т. Д. — Астрон. журн., 1978, 55, № 2, с. 411.
5. Банах В. А., Миронов В. Л. — Квантовая электроника, 1975, 2, № 10, с. 2163.
6. Якушкин И. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 3, с. 384.
7. Белоусов С. И., Якушкин И. Г. — Квантовая электроника, 1980, 7, № 3, с. 530.

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию 8 декабря 1981 г.

УДК 538.56 : 519.25

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ОДНОГРУППОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г. Н. Бочков, А. А. Дубков

Для расчетов средних характеристик стохастических систем с достаточно быстрыми негауссовыми флуктуациями параметров обычно пользуются так называемым одногрупповым приближением уравнения Дайсона [1–4]. В [2, 5, 6] была проведена строгая оценка условий применимости этого приближения, не учитывавшая характера среднего движения системы. Этот недостаток был устранен, отчасти, в работе [4], где предложен способ приближенной оценки погрешности одногруппового приближения, основанный на функциональном подходе к анализу негауссовых параметрических систем. Затем в [7] была найдена строгая оценка погрешности рассматриваемого приближения для консервативной системы с параметром, флуктуирующим либо по гауссову, либо по пуассоновскому закону, отражающая отсутствие стохастической неустойчивости в системе. В настоящей заметке методом работы [4] выводится строгая оценка погрешности одногруппового приближения уравнения Дайсона для консервативной стохастической параметрической системы общего вида.

1. Будем, как и в [4], оперировать с уравнением для стохастической матрицы Грина $\mathbf{H}(t, t_0)$ параметрической системы

$$d\mathbf{H}(t, t_0)/dt = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{H}(t, t_0), \qquad \mathbf{H}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(t)$ — $N\times N$-матрица негауссовых случайных процессов (параметрических возмущений), $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Как известно, условием консервативности системы (1) является антиэрмитовость матрицы $\mathbf{A}(t) : \mathbf{A}^+(t) = -\mathbf{A}(t)$. В этом случае, в соответствии с (1), стохастическая матрица Грина $\mathbf{H}(t, t_0)$ унитарна: $\mathbf{H}^+(t, t_0)\,\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{I}$, и, следовательно, ее норма

$$\| \mathbf{H}(t, t_0) \| = 1. \tag{2}$$

Равенство (2) лежит в основе получения строгой оценки погрешности одногруппового приближения уравнения Дайсона для системы (1).

2. Разность между точным решением уравнения Дайсона для средней матрицы Грина $\langle \mathbf{H}(t, t_0) \rangle$ системы (1) и его решением в одногрупповом приближении $\langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0$ можно представить в виде (см. (П.Н.1) в [4])

$$\langle \mathbf{H}(t, t_0) \rangle - \langle \mathbf{H}(t, t_0) \rangle_0 = \int_{t_0}^{t} \langle \mathbf{H}(t, u) \rangle_0 \left[\langle \mathbf{B}(u)\,\mathbf{H}(u, t_0) \rangle - \langle \mathbf{B}(u)\,\mathbf{H}(u, t_0) \rangle_0 \right] du. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{B}(t) = \{b_{ij}(t)\}$ — флуктуационная часть матрицы $\mathbf{A}(t)$: $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t) - \langle \mathbf{A}(t) \rangle$,

$\langle \mathbf{B}(t)\,\mathbf{H}(t, t_0) \rangle_0 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Q}(t, t')\,\langle \mathbf{H}(t', t_0) \rangle\, dt'$, а $\mathbf{Q}(t, t')$ — интегральное ядро (матрица) массового оператора уравнения Дайсона в одногрупповом приближении (см. (11) в [4]). Для нормы искомой разности $\Delta(t; t_0) = \| \langle \mathbf{H}(t,t_0)\rangle - \langle \mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0 \|$ легко получить из (3) интегральное неравенство

$$\Delta(t, t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} [1 + \Delta(t, u)]\, \Delta_1(u, t_0)\, du,$$

решение которого записывается в виде ряда

$$\Delta(t, t_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t} d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^{t} d\tau_n\, \Delta_1(\tau_n, \tau_{n-1}) \ldots \Delta_1(\tau_2, \tau_1)\, \Delta_1(\tau_1, t_0). \tag{4}$$

Здесь $\Delta_1(t, t_0) = \| \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle - \langle \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t, t_0)\rangle_0 \|$.

Как показано в [4], величина $\Delta_1(t, t_0)$ может быть оценена неравенством вида

$$\Delta_1(t, t_0) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \times$$

$$\times \sum_{k_0\, l_0=1}^{N} \sum_{k_1,\, l_1=1}^{N} \ldots \sum_{k_n,\, l_n=1}^{N} |\langle b_{k_0 l_0}(t), b_{k_1 l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_n l_n}(\tau_n)\rangle| \times \tag{5}$$

$$\times \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\tau_{m+1}}^{\tau_m} \left\| \left\langle \mathbf{B}(v) \frac{\delta^{n-m}\mathbf{H}(v, t_0)}{\delta b_{k_{m+1}\, l_{m+1}}(\tau_{m+1}) \ldots \delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} \right\rangle \right\| dv \; (\tau_0 \equiv t),$$

где $\langle b_{k_0 l_0}(t), b_{k_1 l_1}(\tau_1), \ldots, b_{k_n l_n}(\tau_n)\rangle$ — кумулянтные функции совокупности случайных процессов $\{b_{ij}(t)\}$. Представляя $\mathbf{B}(t)$ через одноэлементную матрицу $\mathbf{E}(\alpha, \beta) = \{\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\}$:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{\alpha,\, \beta=1}^{N} \mathbf{E}(\alpha, \beta)\, b_{\alpha\beta}(t), \tag{6}$$

раскроем функциональное среднее в правой части неравенства (5) по обобщенной формуле Фуруцу — Новикова (см. формулу (6) в [4]):

$$\left\langle \mathbf{B}(t) \frac{\delta^{n-m}\mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_{m+1}\, l_{m+1}}(\tau_{m+1}) \ldots \delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} \right\rangle = \sum_{p=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{p-1}} dt_p \sum_{\alpha_0,\, \beta_0=1}^{N} \sum_{\alpha_1,\, \beta_1=1}^{N} \ldots \times$$

$$\times \sum_{\alpha_p,\, \beta_p=1}^{N} \langle b_{\alpha_0\beta_0}(t), b_{\alpha_1\beta_1}(t_1), \ldots, b_{\alpha_p\beta_p}(t_p)\rangle\, \mathbf{E}(\alpha_0, \beta_0) \times \tag{7}$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^{p+n-m}\mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{\alpha_1\beta_1}(t_1) \ldots \delta b_{\alpha_p\beta_p}(t_p)\, \delta b_{k_{m+1}\, l_{m+1}}(\tau_{m+1}) \ldots \delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} \right\rangle.$$

С помощью уравнения (1) и равенства (6) вариационную производную стохастической матрицы Грина системы можно выразить опять же через $\mathbf{H}(t, t_0)$ (см. [8]):

$$\delta\mathbf{H}(t, t_0)/\delta b_{ij}(\theta) = \mathbf{H}(t, \theta)\,\mathbf{E}(i, j)\,\mathbf{H}(\theta, t_0) \qquad (t_0 \leqslant \theta \leqslant t). \tag{8}$$

Используя (8) многократно, придем к

$$\frac{\delta^n \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{i_1 j_1}(\theta_1) \ldots \delta b_{i_n j_n}(\theta_n)} = \mathbf{H}(t, \theta_1)\,\mathbf{E}(i_1, j_1)\,\mathbf{H}(\theta_1, \theta_2) \ldots$$

$$\ldots \mathbf{H}(\theta_{n-1}, \theta_n)\,\mathbf{E}(i_n, j_n)\,\mathbf{H}(\theta_n, t_0) \qquad (t_0 \leqslant \theta_n \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant t). \tag{9}$$

Учитывая очевидное соотношение $\|\mathbf{E}(i, j)\| = 1$ и равенство (2), из (9) находим*

$$\left\| \frac{\delta^n \mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{i_1 j_1}(\theta_1) \ldots \delta b_{i_n j_n}(\theta_n)} \right\| = 1. \tag{10}$$

Мажорируя кумулянтные функции совокупности флуктуирующих параметров,

$$\sum_{i_1,\, j_1=1}^{N} \ldots \sum_{i_n,\, j_n=1}^{N} |\langle b_{i_1 j_1}(\theta_1), \ldots, b_{i_n j_n}(\theta_n)\rangle \leqslant K_n(\theta_1, \ldots, \theta_n) \tag{11}$$

(для любых $\theta_1, \ldots, \theta_n$), и учитывая, что $\|\langle \ldots \rangle\| \leqslant \langle \| \ldots \| \rangle$, не составляет труда оценить с помощью (7), (10) функциональное среднее в (5):

$$\left\| \left\langle \mathbf{B}(t) \frac{\delta^{n-m}\mathbf{H}(t, t_0)}{\delta b_{k_{n+1}\, l_{m+1}}(\tau_{m+1}) \ldots \delta b_{k_n l_n}(\tau_n)} \right\rangle \right\| \leqslant q(t), \tag{12}$$

* Идея об использовании представления (9) для получения строгой оценки условий применимости одногруппового приближения уравнения Дайсона принадлежит Барабаненкову и Калинину [7].

где *

$$q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t_1}dt_2\dots\int_{t'}^{t_{n-2}}dt_{n-1}K_{n+1}(t,t_1,\dots,t_{n-1},t'). \tag{13}$$

Подстановка неравенств (11), (12) в (5) дает

$$\Delta_1(t,t_0)\leqslant\int_{-\infty}^{t}du\left(\int_{u}^{t}q(v)\,dv\right)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{u}^{t}d\tau_1\int_{u}^{\tau_1}d\tau_2\dots\int_{u}^{\tau_{n-2}}d\tau_{n-1}K_{n+1}(t,\tau_1,\dots,\tau_{n-1},u). \tag{14}$$

3. Рассмотрим подробнее случай стационарной совокупности флуктуирующих параметров $\{b_{ij}(t)\}$, когда $K_{n+1}(t,t_1,\dots,t_{n-1},t')=K_{n+1}(t-t',t_1-t',\dots,t_{n-1}-t',0)$, и, следовательно, функция $q(t)$ вообще не зависит от времени t:

$$q=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}d\tau_1\int_{0}^{\tau_1}d\tau_2\dots\int_{0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n\,K_{n+1}(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n,0). \tag{15}$$

Оценка (14) при этом переходит в

$$\Delta_1(t,t_0)\leqslant\varepsilon q, \tag{16}$$

где

$$\varepsilon=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\tau_1 d\tau_1\int_{0}^{\tau_1}d\tau_2\dots\int_{0}^{\tau_{n-1}}d\tau_n K_{n+1}(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n,0). \tag{17}$$

Учитывая (16) в (4) и проводя суммирование ряда, находим

$$\|\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle-\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle_0\|\leqslant e^{\varepsilon q(t-t_0)}-1. \tag{18}$$

Как показано в [5], величина q^{-1} является некоторым характерным масштабом изменения (в данном случае — релаксации) среднего решения $\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle_0$. Поэтому, как видно из (18), одногрупповое приближение дает хорошие результаты лишь при условии (см. (П. II 8) в [4])

$$\varepsilon\ll 1, \tag{19}$$

т. е. в том случае, когда характерный временной масштаб флуктуаций параметров $b_{ij}(t)$ существенно меньше характерного масштаба изменения средних характеристик системы q^{-1} (см. (11), (15), (17)). При выполнении условия (19) на практически интересных временах наблюдения $(t-t_0)\lesssim q^{-1}$ погрешность одногруппового приближения (18), нарастая пропорционально $(t-t_0)$, остается достаточно малой**:

$$\|\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle-\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle_0\|\leqslant 2\varepsilon q(t-t_0). \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Финкельберг В.М. — ЖЭТФ, 1967, **53**, вып. 1 (7), с. 401.
2. Барабаненков Ю. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 7, с. 981.
3. Калинин М. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с. 1516.
4. Бочков Г. Н., Дубков А. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 12, с 1484.
5. Барабаненков Ю. Н, Калинин М. И. — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 3, с. 373
6. Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 4, с. 608.
7. Барабаненков Ю Н., Калинин М. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 6, с. 640.
8 Татарский В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 4, с. 570.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 10 июля 1981 г., после доработки 1 февраля 1982 г.

* Мы рассматриваем решение $\langle\mathbf{H}(t,t_0)\rangle_0$ на интервале времени $(t-t_0)\gg\theta_0$, где θ_0 — максимальный из масштабов статистической зависимости флуктуаций $\{b_{ij}(t)\}$, и предполагаем, что мажорантный ряд (13) сходится для всех t.

** Заметим, что в [4] для стохастически устойчивых параметрических систем была найдена приближенная оценка погрешности одногруппового приближения вида (20) (ср. с. (П. II. 12) в [4]). Строгая оценка вида (20) на всем интервале наблюдения была получена в [7] для гауссовой и пуассоновской моделей одного флуктуирующего параметра в консервативной системе (1).