

УДК 621.372.8

## К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

*В. А. Балакирев*

Исследован механизм возбуждения электромагнитного излучения, в основе которого лежит нелинейное взаимодействие волн плотности заряда электронного пучка, плазменной и электромагнитной волн плазменного волновода. Рассмотрены случаи, когда плазменная волна накачки распространяется как вдоль, так и навстречу пучку.

В последнее время много внимания уделяется изучению параметрических механизмов усиления и генерации электромагнитных волн в системах с релятивистскими электронными пучками [1-3]. Интерес к этому кругу вопросов обусловлен прежде всего возможностью использования таких механизмов для получения интенсивного когерентного излучения в миллиметровом и более коротковолновых диапазонах. При этом, как правило, рассмотрение ограничивалось вакуумными системами. В то же время ряд новых возможностей открывает использование для этих целей плазменных систем. Например, в плазме в качестве низкочастотной (НЧ) волны накачки можно использовать медленные продольные колебания. В этом случае частота возбуждаемого пучком излучения примерно в  $(1 + \beta_0) \gamma_0^2 (v_0/v_f + 1)$  раз превышает частоту волны накачки [8], где  $\gamma_0$  — энергия пучка в единицах  $mc^2$ ,  $\beta_0 = v_0/c$ ,  $v_0$  — скорость пучка,  $v_f$  — фазовая скорость волны накачки. Поскольку в плазме легко реализовать условие  $v_0/v_f \gg 1$ , существенного умножения частоты волны накачки можно добиться, используя даже нерелятивистские пучки [9].

Изучению параметрических механизмов возбуждения электромагнитного излучения в системе замагниченный плазменный волновод — электронный пучок и посвящена данная работа. Конкретно речь пойдет о нелинейном взаимодействии высокочастотных (ВЧ) волн плотности заряда электронного пучка, НЧ медленной ( $v_f < c$ ) плазменной и ВЧ быстрой ( $v_f > c$ ) электромагнитной волн плазменного волновода [10]. Умножение частоты плазменной волны при нелинейном взаимодействии указанных волн может быть достигнуто в двух случаях. В первом случае плазменная волна и электронный пучок распространяются в одном направлении (прямая плазменная волна), во втором — направления их распространения противоположны (обратная плазменная волна). Поскольку направление распространения волны накачки является принципиальным моментом [7], то в работе уделено внимание каждому из этих случаев.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ВЫВОД УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим волновод, образованный плазменным цилиндром радиуса  $a$  и проводящим кожухом такого же радиуса. Пусть в плазме вдоль оси системы движется полый моноэнергетический релятивист-

ский пучок электронов, радиус которого  $b$ . Для простоты будем считать, что пучок бесконечно тонкий. Система помещена во внешнее магнитное поле, силовые линии которого параллельны оси волновода. Электроны пучка и плазмы будем считать замагниченными (движение одномерно).

Заметим, что в рассматриваемой плазменно-пучковой системе реализация указанных выше параметрических механизмов возбуждения коротковолнового электромагнитного излучения возможна, когда отсутствует прямое черенковское взаимодействие пучка с медленной плазменной волной. Критерий отсутствия линейной черенковской неустойчивости пучка в рассматриваемой геометрии имеет следующий вид:

$$\beta_0^2 (1 + \lambda_0^2 / P_e) < 1. \quad (1)$$

Здесь  $P_e = \omega_{Le}^2 a^2 / c^2$  — погонная плотность плазмы,  $\lambda_0 \approx 2, 4$ .

Будем считать, что параметры пучка и плазмы удовлетворяют условию (1). Пусть плазменная волна распространяется вдоль пучка. Условие синхронизма взаимодействующих колебаний плазменного волновода с электронным пучком в этом случае записывается в виде

$$\omega_e + \omega_p \simeq (k_e + k_p) v_0, \quad (2)$$

где  $\omega_{e,p}$  — частоты, а  $k_{e,p}$  — продольные волновые числа электромагнитной и плазменной волн. На рис. 1 изображена дисперсионная диаграмма взаимодействующих колебаний, иллюстрирующая комбинационный синхронизм (2).

Для описания нелинейного взаимодействия волн воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, & \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} n_0 \tilde{v} - \frac{4\pi e}{c} \tilde{n} \tilde{v} + \frac{4\pi}{c} j_b \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнениями гидродинамики для электронов плазмы, где  $n_0$  — равновесная плотность плазмы,  $\tilde{n}, \tilde{v}$  — возмущение плотности и скорости электронов плазмы,  $j_b$  — плотность тока пучка.

Влияние на пучок нерезонансных плазменной и электромагнитной волн будем описывать в рамках уравнений гидродинамики, которые для краткости не выписываем, а движение пучка в поле резонансной комбинационной волны будем моделировать методом «крупных частиц» [11]. Такой подход позволяет корректно описать, например, явление захвата пучка полем резонансной волны.

На поверхности идеально проводящего кожуха продольная компонента электрического поля обращается в нуль:

$$E_z(r = a) = 0. \quad (4)$$

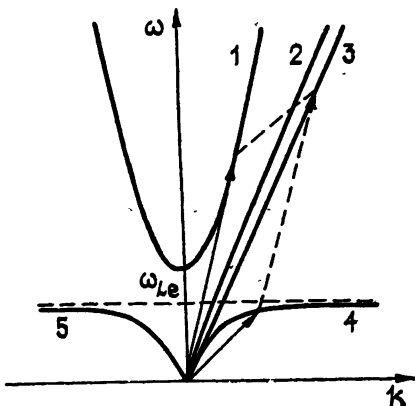


Рис. 1. Дисперсионная диаграмма в случае прямой плазменной волны накачки:

1 — электромагнитная волна, 2, 3 — быстрая и медленная волны плотности заряда пучка, 4, 5 — прямая и обратная плазменные волны.

Система уравнений (3) сводится к следующему нелинейному волновому уравнению для продольной компоненты электрического поля:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + \omega_{Le}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] E_z =$$

$$= 4\pi e \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial \tilde{n} v}{\partial t} - n_0 \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_b}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \rho_b}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$\rho_b$  — плотность зарядов пучка,  $\omega_{Le}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$ . В рассматриваемой модели бесконечно тонкого пучка выражение для равновесной плотности имеет вид

$$n_{b0} = (N_b / 2\pi b) \delta(r - b),$$

где  $N_b$  — число частиц на единицу длины пучка,  $\delta(x)$  — дельта-функция.

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$E_z = A_e(r, t) \exp(ik_e z - i\omega_e t) + A_p(r, t) \exp(ik_p z - i\omega_p t) +$$

$$+ A_s(r, t) \exp(ik_s z - i\omega_s t), \quad (6)$$

где медленно меняющиеся функции  $A_e, p$  описывают электромагнитную и плазменную волны, а функция  $A_s$  описывает резонансную с пучком комбинационную волну,  $\omega_s = \omega_e + \omega_p$ ,  $k_s = k_e + k_p$ . После подстановки выражения (6) в уравнение (5) и ряда несложных преобразований нетрудно получить следующую систему укороченных по времени уравнений:

$$Q_e A_e = i\sigma_e A_s A_p^* e^{-i\delta t} + \mu_{e,p} A_p^* R(\eta) e^{-i\delta t}; \quad (7a)$$

$$Q_p A_p = i\sigma_p A_s A_e^* e^{-i\delta t} + \mu_{p,p} A_e^* R(\eta) e^{-i\delta t}; \quad (7b)$$

$$Q_s A_s = -i\sigma_s A_e A_p e^{i\delta t} - \frac{4\pi i e k_e N_b}{\gamma_0^2} \rho R(\eta). \quad (7b)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Q_\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \lambda_\alpha^2 + i \frac{\partial \lambda_\alpha^2}{\partial \omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \alpha = e, p, s, \quad \eta = \frac{r}{a},$$

$$\lambda_\alpha^2 = \varepsilon_\alpha^{(\alpha)} x_\alpha^2, \quad x_\alpha^2 = \left( \frac{\omega_\alpha^2}{c^2} - k_\alpha^2 \right) a^2, \quad \varepsilon_\alpha^{(\alpha)} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_\alpha^2},$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\omega_{Le}^2 k_p}{\omega_p^2 \omega_e^2} \frac{e}{m} x_\alpha^2, \quad \mu_{e,p} = \frac{\Omega_b^2}{\Omega_e^2} x_{e,p}^2, \quad \Omega_e = \omega_e - k_e v_0, \quad (8)$$

$$\Omega_b^2 = \frac{4\pi e^2 N_b}{m \gamma_0^3 a^2}, \quad R(\eta) = \frac{\delta(\eta - \eta_0)}{2\pi \eta_0}, \quad \eta_0 = \frac{b}{a}, \quad \delta = \omega_s - \omega_e - \omega_p,$$

$$\rho = \frac{k_s}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_s} \exp[i\omega_s t - ik_s z_s(t, z_0)] dz_0.$$

Интегрирование в (8) ведется по начальным значениям координат частиц пучка [11]. Траектории частиц пучка  $z_L$  определяются путем интегрирования уравнений движения (см. ниже). Систему уравнений (7)

необходимо дополнить граничными условиями для функций  $A_\alpha$ , которые следуют из (4) и имеют вид

$$A_\alpha(\eta = 1) = 0. \quad (9)$$

Будем решать систему уравнений (7) методом последовательных приближений. В линейном приближении функции  $A_{e,p}$  зависят только от радиуса  $A_{e,p} = a_{e,p} J_0(\lambda_{e,p} \eta)$ , где  $a_{e,p}$  — амплитуды электромагнитной и плазменной волн,  $\lambda_e = \rho_n$ ,  $\lambda_p = \rho_m$ ,  $\rho_n, m$  — в общем случае разные корни функции Бесселя  $J_0(x)$ . Взаимодействие волн приведет к медленному изменению амплитуд, а также к слабому искажению распределения полей волн по сечению плазмы. В соответствии с этим будем искать решения уравнений (7а), (7б) в виде

$$A_{e,p} = a_{e,p}(t) J_0(\lambda_{e,p} \eta) + \delta A_{e,p}(t, \eta), \quad (10)$$

где  $\delta A_{e,p}$  — малые добавки. Подставим выражения (10) в уравнение (7в). Поскольку нелинейные добавки малы, в правой части этого уравнения достаточно удерживать только главные члены разложений (10). Такое упрощение дает возможность решить уравнение (7в) относительно поперечной координаты:

$$A_s = a_s J_0(\lambda_s \eta) - i \nu_s a_e a_p \Phi_s(\lambda_s \eta) e^{i \omega t} - (4\pi i e k_s N_b / \gamma_0^2) \rho F_s(\eta), \quad (11)$$

где

$$\Phi_s(\lambda_s \eta) = \int_0^\eta L(\lambda_s \eta, \lambda_s \xi) J_0(\lambda_p \xi) J_0(\lambda_e \xi) \xi d\xi,$$

$$L(x, y) = (\pi i / 2) [J_0(x) H_0^{(1)}(y) - H_0^{(1)}(x) J_0(y)].$$

$H_0^{(1)}(x)$  — функция Ханкеля,

$$F_s = \int_0^\eta L(\lambda_s \eta, \lambda_s \xi) R(\xi) \xi d\xi.$$

С учетом (11) нетрудно найти приближенные решения уравнений (7а), (7б):

$$A_e = a_e J_0(\lambda_e \eta) + i (\partial J_0(\lambda_e \eta) / \partial \omega_e) \partial a_e / \partial t + i \sigma_e a_p^* \Phi_e(\lambda_e \eta) e^{-i \omega t} + \mu_e \rho a_p^* F_e e^{-i \omega t}; \quad (12)$$

$$A_p = a_p J_0(\lambda_p \eta) + i (\partial J_0(\lambda_p \eta) / \partial \omega_p) \partial a_p / \partial t + i \nu_p a_e^* \Phi_p(\lambda_p \eta) e^{-i \omega t} + \mu_p \rho a_e^* F_p e^{-i \omega t}. \quad (13)$$

Здесь

$$\Phi_{e,p}(\lambda_{e,p} \eta) = \int_0^\eta L(\lambda_{e,p} \eta, \lambda_{e,p} \xi) A_s(\xi) J_0(\lambda_{p,e} \xi) \xi d\xi,$$

$$F_{e,p} = \int_0^\eta L(\lambda_{e,p} \eta, \lambda_{e,p} \xi) R(\xi) J_0(\lambda_{p,e} \xi) \xi d\xi.$$

Последнее слагаемое в выражении (12) является вынужденным решением неоднородного уравнения (7а). Сумма остальных слагаемых представляет собой приближенное решение соответствующего однородного уравнения. Выражения (11), (13) имеют аналогичную структуру. Отметим, что в (11) мы пренебрегли производной амплитуды комбина-

ционной волны по времени. Это оправдано, поскольку комбинационная волна не является собственной волной плазменного волновода.

Воспользуемся теперь граничными условиями (9). В результате получим следующие уравнения для амплитуд электромагнитной и плазменной волн:

$$ida_e/dt = V_e \rho a_p^* e^{-i\delta t}; \quad (14)$$

$$ida_p/dt = V_p \rho a_e^* e^{-i\delta t}, \quad (15)$$

где

$$V_{e,p} = \frac{v_{ge,p} \kappa_{e,p}^2 \Omega_b^2 \Pi}{2\pi J_1^2(\lambda_{e,p}) k_{e,p} a^2 \varepsilon_1^{(e),(p)}}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

$$\Pi = \frac{J_0(\lambda_p \eta_0) J_0(\lambda_e \eta_0)}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma_0}{\omega_p^2 \omega_e^2} \frac{k_p k_s N}{I_0(q_s)} \equiv \Pi_b - \Pi_e,$$

$$N = \int_0^1 J_0(\lambda_e \xi) J_0(\lambda_p \xi) f(q_s \xi) \xi d\xi,$$

$$f(q_s \xi) = \begin{cases} \Delta_s(1, \xi) I_0(q_s \eta_0), & \xi > \eta_0, \\ \Delta_s(1, \eta_0) I_0(q_s \xi), & \xi < \eta_0 \end{cases},$$

$$\Delta_s(1, \xi) = I_0(q_s) K_0(q_s \xi) - I_0(q_s \xi) K_0(q_s), \quad q_s = \omega_s a / v_0 \gamma_0.$$

Систему уравнений (14), (15), (8) замыкают уравнения движения электронов пучка, записанные в лагранжевых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{dz_n}{dt} = v_n, \quad \frac{dp_n}{dt} = -i \frac{k_s e^2}{m \gamma_0^3} a_e a_p \Pi e^{i\delta t} - \\ - \frac{2ie^2 k_s \Delta_s(1, \eta_0) I_0(q_s \eta_0) N_b}{\gamma_0^2 I_0(q_s)} \rho. \end{aligned} \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения движения (16) представляет собой силу, действующую на электронный пучок со стороны комбинационной волны, а второе учитывает ВЧ пространственный заряд пучка.

## 2. НАКАЧКА ПРЯМОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ

Система уравнений (8), (14)–(16) описывает возбуждение электромагнитного излучения электронным пучком в случае прямой плазменной волны. Для анализа этой системы удобно перейти к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\omega_s t \theta}{\gamma_0^2}, \quad \theta = \frac{\Omega_b a \gamma_0}{v_0} \sqrt{\frac{\Delta_s(1, \eta_0) I_0(q_s \eta_0)}{2\pi I_0(q_s)}}, \\ v = \frac{n_0 - p_n}{p_0 \theta}, \quad \xi = \frac{k_s}{2\pi} (z - v_0 t), \quad C_{e,p} = \frac{a_{e,p}}{\tilde{a}_{e,p}}, \\ \tilde{a}_{e,p} = \left[ \frac{v_{ge,p} \kappa_{e,p}^2 \theta \gamma_0}{J_1^2(\lambda_{e,p}) k_{e,p} \omega_s a^2} \frac{2m N_b v_0^2}{a^2 \varepsilon_1^{(e),(p)}} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В этих переменных систему уравнений (14)–(16) можно записать в виде

$$i \frac{dC_e}{d\tau} = V_p C_p^* e^{-i\Delta\tau}, \quad i \frac{dC_p}{d\tau} = V_p C_e^* e^{-i\Delta\tau}; \quad (17)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{v}{2\pi}, \quad \frac{dv}{d\tau} = i(\rho + VC_e C_p e^{i\Delta\tau}) e^{2\pi i \xi},$$

$$\rho = \int_0^1 \exp[-2\pi i \xi(\tau, \xi_0)] d\xi_0, \quad (18)$$

где

$$V = \frac{k_s e^2 \Pi}{m^2 \gamma_0^2 v_0 \omega_s \theta^2} \tilde{a}_p \tilde{a}_e \equiv V^{(b)} - V^{(p)}, \quad (19)$$

$$\Delta = (\omega_s - \omega_e - \omega_p) \gamma_0^2 / \omega_s \theta.$$

Определим коэффициент преобразования энергии пучка в излучение как отношение энергии электромагнитной волны единицы длины волновода

$$W_e = \frac{1}{v_{ge}} \frac{c}{4\pi} \int_0^a E_{re} H_{\varphi e} 2\pi r dr$$

к кинетической энергии единицы длины пучка

$$W_b = N_b m c^2 (\gamma_0 - 1).$$

Введенный таким образом КПД связан с безразмерной амплитудой  $C_e$  соотношением

$$\eta = ((\gamma_0 + 1)/\gamma_0) \theta |C_e|^2. \quad (20)$$

Система уравнений (17), (18) имеет интеграл

$$|C_e|^2 - |C_p|^2 = \text{const}, \quad (21)$$

из которого следует, что нарастание электронной волны сопровождается ростом плазменной волны накачки.

Из формул (19) видно, что коэффициент нелинейной связи содержит два слагаемых, которые соответствуют вкладам в генерацию излучения двух процессов. Первое слагаемое учитывает рассеяние волн плотности заряда плазмы на электронах пучка, а второе — соответственно рассеяние волн плотности заряда пучка на электронах плазмы. Причем, эти слагаемые имеют разные знаки. Физически это означает, что вынужденные нелинейные токи пучка и плазмы находятся в противофазе. Поэтому излучение энергии, например, электронами пучка сопровождается поглощением ее части электронами плазмы и наоборот в зависимости от соотношения между амплитудами нелинейных токов пучка и плазмы. Степень ослабления излучения зависит от геометрии системы, частоты волны накачки и энергии пучка. В наиболее интересном случае высоких частот излучения

$$\omega_e a / v_0 \gamma_0 \gg 1$$

выражение для коэффициента  $\Pi$  можно представить в виде

$$\Pi = J_0(\lambda_p \gamma_0) J_0(\lambda_e \gamma_0) \left[ \frac{1}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_{1e}^2}{\omega_p^2 \omega_e^2} \frac{k_p}{k_s} \gamma_0^3 \right].$$

В случае релятивистского пучка

$$\gamma_0^3 \gg \omega_{Le}^2 / 8\omega_p^2, \quad \gamma_0 \gg 1,$$

доминирующим процессом является рассеяние плазменной волны на электронах пучка. Поглощением излучения электронами плазмы можно пренебречь, поскольку

$$V^{(p)}/V^{(b)} \simeq \omega_{Le}^2 / 8\omega_p^2 \gamma_0^3.$$

Если волна накачки настолько низкочастотная, что выполняется обратное неравенство, а именно  $\omega_{Le}^2 / 8\omega_p^2 \gg \gamma_0^3$ , то излучение определяется электронами плазмы.

Для нерелятивистского пучка наиболее сильное ослабление излучения и соответственно уменьшение коэффициента нелинейной связи имеют место, когда частота волны накачки близка к ленгмюровской частоте плазмы. В этом случае

$$V/V^{(b)} \simeq 3k_e v_0 / \omega_e \ll 1.$$

В общем случае систему уравнений (17), (18) можно решить только численными методами. Однако на начальной стадии неустойчивости, когда амплитуды колебаний малы и слабо возмущают траектории частиц пучка, уравнения можно упростить и записать в виде

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + \rho = -V C_e C_p e^{i\Delta\tau}, \quad (22)$$

$$i \frac{dC_e}{d\tau} = V \rho C_p^* e^{i\Delta\tau}, \quad i \frac{dC_p}{d\tau} = V \rho C_e^* e^{-i\Delta\tau}.$$

В приближении заданной амплитуды плазменной волны первые два уравнения системы (22) становятся линейными. Подставив в эти уравнения

$$\rho = \rho_0 e^{i\Gamma\tau}, \quad C_e = C_{e0} e^{i\Gamma\tau - i\Delta\tau},$$

находим следующее дисперсионное уравнение [5]:

$$(\Gamma^2 - 1)(\Gamma - \Delta) = -V^2 |C_{p0}|^2. \quad (23)$$

Значение инкремента неустойчивости определяется параметром

$$P = V^2 |C_{p0}|^2. \quad (24)$$

Рассмотрим случай сильнооточного пучка или малых амплитуд волны накачки

$$P \ll 1, \quad (25)$$

когда необходим учет ВЧ пространственного заряда пучка. Инкремент в этом случае максимален при  $\Delta = 1$  и оказывается равным

$$\text{Im } \Gamma = \sqrt{P/2}. \quad (26)$$

Этот инкремент соответствует распаду медленной волны плотности заряда пучка, энергия которой, как известно, отрицательна, на электромагнитную и плазменную волны. Условие  $\Delta = 1$  является условием синхронизма между указанными волнами. Выражение для инкремента, переписанное в размерных единицах, имеет вид

$$\text{Im } \Gamma = \begin{cases} 4\gamma_0\omega_e \frac{J_0(\lambda_e\gamma_0) J_0(\lambda_p\gamma_0)\lambda_e}{(k_s a)^2 J_1(\lambda_e)} \frac{ea_{p0}}{m\omega_e v_0} \left(\frac{4i_0}{i_A \gamma_0^2} k_s b\right)^{1/4}, \\ \gamma_0 \gg 1, \quad k_p a \gamma_0 \gg 1 \\ 3\omega_e \frac{J_0(\lambda_e\gamma_0) J_0(\lambda_p\gamma_0)\lambda_e}{(k_s a)^2 J_1(\lambda_e)} \frac{ea_{p0}}{m\omega_e v_0} (2Q_b k_s b)^{1/4}, \\ \beta_0 \ll 1, \quad k_p a \gg 1 \end{cases} \quad (27)$$

Здесь  $Q_b = i_0(A)/U^{3/2}(\kappa\varepsilon B)$  — первеанс пучка,  $i_A = mc^3/e$ . Откажемся теперь от приближения заданной волны накачки и учтем в рамках уравнений (22) обратное влияние ВЧ колебаний на плазменную волну. Подстановкой

$$\rho = \rho_s e^{i\tau},$$

где  $\rho_s$  — медленно меняющаяся амплитуда медленной волны плотности заряда пучка, уравнения (22) сводятся к стандартной системе

$$2i \frac{d\rho_s}{d\tau} = -VC_e C_p, \quad i \frac{dC_e}{d\tau} = V\rho_s C_p^*, \quad i \frac{dC_p}{d\tau} = V\rho_s C_e^*, \quad (28)$$

описывающей начальную стадию взрывной неустойчивости [9]. Формально амплитуды взаимодействующих колебаний обращаются в бесконечность в некоторый момент времени  $\tau_0$  как  $1/\sqrt{\tau_0 - \tau}$ . В частном случае  $\rho_s(\tau = 0) = 0$  выражение для характерного времени развития неустойчивости имеет вид

$$\tau_0 = K(x)/\sqrt{2}V|C_{p0}|, \quad (29)$$

где  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл,

$$K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2 t^2)}} \approx \ln \frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$1-x^2 = |C_{e0}|^2/|C_{p0}|^2 \ll 1.$$

С точностью до логарифмического множителя характерное время развития взрывной неустойчивости совпадает с инкрементом, полученным в приближении заданной волны накачки.

Выше была исследована начальная стадия нелинейной неустойчивости в случае больших токов пучка или малых амплитуд волны накачки, когда необходим учет ВЧ пространственного заряда. Рассмотрим теперь обратный предельный случай, а именно, будем считать, что выполнено условие

$$P \gg 1. \quad (30)$$

В этом случае инкремент достигает максимального значения при  $\Delta = 0$  и оказывается равным

$$\text{Im } \Gamma = (\sqrt{3}/2) P^{1/3}. \quad (31)$$

Инкремент (31) описывает модифицированный распад [5], когда в резонансе с комбинационной волной находится как быстрая, так и медленная волны плотности заряда пучка. Для релятивистских и нерелятивистских пучков формула (31), записанная в размерных единицах, приобретает вид



$$\text{Im } \Gamma = \begin{cases} V\sqrt{3} \left[ 2 \frac{i_0}{i_A \gamma_0} \left( \frac{e a_{p0}}{m \omega_e v_0} \right)^2 \frac{J_0^2(\lambda_e \gamma_0) J_0^2(\lambda_p \gamma_0) \lambda_e^2}{(k_s a)^4 J_1^2(\lambda_e)} \right]^{1/3} \omega_e, \\ \quad \gamma_0 \gg 1, \quad k_p a \gamma_0 \gg 1 \\ \frac{V\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{9}{2} Q \left( \frac{e a_{n0}}{m \omega_e v_0} \right)^2 \frac{J_0^2(\lambda_e \gamma_0) J_0^2(\lambda_p \gamma_0) \lambda_e^2}{(k_s a)^4 J_1^2(\lambda_e)} \right]^{1/3} \omega_e, \\ \quad \beta_0^2 \ll 1, \quad k_p a \gg 1 \end{cases} \quad (32)$$

Исследуем теперь в приближении заданной амплитуды волны накачки нелинейную стадию модифицированного распадного процесса. Условие (30) позволяет пренебречь в уравнении движения частиц пучка (18) вторым слагаемым, которое учитывает поле ВЧ пространственного заряда. Тогда после замены

$$C_e = \tilde{C}_e P^{1/6}, \quad \tau = \tilde{\tau} P^{1/3}, \quad v = \tilde{v} P^{1/3}$$

систему уравнений (17), (18) можно записать в виде

$$\frac{d\tilde{C}_e}{d\tilde{\tau}} = \int_0^1 e^{-2\pi i \xi} d\xi_0, \quad \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{\tau}} = \tilde{C}_e e^{2\pi i \xi}, \quad \frac{d\xi}{d\tilde{\tau}} = -\frac{\tilde{v}}{2\pi}. \quad (33)$$

Результаты численного интегрирования системы уравнений (33) приведены, например, в работе [11], в которой изучалось взаимодействие моноэнергетического электронного пучка с плазменной волной. Согласно уравнениям (33), экспоненциальный рост на начальной стадии неустойчивости сменяется осцилляциями амплитуды, которые обусловлены фазовыми колебаниями захваченных комбинационной волной сгустков электронного пучка. Максимальное значение, которого достигает безразмерная амплитуда, равно примерно 1,5. Для коэффициента преобразования энергии пучка в излучение в соответствии с формулой (20) имеем следующее выражение:

$$\eta \approx 2(\gamma_0 + 1) \gamma_0^{-1} \theta P^{1/3}. \quad (34)$$

Проведенное выше рассмотрение справедливо, когда амплитуда плазменной волны меняется незначительно. Такое предположение оправдано, если выполнено следующее условие на амплитуду волны накачки:

$$|C_{p0}|^2 \gg P^{1/3}, \quad (35)$$

которое легко получить, используя интеграл (21). Неравенство (35) ограничивает снизу допустимое значение амплитуды плазменной волны, при которой справедливо приближение заданной волны накачки. Если выполняется обратное неравенство, то параметрическая неустойчивость будет приводить к существенному росту плазменной волны.

### 3. НАКАЧКА ОБРАТНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНОЙ

В данном разделе рассматривается параметрическая неустойчивость в случае плазменной волны, распространяющейся навстречу пучку. Взаимодействующие колебания плазменного волновода удовлетворяют следующему условию синхронизма с электронным пучком (см. рис. 2):

$$\omega_e - \omega_p = (k_e + k_p) v_0. \quad (36)$$

Самосоглаёванная система нелинейных уравнений, описывающая возбуждение излучения электронным пучком при накачке обратной плазменной волной, имеет вид

$$i \frac{dC_e}{d\tau} = V_p C_p e^{-i\Delta\tau}, \quad i \frac{dC_p}{d\tau} = V_p^* C_e e^{i\Delta\tau},$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = i(\rho + V C_e C_p^* e^{i\Delta\tau}) e^{2\pi i\xi}, \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{\nu}{2\pi}, \quad (37)$$

$$\rho = \int_0^1 e^{-2\pi i\xi} d\xi_0.$$

Здесь

$$\Delta = (\omega_s + \omega_p - \omega_e) \gamma_0^2 / \omega_s \theta.$$

Остальные обозначения, а также определения безразмерных переменных приведены в предыдущем разделе.

Система уравнений (37) имеет интеграл

$$|C_e|^2 + |C_p|^2 = \text{const}, \quad (38)$$

согласно которому увеличение амплитуды электромагнитной волны сопровождается затуханием плазменной волны накачки.

При небольших амплитудах колебаний, когда справедливо гидродинамическое описание пучка, система уравнений (37) упрощается и принимает вид

$$d^2\rho/d\tau^2 + \rho = -V C_e C_p^* e^{i\Delta\tau},$$

$$i dC_e/d\tau = V_p C_p e^{-i\Delta\tau}, \quad (39)$$

$$i dC_p/d\tau = V_p^* C_e e^{i\Delta\tau}.$$

В приближении заданной амплитуды плазменной волны из системы уравнений (39) следует дисперсионное уравнение (23), которое исследовано в разд. 2. При малых амплитудах волны накачки или плотного пучка, когда  $P \ll 1$ , инкремент (26) в рассматриваемом случае характеризует начальную стадию процесса слияния плазменной и медленной пучковой волн. Обратное влияние ВЧ колебаний на плазменную волну можно учесть в рамках укороченных уравнений:

$$2i d\rho_s/d\tau = -V C_e C_p^*, \quad i dC_e/d\tau = V_p C_p, \quad i dC_p/d\tau = V_p^* C_e. \quad (40)$$

В частном случае  $\rho_s(\tau = 0) = 0$  решение системы (40) выражается, как известно, через эллиптические функции:

$$R_e^2 = R_{e0}^2 + R_{p0}^2 [1 - \text{sn}^2(K(x) - (1/\sqrt{2})VR_0\tau, x)],$$

$$R_p^2 = R_{p0}^2 \text{sn}^2(K(x) - (1/\sqrt{2})VR_0\tau, x), \quad (41)$$

$$R_s^2 = R_{p0}^2 [1 - \text{sn}^2(K(x) - (1/\sqrt{2})VR_0\tau, x)],$$

где  $R_{p0, e0} = |C_{p0, e0}|$ ,  $R_0^2 = R_{p0}^2 + R_{e0}^2$ ,  $x^2 = R_{p0}^2/R_0^2$ ,  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл.

На начальной стадии неустойчивости имеет место рост электромагнитной и медленной пучковой волн, а амплитуда плазменной волны убывает и в момент времени  $\tau_0 = \sqrt{2}K(x)/VR_0$  обращается в нуль. Затем направление процесса меняется. Распад электромагнитной волны

на плазменную и медленную пучковую волны приводит к затуханию пучковой и росту плазменной волны.

В случае слаботочного пучка ( $P \gg 1$ ) в приближении заданной волны накачки неустойчивость, как и при накачке прямой плазменной волной, стабилизируется захватом пучка комбинационной волной. Условие применимости приближения заданной волны накачки совпадает с (35). Если это условие не выполнено, то насыщение неустойчивости произойдет вследствие истощения волны накачки.

Таким образом, проведенное в работе рассмотрение показало, что за генерацию электронным пучком электромагнитного излучения ответ-

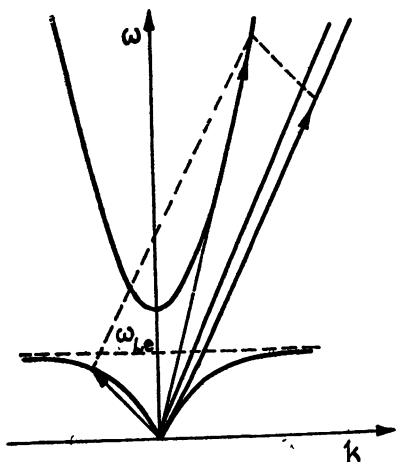


Рис. 2. Дисперсионная диаграмма в случае обратной плазменной волны накачки.

ственны два процесса: рассеяние волн плотности заряда пучка на электронах плазмы и рассеяние волн плотности заряда плазмы на электронах пучка. Нелинейные токи пучка и плазмы находятся в противофазе. Поэтому излучение нелинейного тока, наведенного в электронном пучке, сопровождается поглощением части энергии излучения нелинейным током плазмы и наоборот в зависимости от соотношения между амплитудами нелинейных токов пучка и плазмы. Для релятивистских пучков влияние электронов плазмы на генерацию излучения незначительно. В случае нерелятивистских пучков происходит заметная компенсация нелинейных токов пучка и плазмы, что приводит к существенному ослаблению излучения и уменьшению инкрементов неустойчивостей.

Характер изменения амплитуды плазменной волны накачки под действием ВЧ колебаний определяется направлением плазменной волны относительно пучка. В случае прямой волны накачки в процессе неустойчивости ее амплитуда увеличивается. Если волна накачки распространяется навстречу пучку, то возбуждение излучения сопровождается истощением плазменной волны.

Заметим, что в рассматриваемой системе возможно рассеяние симметричной плазменной волны не только в симметричные, но также и в несимметричные электромагнитные волны. Поскольку амплитуда продольной компоненты электрического поля несимметричных волн на оси волновода обращается в нуль, то в случае пучка малого радиуса ( $b \ll a$ ) инкременты таких процессов меньше инкрементов возбуждения симметричной электромагнитной волны. Укажем также, что наряду с высокочастотными электромагнитными волнами условиям синхронизма (2), (36) могут удовлетворять и сравнительно низкочастотные волны, распространяющиеся навстречу пучку. Однако изучение таких процессов требует дополнительного рассмотрения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sprangle P., Granatstein V. L.— Appl. Phys. Lett., 1974, 25, p. 377.
2. Sprangle P., Granatstein V. L., Baker L.— Phys. Rev., 1975, A-12, p. 1697.
3. Мирошниченко В. И.— Письма в ЖТФ, 1975, 1, № 23, с. 1057.
4. Мирошниченко В. И.— Физика плазмы, 1976, 2, № 5, с. 789.
5. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.— ЖЭТФ, 1979, 76, № 3, с. 830.
6. Мирошниченко В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 3, с. 353.

7. Буц В. А., Мирошниченко В. И., Огневенко В. В.—ЖТФ, 1980, 50, № 10, с. 2257.
8. Калмыков А. М., Коцаренко Н. Я., Кулиш В. В.—Изв. вузов—Радиоэлектроника, 1977, 20, № 1, с. 76.
9. Рабинович М. И., Реутов В. П.—Изв. вузов—Радиофизика, 1973, 16, № 6, с. 815.
10. Кондратенко А. Н. Плазменные волноводы.—М.: Атомиздат, 1976.
11. Онищенко И. Н., Линецкий А. Р., Мациборко Н. Г., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.—Письма в ЖЭТФ, 1970, 12, № 8, с. 407.
12. Рабинович М. И., Файнштейн С. М.—ЖЭТФ, 1972, 63, № 5, с. 1672.

Поступила в редакцию  
10 июня 1981 г.,  
после доработки  
26 апреля 1982 г.

## TO THE THEORY OF PARAMETRICAL EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC RADIATION IN A PLASMA WAVEGUIDE WITH ELECTRON BEAM

*V. A. Balakirev*

A mechanism of excitation of the electromagnetic radiation is studied. It is based on the nonlinear interaction between waves of the electron beam charge density plasma and electromagnetic ones of the plasma waveguide. Cases are considered when the pump plasma wave propagates both along and opposite the beam.

---