УДК 621.371.22

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ И ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА ОБРАЗОВАНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ РАССЕЯННЫХ ВОЛН

В. А. Буц, Ю. П. Мачехин

Найдены условия образования резонансных рассеянных волн (РРВ) в толстых слоях и максимальная амплитуда этих волн при наличии затухания. Определено характерное время образования РРВ и размер области, которая формирует РРВ.

В работах [1,2] показано, что при рассеянии волн на слоях, имеющих слабую пространственно-периодическую неоднородность, могут возбуждаться волны, амплитуды которых значительно превышают амплитуду падающей на слой волны. В дальнейшем эти волны будем называть резонансными рассеянными волнами (РРВ). Были найдены условия возбуждения этих волн для случая рассеяния на тонких слоях и на полупространстве. Так как амплитуды РРВ превышают амплитуды всех других волн, они могут существенно изменить всю структуру рассеянного поля, а также играть определяющую роль в нелинейных процессах [3]. Поэтому необходимо знать характерные времена образования РРВ, а также характерные пространственные размеры областей, которые формируют РРВ. Знание этих величин позволит дать ответ на вопрос о том, в каких явлениях возбуждением РРВ можно пренебречь и, наоборот, в каких они будут играть основную роль. Кроме того, желательно иметь условия образования РРВ для слоев произвольной толщины и при наличии затухания в слое.

В настоящей работе исследуется пространственная и временная динамика образования РРВ при рассеянии плоской электромагнитной волны, падающей на периодически-неоднородный диэлектрический слой произвольной толщины с затуханием.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Пусть из однородного полупространства $z<0$ с диэлектрической проницаемостью ε_1 на периодически-неоднородный диэлектрический слой $0\leqslant z\leqslant L$ падает плоская волна $E = i_y E_0 \exp[i(k_x x+\beta_0 z - \omega t)]$, где $k_x = \omega\sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta/c$, $\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta/c$, θ — угол падения волны на слой (см. рис. 1). Диэлектрическая проницаемость слоя описывается следующим выражением:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 + i\varepsilon' + q\cos(\varkappa x + \xi z), \tag{1}$$

где $\varkappa = 2\pi/d_x$; $\xi = 2\pi/d_z$; d_x и d_z — периоды неоднородности по оси x и z соответственно.

Величины ε_0, ε' и q удовлетворяют неравенствам $q^2 \ll \varepsilon' < q \ll \varepsilon_0$. Диэлектрическую проницаемость полупространства за слоем $(z>L)$ для простоты будем считать равной ε_1 $(\varepsilon_3=\varepsilon_1)$. Поля в слое и вне его должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta E^{(i)} - (\varepsilon_i/c^2)(\partial^2/\partial t^2)E^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

а также граничным условиям на поверхности слоя

$$E_y^{(1)} = E_y^{(2)}\Big|_{z=0},\ H_x^{(1)} = H_x^{(2)}\Big|_{z=0},\ E_y^{(2)} = E_y^{(3)}\Big|_{z=L},\ H_x^{(2)} = H_x^{(3)}\Big|_{z=L}. \qquad (3)$$

При изучении нестационарной задачи эти граничные условия должны быть дополнены значением полей при $t=0$. Рассматривая динамику образования РРВ в ограниченных по оси x слоях к граничным условиям (3), необходимо добавить условия на торце ($x=0$). Эти дополнительные условия формулируются в разд. 3 и 4 соответственно.

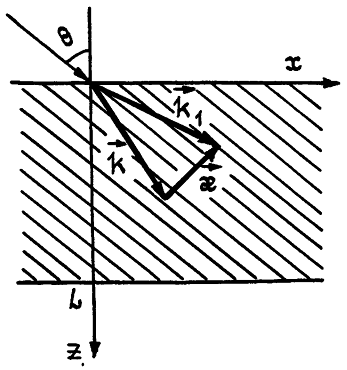

Рис. 1.

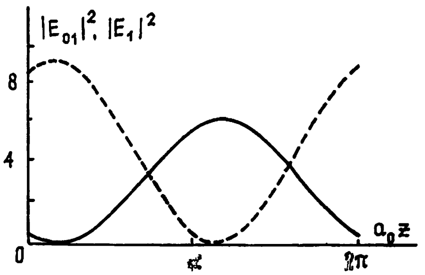

Рис. 2.

2. Образование РРВ в слоях произвольной толщины. Воспользовавшись методом связанных волн [4], поле в слое будем искать в виде

$$E^{(2)} = [(E_{01}(z)\,e^{i\gamma_0 z} + E_{02}(z)\,e^{-i\gamma_0 z})\,e^{ik_x x} + \\ + (E_1(z)\,e^{i\gamma_1 z} + E_2(z)\,e^{-i\gamma_1 z})\,e^{ik_{1x}x}]\,e^{-i\omega t}, \qquad (4)$$

где $\gamma_0 = \sqrt{k^2\varepsilon_0 - k_x^2}$, $\gamma_1 = \sqrt{k^2\varepsilon_0 - k_{1x}^2} = \gamma_0 - \xi$, $k_{1x} = k_x - \varkappa$, $k = \omega/c$, E_{0i}, E_i — медленно меняющиеся амплитуды, E_{0i} — амплитуды волн, которые существуют в однородном слое; будем называть эти волны основными; E_i — амплитуды волн, соответствующих минус первому порядку дифракции. В выражении (4) вместо суммы всех связанных волн мы оставили только две, так как взаимодействие с другими малоэффективно (см., например, [5]) (Здесь также надо помнить о неравенстве $\varepsilon' \gg q^2$.). Подставляя (4) в уравнение (2) ($i=2$), для определения медленно меняющихся амплитуд получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} &E_1 = (Ae^{ia_0 z} + Be^{-ia_0 z})\,e^{-\sigma z}, \\ &E_2 = C\exp(\alpha_1(z - L)), \\ &E_{01} = \sqrt{\gamma_1/\gamma_0}\,[(1 + i\sigma/a_0)\,Ae^{ia_0 z} - (1 - i\sigma/a_0)\,Be^{-ia_0 z}]\,e^{-\sigma z}, \\ &E_{02} = C_0\exp(\alpha_0(z - L)), \end{aligned} \qquad (5)$$

где $a_0 = qk^2/4\sqrt{\gamma_0\gamma_1}$, $\alpha_i = \varepsilon' k^2/2\gamma_i$, $\sigma = \varepsilon'(k^2/4)(1/\gamma_0 + 1/\gamma_1)$, $i = 0, 1$, A, B, C, C_0 — постоянные коэффициенты, которые определяются из граничных условий (3)

$$A = F\Delta_-^{(1)}/D,\ B = -F\Delta_+^{(1)}/D,$$

$$C_0 = \left[i\,2\beta_0 E_0 - \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}}\,\frac{F}{D}(\eta_+^{(0)}\Delta_-^{(1)} + \eta_-^{(0)}\Delta_+^{(1)})\right]\frac{e^{\alpha_0 L}}{i(\beta_0 - \gamma_0) + \alpha_0}, \qquad (6)$$

$$C = \frac{F}{D}\left(\Delta_{-}^{(1)}\frac{\eta_{+}^{(1)}}{1+i\sigma/a_0} - \Delta_{+}^{(1)}\frac{\eta_{+}^{(1)}}{1-i\sigma/a_0}\right)\frac{e^{\alpha_1 L}}{i(\beta_1-\gamma_1)+\alpha_1},$$

где

$$F = 2\beta_0(\beta_0+\gamma_0+i\alpha_0)\sqrt{\gamma_0/\gamma_1}\,E_0\exp(-i\gamma_0 L+\alpha_0 L),$$

$$\Delta_{\pm}^{(i)} = (\gamma_i+\beta_i+i\alpha_i)(\gamma_i+\beta_i\pm a_0+i\sigma)\exp[(\alpha_i-i\gamma_i)L] -$$

$$-(\gamma_i-\beta_i+i\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i\pm a_0+i\sigma)\exp[i(\gamma_i\pm a_0)L-\sigma L],$$

$$D = \Delta_{+}^{(0)}\Delta_{-}^{(1)}+\Delta_{-}^{(0)}\Delta_{+}^{(1)},\quad \eta_{\pm}^{(i)} = (1\pm i\sigma/a_0)[i(\gamma_i+\beta_i\pm a_0)-\sigma],$$

$$\beta_i = \sqrt{k^2\varepsilon_i-k_{ix}^2},\quad i=0,1.$$

Из выражений (5) следует, что зависимость амплитуд взаимодействующих волн от координаты z связана с наличием затухания и с неоднородностью (через параметр a_0).

Нетрудно видеть, что при определенных условиях значение знаменателя D может стать малым, а амплитуды волн большими. Для выяснения этих условий удобно рассмотреть четыре случая.

а) Тонкие слои. Тонкий слой в нашем случае определяется условием $a_0L\ll 1$. При выполнении этого неравенства амплитуды взаимодействующих волн не зависят от z, а выражение для D можно представить в виде

$$D = 2\delta_1\delta_0+\varepsilon'\varphi, \tag{7}$$

где $\delta_i = (\gamma_i+\beta_i)^2e^{-i\gamma_iL}-(\gamma_i-\beta_i)^2e^{i\gamma_iL}$, φ — некоторый несущественный множитель. Условие $\delta_1=0$ представляет собой дисперсионное уравнение, определяющее собственные волны однородного диэлектрического слоя. Таким образом, если волна, соответствующая минус первому порядку дифракции, является собственной волной однородного слоя, то $\delta_1=0$ (ясно, что всегда $\delta_0\neq 0$), а амплитуды волн равны

$$E_{02}\sim E_{01} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}}\frac{F}{D},\quad E_2\sim E_1 = \frac{q}{\varepsilon'}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_0}}{3\gamma_0+\gamma_1}\frac{F}{\delta_0}. \tag{8}$$

Эти выражения совпадают с выражениями для амплитуд, полученными в [2]. Из (8) следует, что основные поля (E_{01}, E_{02}) в рассматриваемом приближении не «чувствуют» неоднородность слоя. В работе [2] этот факт был исходным и не имел строгого обоснования. Поэтому результат, выраженный формулой (8), можно считать обоснованием исходных положений работы [2].

б) Пусть $\xi>\gamma_0$. Тогда $\gamma_1=(\gamma_0-\xi)<0$, при этом в определении γ_1 в формуле (4) перед радикалом следует поставить знак минус, поэтому $\gamma_1\gamma_0<0$ и параметр a_0 мнимый. Будем называть этот случай рассеянием назад. В выражениях для $\Delta_{\pm}^{(i)}$ появляются слагаемые с экспоненциальными множителями e^{a_0L}. Наличие этих слагаемых не позволяет получить малых значений для D. Таким образом, при рассеянии назад РРВ появляются только в тонких слоях, когда $|a_0L|\ll 1$.

в) Если взаимодействующие волны относительно оси z распространяются в одном направлении, то $\gamma_1\gamma_0>0$ и параметр a_0 действителен. Тогда при выполнении условия $a_0L=2\pi n$ ($n=1,2,\ldots$) выражения для $\Delta_{\pm}^{(i)}$ можно представить в виде

$$\Delta_{\pm}^{(i)} = \delta_i\pm qf+\varepsilon'\psi, \tag{9}$$

где f и ψ — некоторые множители, явный вид которых для нас несуществен.

При выполнении условия волноводного распространения рассеянной волны в однородном слое ($\delta_1=0$) поля основной и рассеянной волн описываются выражениями

$$E^{(2)}=\left[\frac{F}{\delta_0}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_0}}\left(\cos a_0z-\frac{q}{\varepsilon'}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_0}}{3\gamma_0+\gamma_1}\sin a_0z\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp(-\sigma z+i\gamma_0z)+C_0\exp(\alpha_0(z-L)-i\gamma_0z)\right]\exp(ik_xx-i\omega t)+ \tag{10}$$

$$+\left[\frac{F}{\delta_0}\left(\sin a_0z+\frac{q}{\varepsilon'}\frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_0}}{3\gamma_0+\gamma_1}\cos a_0z\right)\exp(i\pi/2+\right.$$

$$\left.+(i\gamma_1-\sigma)z)+C\exp(\alpha_1(z-L)-i\gamma_1z)\right]\exp(ik_{1x}x-i\omega t).$$

Зависимость нормированных на $|E_0|^2$ интенсивностей основной волны (сплошная кривая) и РРВ (пунктир) от z внутри слоя при $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_0=3$, $\theta=80^\circ.5$, $q=10^{-2}$, $\varepsilon'=5\cdot10^{-4}$ показана на рис. 2. Из графиков на этом рисунке видно, что внутри слоя происходит периодическая перекачка энергии между взаимодействующими волнами и что амплитуды волн внутри слоя могут значительно превосходить амплитуду падающей волны.

г) Если рассеянная волна распространяется строго вдоль слоя ($\gamma_1=0$), то формулы (5) несправедливы. Это связано с тем, что в укороченных уравнениях при $\gamma_1\to0$ основную роль будет играть не первая производная от медленно меняющейся амплитуды E_1, а вторая $\partial^2E_1/\partial z^2>>\gamma_1\partial E_1/\partial z$. Решая эти новые укороченные уравнения (при $\varepsilon'=0$) и сшивая полученные решения на границах слоя с решениями в свободном пространстве, получим следующие выражения для амплитуд E_1 и E_{01}:

$$F_1+A_1e^{\lambda_1z}+A_2e^{\lambda_2z}+A_3e^{\lambda_3z},$$
$$E_{01}=-(2/k_0^2q)\left[\lambda_1^2A_1e^{\lambda_1z}+\lambda_2^2A_2e^{\lambda_2z}+\lambda_3^2A_3e^{\lambda_3z}\right], \tag{11}$$

$\lambda_1=ia$, $\lambda_2=\sqrt{3}/2-i/2)a$, $\lambda_3=-\left(\sqrt{3}/2+i/2\right)a$, $a=[(qk^2/2)^2/2\gamma_0]^{1/3}$. Величины A_j определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{3}\mu_{ij}A_j=\delta_{i1}F,$$

где

$$F=-iq\beta_0k^2E_0e^{-i\gamma_0L},$$

$$\mu_{1j}=\lambda_j^2\left[(\lambda_j+i\gamma_0+i\beta_0)e^{i\gamma_0L}+(\beta_0-\gamma_0)(\beta_0+\gamma_0)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times(\lambda_j+i\gamma_0-i\beta_0)\exp(i\gamma_0L+\lambda_jL)\right],$$
$$\mu_{2j}=\lambda_j-\beta_1,\ \mu_{3j}=(\lambda_j+\beta_1)\exp(\lambda_jL).$$

Амплитуда РРВ в этом случае пропорциональна $q^{-1/3}$.

3. Пространственная динамика образования РРВ в тонких слоях. В реальных условиях слои, на которых происходит рассеяние, ограничены по оси x. Если размер слоя вдоль оси x меньше λ/ε', то можно ожидать, что именно ограниченность продольных размеров образца, а не затухание будет определять максимальную величину амплитуды РРВ. Из физики образования РРВ легко получаем следующую оценку величины амплитуды РРВ:

$$E_1 \sim q(l/\lambda)E_{01}. \tag{12}$$

Более точную формулу для E_1 получим, подставляя выражение (4) в (2) ($i=2$) и считая, что амплитуды являются медленными функциями x. Тогда для тонких слоев ($E_{01}=\text{const}$, $E_{02}=\text{const}$), пренебрегая эффектами дифракции на торцах ($x=0$, $x=l$), а также считая, что $E_1|_{x=0}=0$, получим дифференциальное уравнение для определения E_1. Решением этого уравнения будет

$$E_1 = i(q/2)(\varepsilon_0/\varepsilon')\,[1-\exp(-\varepsilon' k^2 x/2\,|k_{1x}|)]\,E_{01}. \tag{13}$$

При достаточно малых значениях $x=l$ из (13) получим

$$E_1 \simeq E_{01}(ql/\lambda)(2\pi\lambda_{1x}/4\lambda), \quad \lambda_{1x} = 2\pi/k_{1x}. \tag{14}$$

Различие оценок (12) и (14) вызвано тем, что при получении (12) РРВ считалась распространяющейся строго вдоль оси x ($\lambda_{1x}=\lambda$). Более точная оценка (14) учитывает наличие поперечного волнового числа ($\gamma_1\neq 0$). При $\gamma_1=0$, $\lambda_{1x}=\lambda$ (14) мало отличается от (12).

4. Временная динамика формирования РРВ. В общем случае пространственная и временная динамика образования РРВ неразрывны. Однако при рассеянии на тонких слоях амплитуды волн не зависят от z, поэтому временную динамику для них можно изучать отдельно. Сформулируем начальные условия для нестационарной задачи. Время «заполнения» слоя падающим полем порядка $t_1 \sim \sqrt{\varepsilon}L/c$. Из физических соображений время формирования РРВ можно оценить величиной $t_2 \sim (\varepsilon_0/\varepsilon')\omega^{-1}$. При $t_2 \gg t_1$ можно считать, что поле в слое включено мгновенно в момент времени $t=0$, т. е. $E_1=E_2|_{t=0}=0$. Тогда подставляя выражения (4) в уравнение (2) ($i=2$) и считая, что амплитуды E_1 и E_2 являются медленными функциями не координаты z, а времени t и $E_{01}=\text{const}$, $E_{02}=\text{const}$, получим уравнение для определения амплитуды E_1. Решением его будет

$$E_1 = i(q/2)(\varepsilon_0/\varepsilon')\,[1-\exp(-(\omega\varepsilon'/2\varepsilon_0)t)]\,E_{01}. \tag{15}$$

Поле E_2 и поля вне слоя легко определяются из граничных условий (3). Из (15) видно, что амплитуда РРВ нарастает во времени с характерным временем $\tau=2\varepsilon_0/\omega\varepsilon'$, которое только в два раза больше времени t_2. Отметим, что при получении формулы (15) мы с необходимостью считали РРВ собственной волной однородного диэлектрического слоя. Более полное исследование временной динамики образования РРВ в тонких слоях можно провести методом преобразования Лапласа. Из этого исследования следует, что только собственные волны диэлектрического слоя могут экспоненциально нарастать во времени. Однако основная формула, полученная методом преобразования Лапласа, полностью совпадает с формулой (15), поэтому результаты этого исследования здесь не приведены.

Если на периодически-неоднородный слой падает p-поляризованная волна, то процесс образования РРВ протекает совершенно так же, как и при возбуждении s-поляризованной волной. Отметим только одну особенность — p-поляризованные волны могут эффективно возбуждать РРВ в виде поверхностной волны диэлектрического слоя или полупространства с $\varepsilon<0$. Отметим также, что все особенности возбуждения

РРВ, а также оценки на величину их амплитуды сохраняются и при рассеянии волн на слоях с трехмерными неоднородностями, когда p- и s-волны не разделяются.

В заключение коротко сформулируем необходимые условия для возбуждения РРВ, а также перечислим основные их особенности.

1) Волновой вектор РРВ определяется из условия синхронизма $\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varkappa}$.

2) Для возбуждения РРВ в тонких слоях необходимо и достаточно, чтобы компоненты волнового вектора РРВ удовлетворяли дисперсионному уравнению $\delta_1 = 0$.

3) В толстых слоях РРВ возбуждаются только при рассеянии вперед ($\gamma_1\gamma_0 > 0$) и при выполнении условий $\delta_1 = 0$ и $a_0 L = 2\pi n$. При рассеянии назад ($\gamma_1\gamma_0 < 0$) РРВ в толстых слоях не возбуждаются.

4) При $\gamma_1 = 0$ РРВ возбуждаются как в тонких, так и в толстых слоях. Кроме того, возможно возбуждение РРВ в средах с $\varepsilon < 1$, например при рассеянии волн плазмой или при рассеянии рентгеновского излучения кристаллами.

5) Характерное время образования РРВ $\tau \sim \varepsilon_0/\varepsilon'\omega$.

6) Продольный размер слоя, на котором происходит формирование РРВ, порядка $l \sim \lambda/\varepsilon'$.

7) Максимальная амплитуда РРВ порядка $E_{\max} \sim (q/\varepsilon')E_{01}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буц В. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 10, с. 1488.
2. Буц В. А., Мачехин Ю. П.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 7, с. 1054.
3. Буц В. А., Мачехин Ю. П.— Письма в ЖЭТФ, 1975, **1**, № 6, с. 281.
4. Маркузе Б. Оптические волноводы.— М.: Мир, 1974.
5. Элаши Ш.— ТИИЭР, 1976, **64**, № 12, с. 22.

Поступила в редакцию
5 октября 1981 г.

SPACE AND TIME DYNAMICS OF RESONANCE AND SCATTERED WAVE FORMATION

V. A. Buts, Yu. P. Machekhin

Formation conditions of resonance scattered waves (RSW) have been found in thick layers as well as the maximal amplitude of these waves in the presence of damping. The characteristic time of formation of RSW and the dimension of the region which forms RSW are defined